Formule d'inversion de Fourier

Références : [QZ06] p.331-332 ([Gou08] et [Bre05]).

On considère l'espace de Schwartz :

$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, \exists C_{p,q} > 0 : |x^p f^{(q)}(x)| \leq C_{p,q}, \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Théorème 0.1 *Soit $f \in S(\mathbb{R})$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx$$

Démonstration Soit $\epsilon > 0$, on remarque que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} e^{-\epsilon t^2} dt$$

Comme :

- la fonction $g_\epsilon : t \longmapsto e^{itx} e^{-\epsilon t^2} \widehat{f}(t)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, en effet :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{itx} e^{-\epsilon t^2} \widehat{f}(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2} |\widehat{f}(t)| dt$$

  et comme $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$, alors on a bien l'intégrabilité de g_ϵ.
- la fonction g_ϵ converge quand $\epsilon \longrightarrow 0$ vers la fonction $g : t \longmapsto e^{itx} \widehat{f}(t)$.
- on a la majoration pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|e^{itx} e^{-\epsilon t^2} \widehat{f}(t)| \leq |\widehat{f}(t)| \in L^1(\mathbb{R})$$

Alors d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} e^{-\epsilon t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\epsilon t^2} \widehat{f}(t) dt$$

Ainsi par définition de la fonction $\widehat{f}$, on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \epsilon t^2} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \epsilon t^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ity} f(y) dy \right) dt$$

Comme :

- pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{itx - \epsilon t^2} e^{-ity} f(y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2} |f(y)| dy < +\infty$$

  car $f \in S(\mathbb{R})$.
- et :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |e^{itx - \epsilon t^2} e^{-ity} f(y)| dy \right) dt \leq \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2} \int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy dt < +\infty$$

  car $f \in S(\mathbb{R})$ et la fonction $e^{-\epsilon t^2}$ est intégrable.

Alors d'après le théorème de Fubini-Tonelli, on sait que la fonction $F : (t,y) \longmapsto e^{itx-\epsilon t^2} e^{-ity} f(y)$ est intégrable par rapport à la mesure produit et qu'on a l'interversion :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx-\epsilon t^2} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it(y-x)} e^{-\epsilon t^2} dt \right) dy$$

Déterminons alors pour $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante :

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-\epsilon t^2} dt$$

Comme :
- la fonction $t \longmapsto e^{-itx} e^{-\epsilon t^2}$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- la fonction $x \longmapsto e^{-itx} e^{-\epsilon t^2}$ est dérivable de dérivée : $x \longmapsto -ite^{-itx} e^{-\epsilon t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|-ite^{-itx} e^{-\epsilon t^2}| \leq |t| |e^{-\epsilon t^2}| \in L^1(\mathbb{R})$$

Alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on a :

$$I'(x) = \int_{\mathbb{R}} -ite^{-itx} e^{-\epsilon t^2} dt$$

On effectue une intégration par parties avec les fonctions :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto e^{-itx} \\ v : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{e^{-\epsilon t^2}}{2\epsilon} \end{aligned}$$

Alors, on a :

$$I'(x) = -i \left[e^{-itx} \frac{e^{-\epsilon t^2}}{2\epsilon} \right]_{\mathbb{R}} + i \int_{\mathbb{R}} -ixe^{-itx} \frac{e^{-\epsilon t^2}}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} \int_{\mathbb{R}} xe^{-itx} e^{-\epsilon t^2} dt = \frac{x}{2\epsilon} I(x)$$

Ainsi l'intégrale I vérifie l'équation différentielle $y'(x) = \dfrac{x}{2\epsilon} y(x)$, dont les solutions sont de la forme :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

De plus, comme :

$$I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\epsilon t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}}$$

D'où

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}} e^{\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

Ainsi, si on remplace cette expression dans l'intégrale, on trouve :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx-\epsilon t^2} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{4\epsilon}} dy$$

