# DM OM3 à rendre avant le 20/12

*La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

## Exercice 1 : série de Fourier

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit : $f$ est $2\pi$-périodique, paire et :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement $f$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. Calculer les coefficient de Fourier de $f$.
3. Montrer que la série de Fourier de $f$ est égale à $f$.
4. En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

On admettra que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

## Exercice 2 : intégrale double

On considère le domaine $D$ du plan défini par les trois inéquations :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4; \\ y \leq 2; \\ \sqrt{x} \leq y \leq x. \end{cases}$$

1. Dessiner le domaine $D$.
2. Déterminer les réels $a$ et $b$ et les fonctions $f$ et $g$ tels que $D$ soit défini par les deux inéquations :

$$\begin{cases} a \leq y \leq b; \\ f(y) \leq x \leq g(y). \end{cases}$$

3. Déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int\int_D \sin\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dxdy.$$

## Exercice 3 : intégrale curviligne

On considère la forme différentielle

$$\omega = (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy.$$

1. $\omega$ est-elle fermée ? exacte ?
2. Soit $\gamma_1$ le segment joignant les points $(0,0)$ et $(2,1)$, calculer :

$$\int_{\gamma_1} \omega.$$

3. Soit $\gamma_2$ le chemin paramétré par :

$$\begin{cases} x(t) = 2t + t^{25}\sin^3(2\pi t); \\ y(t) = t; \end{cases}$$

avec $t \in [0, 1]$.
Calculer :

$$\int_{\gamma_2} \omega.$$

## Exercice 4 : série entière

1. Trouver le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n x^n$ dans le cas où :
   (a) $a_n = \exp(\sqrt{n})$ ;
   (b) $a_n = \dfrac{n+3}{2n+1}$.
2. Calculer pour $x \in ]-R, R[$, la somme de la série dans le cas (b) : on pourra calculer cette somme selon si $x \in ]0, R[$, $x = 0$ et $x \in ]-R, 0[$).
   On rappelle que :

$$argth(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et} \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

## Exercice 5 : série numérique

Pour les séries suivantes, déterminer si elles sont convergentes, absolument convergentes, divergentes ou grossièrement divergentes et lorsqu'elles sont convergentes, calculer leur somme :

1.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n}{n+1}.$$

2.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}.$$

3.
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

4.
$$\sum_{n\geq 1} \ln(n+1) - \ln(n).$$