Correction de l'exercice 2.8 (c) et (d)

Énoncé

À l'aide des développements en séries entières des fonctions classiques, calculer les développements en séries entières en 0 des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\arcsin x$.

Corrigé

1. On cherche le développement en série entière de la fonction :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\times\ldots\times(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \times \ldots \times \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)\right) (-x^2)^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \times \ldots \times \left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-1)^n x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)\times(-3)\times\ldots\times(-(2n-1))}{2\times 2\times\ldots\times 2} (-1)^n x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n} (-1)^n x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2^n} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n} \frac{1\times 2\times 3\times 4\times\ldots\times 2n}{2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n} \frac{(2n)!}{2\times 1\times 2\times 2\times 2\times 3\times\ldots\times 2\times n} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n} \frac{(2n)!}{2^n n!} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}.
\end{aligned}$$

Donc le développement en série entière de la fonction en 0 est :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}.$$

2. On cherche le développement en série entière de la fonction :

$$\arcsin x.$$

Dérivons cette fonction :

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par conséquent, il suffit d'intégrer le développement limité précédent pour obtenir le développement limité de la fonction arcsin.
Intégrons entre 0 et z, le développement limité précédent :

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} \right) dx, \\
[\arcsin x]_0^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \int_0^z x^{2n} dx, \\
\arcsin z - \arcsin 0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^z, \\
\arcsin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \\
\arcsin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2 (2n+1)} z^{2n+1}, \\
\arcsin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(2^n n!(2n+1))^2} z^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, le développement limité de la fonction arcsin est :

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(2^n n!(2n+1))^2} x^{2n+1}.$$