On effectue maintenant le changement de variable :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto x + 2\sqrt{\epsilon} y \end{aligned}$$

alors on obtient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx-\epsilon t^2} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x + 2\sqrt{\epsilon} y) e^{-y^2} dy$$

Ré-appliquons le théorème de convergence dominée, comme :
- la fonction $g_\epsilon : y \longmapsto e^{-y^2} f(x + 2\sqrt{\epsilon} y)$ est intégrable car $f \in S(\mathbb{R})$;
- la fonction g_ϵ converge simplement vers la fonction $g : y \longmapsto e^{-y^2} f(x)$;

– pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|e^{-y^2} f(x + 2\sqrt{\epsilon} y)| \leq \|f\|_\infty |e^{-y^2}| \in L^1(\mathbb{R})$$

car $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, car $f \in S(\mathbb{R})$.

Alors d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \epsilon t^2} \widehat{f}(t) dt = f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = f(x)$$

D'où :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widehat{f}(t) dt$$

Lemmes utilisés

Théorème 0.2 (de convergence dominée) *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que :*

- *les f_n appartiennent à $L^1(\Omega)$;*
- *$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ presque partout sur Ω ;*
- *il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur Ω.*

Alors $f \in L^1(\Omega)$, $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$ et on a l'interversion :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_\Omega f_n(x) dx = \int_\Omega f(x) dx$$

Théorème 0.3 (de Fubini-Tonelli) *On suppose que :*

- *pour presque tout $x \in \Omega_1$:*

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy < +\infty$$

- *et que :*

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |F(x,y)| dy dx < +\infty$$

Alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et on a l'interversion :

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x,y) dy dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x,y) dx dy$$

Théorème 0.4 (de dérivation sous le signe intégral) *Soit E une espace vectoriel normé complet. Soit I, A deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \in A \times I \longmapsto f(x,t) \in E$. On suppose que :*

- *pour tout $x \in A$, l'application $t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *f admet une dérivée partielle selon x, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant :*
  - *pour tout $x \in A$, l'application $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
  - *pour tout $t \in I$, l'application $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A ;*
  - *il existe une fonction positive ϕ, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\| \leq \phi(t)$ pour tout $x \in A$.*

Alors l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : A &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \int_I f(x,t) dt \end{aligned}$$

est C^1 sur A et on a pour tout $x \in A$:

$$\Phi'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$$

Proposition 0.5 *Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in S(\mathbb{R})$.*

Démonstration En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral pour montrer que $\widehat{f}$ est C^∞, puis en montrant par récurrence sur p qu'il existe une fonction $g_{p,q} \in S(\mathbb{R})$ telle que :

$$t^p \widehat{f}^{(q)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g_{p,q}(x) dx$$

Proposition 0.6 (Intégrale de Gauss)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Démonstration On pose :

$$\begin{aligned} g : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

On considère la fonction :

$$\begin{aligned} [0, +\infty] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} \end{aligned}$$

Cette fonction admet une dérivée partielle par rapport à x continue, d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (on peut vérifier toutes les hypothèses), on a que g est dérivable et que pour tout $x \geq 0$:

$$g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} dt$$

Ainsi, en effectuant le changement de variable $t \longmapsto \frac{t}{x}$, on obtient :

$$g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = -2f'(x)f(x)$$

où :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

En intégrant la relation précédente, on en déduit que pour tout $x \geq 0$:

$$g(x) - g(0) = -(f(x)^2 - f(0)^2)$$

Donc $g(x) = \frac{\pi}{4} - (f(x))^2$ car $g(0) = \frac{\pi}{4}$ et $f(0) = 0$.
Or les inégalités :

$$0 \leq g(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

entraînent que $g(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$ et la fonction f étant positive, on en déduit que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par parité, on en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Références

[Bre05] Haim Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Dunod, 2005.

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2008.

[QZ06] Hervé Queffelec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod, 2006.