Étude de l'Astroïde

Référence : [Mon00].

On se place dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Construction de la courbe On considère l'astroïde d'équation, avec $a>0$:

$$\Gamma\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$$

- Les applications x et y sont 2π-périodiques donc on obtient Γ en faisant varier t entre $-\pi$ et π.
- x est paire et y est impaire, donc on peut se restreindre à $t\in[0,\pi]$ et ensuite effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
- Pour tout $t\in[0,\pi]$,

$$\begin{cases} x(\pi-t) = a\cos^3(\pi-t) = a(\cos\pi\cos t+\sin\pi\sin t)^3 = -x(t) \\ y(\pi-t) = a\sin^3(\pi-t) = a(\sin\pi\cos t-\sin t\cos\pi)^3 = y(t) \end{cases}$$

  Donc on peut se restreindre à $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ puis effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- Pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = a\cos^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = a\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos t+\sin\frac{\pi}{2}\sin t\right)^3 = y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = a\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = a\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos t-\sin t\cos\frac{\pi}{2}\right)^3 = x(t) \end{cases}$$

  Donc on peut se restreindre à $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ puis effectuer une symétrie par rapport à la première bissectrice.
- x et y sont dérivables, de dérivées $\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$:

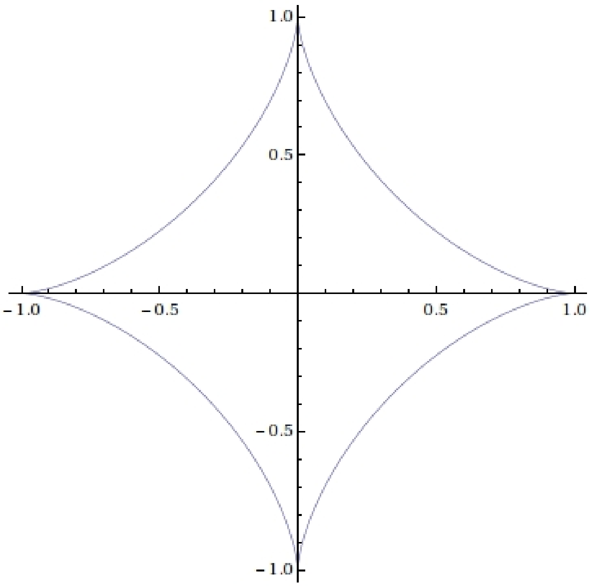
$$\begin{cases} x'(t) = -3a\sin t\cos^2 t \\ y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t \end{cases}$$

  On en déduit le tableau de variations de x et y :

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$
x'	0	$-$	$\frac{-3a}{2\sqrt{2}}$
x	a	$\searrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y'	0	$+$	$\frac{3a}{2\sqrt{2}}$

- Étude en 0 : on a $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\tan t \longrightarrow 0$ quand $t\longrightarrow 0$ donc l'axe des abscisses est une tangente au point $(a,0)$.

D'où le tracé de la courbe (avec $a = 1$) :



Longueur de l'astroïde

– Déterminons une abscisse curviligne de Γ.

$$\begin{aligned} s'(t)^2 &= x'(t)^2 + y'(t)^2 \\ &= (-3a\sin t\cos^2 t)^2 + (3a\cos t\sin^2 t)^2 \\ &= 9a^2\sin^2 t\cos^4 t + 9a^2\cos^2 t\sin^4 t \\ &= 9a^2\sin^2 t\cos^2 t \end{aligned}$$

D'où $s'(t) = 3a\sin t\cos t$.

– D'après l'étude de la courbe, on sait que $l(\Gamma) = 8l(\Gamma_1)$ (on utilise la propriété d'additivité des longueurs), où Γ_1 est la courbe obtenue en faisant varier t entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} l(\Gamma_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3a\sin t\cos t dt \\ &= 3a\left[\frac{sin^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3a}{4} \end{aligned}$$

D'où $l(\Gamma) = 6a$

Développée de l'ellipse On considère l'ellipse d'équation, avec $a, b > 0$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

Rayon de courbure en un point D'après une remarque du plan, le rayon de courbure en un point M de coordonnées (x, y) s'exprime de la façon suivante :

$$\rho = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

Or pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} x'(t) = -a\sin t \\ y'(t) = b\cos t \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x''(t) = -a\cos t \\ y''(t) = -b\sin t \end{cases}$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} \\ &= \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab} \end{aligned}$$

Repère de Frenet en M Par définition $\vec{T} = \dfrac{d\vec{M}}{ds}$, d'où :

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{x'(t)}{s'(t)}\vec{i} + \frac{y'(t)}{s'(t)}\vec{j} \\ &= (-a\sin t\,\vec{i} + b\cos t\,\vec{j})(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Et par définition $\vec{N}$ est l'image de $\vec{T}$ par la rotation directe d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, d'où :

$$\vec{N} = (-b\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j})(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}$$

Centre de courbure associé à M Par définition le centre de courbure C vérifie l'équation $\vec{OC} = \vec{OM} + \rho\vec{N}$. Notons X et Y les coordonnées du centre de courbure dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors :

$$\begin{aligned} X &= a\cos t + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}(-b\cos t)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} \\ &= a\cos t + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab}(-b\cos t) \\ &= a\cos t - a\sin^2 t\cos t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t \\ &= a\cos t(1 - \sin^2 t) - \frac{b^2}{a}\cos^3 t \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Y &= b\sin t + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}(-a\sin t)(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}} \\ &= b\sin t + \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab}(-a\sin t) \\ &= b\sin t - \frac{a^2}{b}\sin^3 t - b\cos^2 t\sin t \\ &= \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t \end{aligned}$$

Développée Ainsi la développée vérifient les équations, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} X(t) = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t \\ Y(t) = \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'une astroïde et si on souhaite se ramener au cas particulier de l'astroïde à un seul paramètre, on doit résoudre : $b(a^2 - b^2) = -a(a^2 - b^2)$. Ainsi on distingue alors deux cas et on trouve que soit $a = b$, soit $a = -b$. Or le deuxième cas est impossible car pour l'ellipse on a choisi des coefficients strictement positifs, d'où $a = b$, ainsi l'astroïde à un seul paramètre est la développée d'un cercle.

Références

[Mon00] Jean-Marie Monier. *Géométrie MP, PSI, PC, PT*. Dunod, 2000.