Correction de l'exercice 1.11

Exercice 1.11

Écrire le terme général de la série produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avec :

$$u_n = v_n = \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette série converge-t-elle ? et si oui quelle est sa limite ?

Corrigé

On considère la série produit de Cauchy :

$$\sum_{n\geq 0} u_n \times \sum_{n\geq 0} v_n.$$

Par définition de u_n et v_n on a :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} = \sum_{n\geq 0} c_n,$$

où par définition du produit de Cauchy :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{1}{2^n}(n+1).$$

Donc la série produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^n}.$$

Pour déterminer la convergence de cette série, il suffit de déterminer si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument.
Or la série $\sum u_n$ converge absolument car c'est une série géométrique de rayon $\frac{1}{2} < 1$.
De plus, la série $\sum v_n$ converge pour la même raison, d'où la convergence de la série produit.

Enfin, d'après la proposition sur la somme d'une série produit, il suffit de déterminer la somme des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ puis de les multiplier pour déterminer la somme de la série produit.
On a :

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Donc la somme de la série produit vaut :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{2^n} = 4.$$