Théorème de Fischer-Riesz

Référence : [Bre05] p.57-58.

Théorème 0.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.*

Démonstration

Cas 1 : $p = +\infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\Omega)$, alors par définition de suite de Cauchy, on a, étant donné un entier $k \geq 0$,

$$\exists N_k \in \mathbb{N}; \forall n, m \geq N_k; \| f_m - f_n \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$$

Donc il existe E_k négligeable tel que $\forall n, m \geq N_k$, $\forall x \in \Omega \setminus E_k$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{1}$$

par définition de la norme $\| \,.\, \|_{L^\infty}$.
Ainsi en posant $E = \cup_k E_k$ (E est donc négligeable), on voit que $\forall x \in \Omega \setminus E$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Or $\mathbb{R}$ est un espace complet, il existe donc une fonction f telle que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ pour tout $x \in \Omega \setminus E$.
Ainsi en passant à la limite dans (1) quand $m \longrightarrow +\infty$, on obtient que $\forall n \geq N_k$, $\forall x \in \Omega \setminus E$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

Par conséquent, on en déduit que $f \in L^\infty(\Omega)$, en effet :

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + \| f_n \|_{L^\infty}$$

Et donc $\forall n \geq N_k$:

$$\| f - f_n \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$$

Par conséquent $\| f - f_n \|_{L^\infty} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Cas 2 : $1 \leq p < +\infty$. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Pour démontrer que $L^p(\Omega)$ est complet, il suffit d'exhiber une sous-suite convergente dans $L^p(\Omega)$.
Extrayons alors une sous-suite $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ telle que $\forall k \geq 1$:

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}$$

Pour construire une telle sous-suite, on procède par récurrence de la façon suivante :

– on choisit $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq n_1$:

$$\| f_m - f_n \|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$$

(on sait qu'il existe un tel indice car la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy).

– on choisit ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que $\forall n, m \geq n_2$:

$$\| f_m - f_n \|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$$

– et ainsi de suite.
Montrons maintenant que la suite $(f_{n_k})_k$ converge dans $L^p(\Omega)$.
On pose pour ce faire :

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

Alors on a $g_m \in L^p(\Omega)$ (car somme de fonctions dans $L^p(\Omega)$) et $\| g_m \|_{L^p} \leq 1$, en effet :

$$\| g_m \|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{m} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(\frac{1}{2})^{m+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \leq 1$$

par inégalité triangulaire de la norme $\| \, . \, \|_{L^p}$ et par l'inégalité sur la sous-suite.
On en déduit, comme $(g_m)_m$ est une suite croissante de fonctions L^p et que $\| g_m \|_{L^p} < +\infty$ d'après le théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Lévy) que $g_m(x)$ converge presque partout vers une limite finie $g(x)$ avec $g \in L^p(\Omega)$ et telle que $\| g_m - g \|_{L^p} \longrightarrow 0$.
D'autre part, on a pour tout $p, q \geq 2$:

$$|f_{n_p}(x) - f_{n_q}(x)| \leq |f_{n_p}(x) - f_{n_{p-1}}(x)| + \ldots + |f_{n_{q+1}}(x) - f_{n_q}(x)| \leq g(x) - g_{q-1}(x)$$

Donc presque partout sur Ω, la suite $(f_{n_k}(x))_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}$ étant complet, elle converge donc vers une limite que l'on notera $f(x)$.
On a si on fait tendre p vers l'infini dans la relation précédente, que pour tout $q \geq 2$:

$$|f(x) - f_{n_q}(x)| \leq g(x)$$

(car $g_m(x)$ est positive puisque somme de valeurs absolues).
Ainsi pour tout $q \geq 2$:

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_q}(x)| + |f_{n_q}(x)|$$

Et $|f(x) - f_{n_q}(x)| \longrightarrow 0$ d'où $|f(x)| \leq |f_{n_q}(x)|$, donc $\| f \|_{L^p} \leq \| f_{n_q} \|_{L^p}$, donc $f \in L^p(\Omega)$.
Enfin pour presque tout x, on sait que :

$$|f(x) - f_{n_q}(x)|^p \longrightarrow 0$$

et que :

$$|f_{n_q}(x)| \leq |f(x) - f_{n_q}(x)| + |f(x)| \leq g(x) + |f(x)|$$

qui fournit un majorant intégrable (puisque somme de deux fonctions L^p), donc d'après le théorème de convergence dominée (ou théorème de Lebesgue), on sait que $\| f - f_{n_p} \|_{L^p} \longrightarrow 0$.

Lemmes utilisés et rappels

Définition 0.1 (Espace L^p pour $p < +\infty$) *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p < \infty$. On pose :*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

On note :

$$\| f \|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

la norme sur l'espace $L^p(\Omega)$.

Définition 0.2 (Espace L^∞) *On pose :*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \textit{ mesurable et il existe une constante } C \textit{ telle que} |f(x)| \leq C \textit{ presque partout sur } \Omega\}$$

On note :

$$\| f \|_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \textit{ presque partout sur } \Omega\}$$

la norme associée à l'espace $L^\infty(\Omega)$.

Lemme 0.1 (Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Lévi) *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions L^1 telle que $\sup_n \int f_n < +\infty$.*
Alors $f_n(x)$ converge presque partout sur Ω vers une limite finie notée $f(x)$; de plus $f \in L^1(\Omega)$ et $\| f_n - f \|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Lemme 0.2 (Théorème de convergence dominée) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction L^1. On suppose que :*

1. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *presque partout sur* Ω *;*
2. *il existe une fonction* $g \in L^1$ *telle que pour chaque* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *presque partout sur* Ω.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\| f_n - f \|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Lemme 0.3 *Une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence converge vers cette unique valeur d'adhérence.*

Références

[Bre05] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 2005.