Théorème de Banach-Steinhaus et application aux séries de Fourier

Référence : [Gou08] p.404-406.

Théorème 0.1 (de Banach-Steinhaus) *Soit E un espace de Banach. Soit F un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.*
Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$, alors :
- *soit $(|||f|||)_{f\in H}$ est borné ;*
- *soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.*

Démonstration Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega_k = \{x \in E, \sup_{f\in H} \|f(x)\| > k\}$.
$\rightsquigarrow$ L'ensemble Ω_k est ouvert. En effet, si $x_0 \in \Omega_k$ alors il existe $f \in H$ tel que $\|f(x_0)\| > k$. Comme f est continue alors $\exists \rho > 0$ tel que $\|f(x)\| > k$ pour $\|x - x_0\| < \rho$. Donc la boule $B(x_0,\rho)$ est contenue dans chaque Ω_k.
$\rightsquigarrow$ Si chaque Ω_k est dense dans E, alors E étant complet, le théorème de Baire assure que $\cap_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$ est dense dans E, en particulier non vide.
Ainsi si on choisit $x \in \cap_k\Omega_k$, on a alors $\sup_{f\in H} \|f(x)\| = +\infty$.
$\rightsquigarrow$ Sinon, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E. En d'autres termes : il existe $x_0 \in E$, $\exists \rho > 0$; $B(x_0,\rho) \cap \Omega_k = \emptyset$; de sorte que $\forall x \in B(x_0,\rho)$, $\sup_{f\in H} \|f(x)\| \leq k$.
On en déduit que $\forall x \in B(0,\rho)$, $\forall f \in H$:

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x + x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq 2k$$

car $x_0 \in B(x_0,\rho)$ et $x + x_0 \in B(x_0,\rho)$ (car $\|x + x_0 - x_0\| = \|x\| \leq \rho$ car $x \in B(0,\rho)$).
Par continuité de chaque $f \in H$, cette inégalité reste vraie sur la boule fermée $B_f(0,\rho)$.
Ainsi $\forall f \in H$, $\forall x \in E$; $\|x\| = 1$, on a :

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}$$

donc $\forall f \in H$, $|||f||| \leq \dfrac{2k}{\rho}$. D'où le résultat.

Corollaire 0.1.1 (Application aux séries de Fourier) *Il existe des fonctions continues différentes de leur série de Fourier.*

On note $C^0_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodique et continue.
Pour tout $f \in C^0_{2\pi}$, on note $\forall p \in \mathbb{Z}$:

$$c_p(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ipt}dt$$

les coefficients de Fourier de f.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application :

$$\begin{aligned} l_n : C^0_{2\pi} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \sum_{p=-n}^{n} c_p(f) \end{aligned}$$

On munit $C^0_{2\pi}$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{-\pi\leq t\leq\pi} \|f(t)\|$.
Montrons que l_n est une application linéaire continue et déterminons sa norme, puis concluons en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus.

Démonstration $\rightsquigarrow$ Montrons que l_n est linéaire.
Soient $f, g \in C^0_{2\pi}$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} l_n(\lambda f + g) &= \sum_{p=-n}^{n} c_p(\lambda f + g) \\ &= \sum_{p=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda f(t) + g(t)) e^{-ipt} dt \\ &= \lambda c_p(f) + c_p(g) \end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale.
$\rightsquigarrow$ On rappelle que :

$$\sum_{p=-n}^{n} e^{ipt} = \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}} = D_n(t)$$

$\rightsquigarrow$ Montrons que f est continue.
On a par définition et par interversion somme finie, intégrale sur un segment :

$$l_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(t) dt$$

Donc :

$$|l_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

Donc l_n est bien continue et on sait même que sa norme vérifie l'inégalité :

$$|||l_n||| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

$\rightsquigarrow$ Déterminons la norme de l_n.
Soit $\epsilon > 0$, on définit une fonction de $C^0_{2\pi}$ par :

$$\begin{aligned} f_\epsilon : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \epsilon} \end{aligned}$$

On a $\|f_\epsilon\| \leq 1$ par définition de f_ϵ et grâce au théorème de convergence dominée, on obtient :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0, \epsilon > 0} |l_n(f_\epsilon)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

Ainsi :

$$|||l_n||| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$$

$\rightsquigarrow$ Conclusion
On sait que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin\frac{t}{2}| \leq |\frac{t}{2}|$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|||l_n||| \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)\frac{t}{2})}{\sin\frac{t}{2}} \right| dt \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$$

via le changement de variable $t \longmapsto \dfrac{2t}{2n+1}$ et par parité de D_n.
Or $\int_0^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}| dt$ diverge, car :

