# Théorème de Brouwer en dimension 2

Références : [GT98] p.22-23, [Rou09] p.175-178 ([Gou08]).

Soit $\mathbb{D}^1$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ (ie le disque unité). Soit $\mathbb{S}^1$ la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ (ie le cercle unité). On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

**Théorème 0.1 (de Brouwer en dimension 2)** *Toute application de $\mathbb{D}^1$ dans $\mathbb{D}^1$ admet au moins un point fixe.*

**Démonstration**

**Étape 1 : Lemme de non-rétraction de Brouwer**

**Lemme 0.1 (de non-rétraction de Brouwer)** *Il n'existe pas de fonction continue de $\mathbb{D}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ dont la restriction à $\mathbb{S}^1$ soit l'identité.*

Nous allons montrer mieux que cela : Soit $f : \mathbb{D}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue dont la restriction à $\mathbb{S}^1$ est impaire.
$\rightsquigarrow$ Montrons que $f$ s'annule dans $\mathbb{D}^1$.
Par l'absurde, supposons que $f$ ne s'annule pas dans $\mathbb{D}^1$.
• Comme $\mathbb{D}^1$ est étoilé (par rapport à son centre 0 par exemple) et est un compact non vide de $\mathbb{C}$, alors d'après le lemme qui suit, on sait que les ensembles :
 – $C_{\mathbb{D}^1}$ le groupe multiplicatif des fonctions continues de $\mathbb{D}^1$ dans $\mathbb{C}$ et
 – $E_{\mathbb{D}^1}$ le sous-groupe des exponentielles de fonctions continues de $\mathbb{D}^1$ dans $\mathbb{C}^*$
sont égaux.
Ainsi il existe $g : \mathbb{D}^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f = e^g$.
• Comme la restriction de $f$ à $\mathbb{S}^1$ est impaire, alors pour tout $z \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$\begin{aligned} -1 = f(z)\frac{1}{-f(z)} &= f(z)\frac{1}{f(-z)} \\ &= e^{g(z)}\frac{1}{e^{g(-z)}} \\ &= e^{g(z)-g(-z)} \end{aligned}$$

• La connexité de $\mathbb{S}^1$ garantit alors l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{S}^1$, on a :

$$g(z) - g(-z) = (2k+1)i\pi$$

En effet, si on résout l'équation $e^z = -1$ avec $z \in \mathbb{C}$, on a qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $z = x + iy$, donc l'équation se réécrit : $e^x e^{iy} = -1$. Maintenant en étudiant le module et l'argument de chaque membre de l'équation, on en déduit que :

$$\begin{aligned} |e^z| = e^x &= |-1| = 1 \\ arg(e^z) = y &= arg(-1) = (2k+1)\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

D'où $x = 0$ et $y = (2k+1)\pi$, ainsi $z = (2k+1)i\pi$.
• Or la fonction $\phi : z \in \mathbb{S}^1 \longmapsto g(z) - g(-z)$ est impaire, en effet :

$$-\phi(-z) = -(g(-z) - g(z)) = -g(-z) + g(z) = \phi(z)$$

Et l'imparité de cette fonction contredit l'égalité $g(z) - g(-z) = (2k+1)i\pi$ pour tout $z \in \mathbb{S}^1$, donc on aboutit à une contradiction, ainsi la fonction $f$ s'annule dans $\mathbb{D}^1$.
• On en déduit le lemme de non-rétraction de Brouwer, car s'il existait une fonction continue de

$\mathbb{D}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ dont la restriction à $\mathbb{S}^1$ serait l'identité, alors cette fonction restreinte à $\mathbb{S}^1$ est en particulier impaire, par conséquent d'après ce qu'on vient de montrer elle s'annule dans $\mathbb{D}^1$ et ceci est impossible car $f$ est à valeurs dans $\mathbb{S}^1$ (qui est le cercle unité, donc il n'y pas 0 dessus !).

$\rightsquigarrow$ Montrons le lemme que nous venons d'utiliser.

**Lemme 0.2** *Soit $K$ un compact non vide de $\mathbb{C}$. Alors :*

1. *$E_K$ est un ouvert de $C_K$ ;*
2. *$E_K$ est la composante connexe de la fonction constante égale à 1 dans $C_K$ ;*
3. *Si $K$ est étoilé, alors $E_K = C_K$.*

•(1) Soit $f = e^g \in E_K$, ie $g : K \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.
Soit $\tilde{f}$ une fonction de $C_K$ appartenant à la boule de centre $f$ et de rayon $\inf_K |f(z)|$, ie $\tilde{f} \in B(f, \inf_K |f(z)|)$, alors :

$$\|\tilde{f} - f\|_\infty < \inf_K |f(z)|$$

D'où :

$$\left\| \frac{\tilde{f}}{f} - 1 \right\|_\infty = \left\| \frac{1}{f}(\tilde{f} - f) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{1}{f} \right\|_\infty \|\tilde{f} - f\|_\infty \leq \frac{1}{\inf_K |f(z)|} \|\tilde{f} - f\|_\infty < 1$$

d'où $\dfrac{\tilde{f}}{f} = e^h$ (car d'après l'inégalité ci-dessus $\dfrac{\tilde{f}}{f} \in D(1,1)$ le disque de centre 1 et de rayon 1, ie $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, donc on peut considérer le logarithme de cette quantité, ie $h = L\left(\dfrac{\tilde{f}}{f}\right)$) et donc $\tilde{f} = e^{h+g} \in E_K$, d'où $E_K$ ouvert.
•(2) Montrons que $E_K$ est un fermé.
Comme $E_K$ est un sous-groupe de $C_K$, alors on peut considérer la relation d'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow fg^{-1} \in E_K$ et on sait que les classes de conjugaison de cette relation d'équivalence forment une partition de $C_K$, d'où :

$$C_K = \bigcup_{\{f \in C_K\}} fE_K = E_K \cup \bigcup_{\{f \in C_K, f \neq id\}} fE_K$$

