jean-philippe.miqueu@univ-rennes1.fr, Bât. 22, bureau 206 28/11/2013

Dernière séance de TD

Exercice 1 : Séries numériques

1) Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ? Absolument convergentes ?

a) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

c) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}\ln(n)}$.

2) La série numérique suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$$

est-elle convergente ? Si oui, calculer sa somme.

Exercice 2 : Séries entières

1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de la variable réelle

$$\sum_{n\geq 0} x^n.$$

2) Déterminer, sur son ensemble de définition, la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n\geq 1} nx^n.$$

3) La fonction f définie de la manière suivante :

$$f(x) = \ln(1+x)$$

est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

(Question bonus) : Si oui, sur quel intervalle (le plus grand possible) ce développement est-il valable ?

Exercice 3 : Séries de Fourier

On considère la fonction f, 2π périodique, paire, définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = x(\pi - x)$, pour tout $x \in [0, \pi]$.

1) Représenter graphiquement la fonction f.

2) Calculer les coefficients de Fourier de f.

3) La série de Fourier de f converge-t-elle simplement vers f ? La convergence est-elle normale ?

4) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

jean-philippe.miqueu@univ-rennes1.fr, Bât. 22, bureau 206

Exercice 4 : Intégrales curvilignes

1) On considère la courbe polaire d'équation :

$$\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta), \theta \in [0, 2\pi] \text{ (cardioïde)}.$$

a) Déterminer sa longueur.

b) En utilisant le théorème de Green-Riemann, déterminer son aire.

2) On considère la force $\vec{F}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \vec{F} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (y, 1) \end{array} \right. .$$

a) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ le long du cercle trigonométrique.

b) Sans faire de calcul supplémentaire, peut-on dire si cette force dérive d'un potentiel ?

3) On considère le champ de vecteur $\vec{G}$ définie par

$$\vec{G} : (x, y) \longmapsto \left(\frac{y}{(x+y)^2}, \frac{-x}{(x+y)^2} \right).$$

a) La fonction $\vec{G}$ est-elle définie sur tout $\mathbb{R}^2$?

b) On se place sur l'ensemble $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 0\}$. Cet ensemble est-il convexe ? Existe-il une fonction scalaire dont $\vec{G}$ est le champ de gradient ?

c) Déterminer une primitive de $\vec{G}$ sur $\mathcal{C}$, et calculer l'intégrale curviligne de $\vec{G}$ le long du contour suivant :

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} x(t) & = & \frac{1}{t} + \ln(2+t) \\ y(t) & = & t + \frac{1}{t} \end{array} \right. , 1 \leq t \leq 2$$

Exercice 5 : Intégrales doubles

1) Calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dxdy,$$

avec $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

2) Calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_{\mathcal{D}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

où $\mathcal{D}$ désigne le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.