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{n\pi} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{n\pi}$$

et en sommant cette relation sur n, on trouve la divergence car on retrouve la série harmonique !
On en déduit donc que $|||l_n||| \longrightarrow +\infty$.
De plus, l'espace $C^0_{2\pi}$ est complet (car fermé de l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est complet) et on peut donc lui appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui entraîne qu'il existe une fonction $f \in C^0_{2\pi}$ telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |l_n(f)| = +\infty$.
Autrement dit, la série de Fourier de f en 0 diverge. La fonction f est donc différente de sa série de Fourier.

Lemmes utilisés

Définition 0.1 (Espace de Baire) *On dit qu'un espace métrique (E, d) est un espace de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E, ie si pour toute suite d'ouverts $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overline{\mathcal{O}_n} = E$, on a $\overline{\cap_n \mathcal{O}_n} = E$.*

Théorème 0.2 (de Baire) *Tout espace métrique complet est un espace de Baire.*

Démonstration Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(\mathcal{O}_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans E. Pour montrer que $\cap_n \mathcal{O}_n$ est dense dans E, il faut montrer que pour tout ouvert V non vide de E,

$$V \cap (\cap_n \mathcal{O}_n) \neq \emptyset$$

Donnons-nous donc un ouvert non vide V de E.
Par récurrence, on va construire une suite B_n de boules fermées de E telles que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, B_n est une boule fermée de rayon non nul et inférieur à $\dfrac{1}{2^n}$;
2. $B_0 \subset \mathcal{O}_0 \cap V$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset \mathcal{O}_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$.

L'ouvert $\mathcal{O}_0$ est dense dans E, donc $\mathcal{O}_0 \cap V \neq \emptyset$. Or $\mathcal{O}_0 \cap V$ est un ouvert, il existe donc une boule ouverte $B(x_0, r)$ incluse dans $\mathcal{O}_0 \cap V$. Si B_0 est la boule fermée de centre x_0 et de rayon $\inf\{\frac{r}{2}, 1\}$, on a $B_0 \subset \mathcal{O}_0 \cap V$.
Supposons les boules $B_0, \ldots, B_n$ construites et vérifiant (1) et (2). L'ouvert $\mathcal{O}_{n+1}$ est dense dans E, donc $\mathcal{O}_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$ est un ouvert non vide. Il existe donc une boule ouverte $B(x, r)$ incluse dans $\mathcal{O}_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$. Si B_{n+1} désigne la boule fermée de centre x et de rayon $\inf\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2^{n+1}}\}$, on a bien $B_{n+1} \subset \mathcal{O}_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$. D'où B_{n+1} vérifie (1) et (2).
Par construction, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de E dont le diamètre tend vers 0.
De plus E est complet, il existe donc $x \in E$ tel que $\cap_n B_n = \{x\}$ (cf le lemme qui suit).
Or $B_0 \subset V$, donc $x \in V$. Et d'après la condition (2), on a aussi $B_n \subset \mathcal{O}_n$ pour tout n, donc $x \in \mathcal{O}_n$ pour tout n.
Ainsi $x \in \cap_n \mathcal{O}_n$. Finalement, on a prouvé que V et $\cap_n \mathcal{O}_n$ ont au moins un point commun, d'où le résultat.

Lemme 0.1 *Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de E telle que le diamètre de F_n tend vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$. Alors il existe $x \in E$ tel que $\cap_n F_n = \{x\}$.*

Démonstration Notons $\Gamma = \cap_n F_n$.
$\rightsquigarrow$ $\Gamma \neq \emptyset$. En effet, choisissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ un point x_n dans F_n. Le fait que le diamètre de F_n tende vers 0 entraîne que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy (en effet si $\epsilon > 0$, si N est choisi tel que le diamètre de F_N soit inférieur strict à ϵ, alors pour tout $p, q > N$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$ car $x_p, x_q \in F_N$), donc converge dans E puisque E est complet.
Comme les F_p sont fermés et que $x_n \in F_p$ lorsque $n \geq p$, la limite l de (x_n) appartient à F_p pour tout p, donc à Γ.
$\rightsquigarrow$ Enfin, le fait que le diamètre de F_n tende vers 0 montre que Γ a au plus un élément d'où le résultat.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2008.