Ainsi :

$$C_K \setminus E_K = \bigcup_{\{f \in C_K, f \neq id\}} fE_K$$

Or si on considère l'application pour $f \in E_K$ et $f \neq id$ :

$$\begin{aligned} \phi_f : E_K &\longrightarrow fE_K \\ g &\longmapsto fg \end{aligned}$$

c'est un homéomorphisme, donc $E_K$ est un ouvert car image réciproque par $\phi_f^{-1}$ de $E_K$.
Donc $C_K \setminus E_K$ est un ouvert car réunion d'ouverts, d'où $E_K$ fermé.
• Montrons que $E_K$ est connexe par arcs (donc connexe).
On considère le chemin $\gamma : t \in [0,1] \longrightarrow e^{tf}$, c'est un chemin reliant 1 à $e^f$ dans $C_K$ donc $E_K$ est connexe par arcs.
• Montrons que $E_K$ est la composante connexe de la fonction constante égale à 1.

- $E_K$ est connexe et $E_K$ contient la fonction constante égale à 1 (car $1 = e^0$), donc $E_K$ est inclus dans la composante connexe de la fonction constante égale à 1 ;
- $E_K$ est contenu dans la composante connexe de la fonction constante égale à 1 et $E_K$ est ouvert et fermé, donc $E_K$ est la composante connexe de la fonction constante égale à 1.

•(3) Supposons $E_K$ étoilé et montrons qu'alors $E_K = C_K$.
On peut supposer que $K$ est étoilé en 0 pour simplifier la suite.
Soit $f \in C_K$. Montrons que $f \in E_K$ (on sait déjà que $E_K \subset C_K$).
Pour $0 \leq t \leq 1$, soit :

$$\begin{aligned} f_t : K &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto f(tz) \end{aligned}$$

Alors la fonction : $t \in [0,1] \longmapsto f_t$ est un chemin reliant $z \longmapsto f(0)$ à $f$ dans $C_K$. La connexité de $\mathbb{C}^*$ garantit alors l'existence d'un chemin de $\mathbb{C}^*$ (qui est homéomorphe à l'espace des fonctions constantes non nulles) reliant 1 et $f(0)$, donc comme $E_K$ est la composante connexe de la fonction constante égale à 1, alors $f \in E_K$ car il est relié à cette fonction constante égale à 1.

**Étape 2 : corps de la démonstration** Par l'absurde, soit $\phi : \mathbb{D}^1 \longrightarrow \mathbb{D}^1$ une fonction continue et sans point fixe.
À tout $z \in \mathbb{D}^1$, on associe $r(z)$ le point d'intersection de $\mathbb{S}^1$ et de la demi-droite d'origine $\phi(z)$ et passant par $z$. $r(z)$ s'obtient alors en résolvant le système :

$$\begin{aligned} r(z) &= \lambda(z-\phi(z))+\phi(z) = \lambda z + (1-\lambda)\phi(z) \quad \text{pour } \lambda > 0\,; \\ \|r(z)\|^2 &= 1 \end{aligned}$$

ie

$$\|\lambda(z-\phi(z))+\phi(z)\|^2 - 1 = 0$$

Développons la norme pour trouver une équation de degré 2 en $\lambda$ :

$$\lambda^2\|z-\phi(z)\|^2 + 2\lambda < z-\phi(z), \phi(z) > + \|\phi(z)\|^2 - 1 = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = 4\,(< z-\phi(z), \phi(z) >)^2 - 4\|z-\phi(z)\|^2(\|\phi(z)\|^2 - 1)$$

Or pour $z \in \mathbb{D}^1$, on a $\phi(z) \in \mathbb{D}^1$, donc le discriminant est strictement positif. Ainsi $\lambda$ est la racine positive de cette équation du second degré, elle s'écrit :

$$\lambda = \frac{- < z-\phi(z), \phi(z) > + \sqrt{\Delta}}{2\|z-\phi(z)\|^2}$$

Ainsi la fonction $z \longmapsto \lambda(z)$ est continue, donc la fonction $z \longmapsto r(z)$ aussi.
De plus, la restriction de $r$ à $\mathbb{S}^1$ est l'identité, donc d'après le lemme de non-rétraction de Brouwer, on aboutit à une contradiction quand à l'existence de la fonction $r$, donc $\phi$ admet au moins un point fixe.

**Trucs utilisés**

**Définition 0.1 (Partie étoilée)** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Une partie $A$ de $E$ est dite étoilée s'il existe $P \in A$ tel que pour tout $M \in A$, le segment $[P, M] \subset A$ (on dit alors que $A$ est étoilée par rapport à $P$). Un tel point $P$ s'appelle un centre de $A$.*

**Proposition 0.2** *Toute partie étoilée est connexe.*

**Démonstration** Par définition de la connexité.

**Proposition 0.3** *Une partie ouverte et fermée et contenue dans une composante connexe est la composante connexe elle-même.*

# Références


[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2008.

[GT98] Stéphane Gonnord and Nicolas Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle.* Ellipses, 1998.

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.* Cassini, 2009.