Composantes connexes des formes quadratiques

Références : [FGN10] p.214-215 ([MT09]).

Proposition 0.1 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E et $\Omega(E)$ le sous-ensemble des formes quadratiques non dégénérées. Alors les composantes connexes de $\Omega(E)$ sont les $\Omega_k(E)$, ie les formes quadratiques non dégénérées de signature $(k, n-k)$.*

Démonstration

Étape 1 Montrons que $\Omega(E)$ est un ouvert de $Q(E)$.
On choisit une base de E. Alors $Q(E)$ s'identifie à $S_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles (via la forme polaire associée à une forme quadratique) et $\Omega(E)$ au sous-ensemble formé des matrices symétriques inversibles (car une forme quadratique est non dégénérée si et seulement si la matrice de sa forme polaire a un noyau réduit à $\{0\}$, ce qui est équivalent en dimension finie à la bijectivité de la dite forme polaire).
Comme la fonction déterminant est continue et que $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ alors $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert et donc $S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ est donc un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$ par définition d'un ouvert pour la topologie induite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$.

Étape 2 Soit $q \in \Omega(E)$. Montrons qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G de E et qu'il existe $k > 0$ (réel) tels que :

$$\forall x \in F, \quad q(x) \geq k\|x\|^2 \quad \text{et} \quad \forall x \in G, \quad q(x) \leq -k\|x\|^2$$

Notons (r, s) la signature de q. Comme q est non dégénérée, on a $r + s = n$.
Ainsi en se plaçant dans une base q-orthogonale pour E (ie orthogonale pour la forme polaire associée à q), il existe deux sous-espaces supplémentaires F et G de dimensions respectives r et s tels que q soit définie positive sur F et définie négative sur G.
Montrons maintenant que ces sous-espaces conviennent.
La restriction de q à F étant définie positive, la fonction $\sqrt{q}$ est une norme sur F (on peut vérifier les axiomes de la norme). Comme F est de dimension finie, cette norme est équivalente à la restriction de la norme de E sur F. Ce qui signifie, en particulier, qu'il existe $k_1 > 0$ tel que pour tout $x \in F$:

$$\sqrt{q(x)} \geq k_1\|x\|$$

Ainsi pour tout $x \in F$:

$$q(x) \geq k_1^2\|x\|^2$$

De la même façon, on définit sur G une norme équivalente à la restriction à G de celle sur E, donc il existe $k_2 > 0$ tel que pour tout $x \in G$:

$$\sqrt{-q(x)} \geq k_2\|x\|$$

Ainsi pour tout $x \in G$:

$$q(x) \leq -k_2^2\|x\|^2$$

On pose alors $k = \min(k_1^2, k_2^2)$ pour conclure cette étape.

Étape 3 Montrons qu'il existe une norme N sur $Q(E)$ telle que si $q' \in Q(E)$ est tel que $N(q-q') < k$ alors q' a la même signature que q.
Nous allons montrer que si q' est assez proche de q, elle va rester définie positive sur F et définie négative sur G et donc sera de même signature que q.
Pour $q' \in Q(E)$, posons :

$$N(q') = \sup_{\|x\|=1} |q'(x)|$$

Ceci défini une norme sur $Q(E)$. Par homogénéité, on a pour tout $x \in E$:

$$|q'(x)| \leq N(q')\|x\|^2$$

Soit alors $q' \in Q(E)$ telle que $N(q-q') < k$. On a donc pour tout $x \neq 0$:

$$|q(x) - q'(x)| < k\|x\|^2$$

Par conséquent, on a pour tout $x \in E$:

$$q(x) - q'(x) < k\|x\|^2 \quad \text{et} \quad q'(x) - q(x) < k\|x\|^2$$

Ainsi si $x \in F \setminus \{0\}$, on a par la première inégalité et d'après l'étape 2 :

$$q'(x) > q(x) - k\|x\|^2 \geq 0$$

Et si $x \in G \setminus \{0\}$, d'après la deuxième inégalité et l'étape 2 on a :

$$q'(x) < q(x) + k\|x\|^2 \leq 0$$

Donc q' est définie positive sur F et définie négative sur G. Sa signature est donc la même que celle de q.

Conclusion Déduisons-en les composantes connexes de $\Omega(E)$.
Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, notons $\Omega_k(E)$ l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signatures $(k, n-k)$.
D'après l'étape 3, on sait que les $\Omega_k(E)$ sont ouverts (par définition d'un ouvert, ie contient une boule ouverte). Ils forment par ailleurs une partition de $\Omega(E)$.
Montrons que les $\Omega_k(E)$ sont connexes matriciellement.
Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ de signatures $(k, n-k)$. Alors comme A et B appartiennent à $S_n(\mathbb{R})$, on sait qu'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$A = {}^tPD_kP \quad \text{et} \quad B = {}^tQD_kQ$$

où D_k est la matrice diagonale contenant k coefficients 1 et $n-k$ coefficients -1.
Supposons que P et Q sont de déterminant strictement positif (quitte à changer en son opposée la première ligne de P ou Q).
Comme l'ensemble des matrices inversibles réelles de déterminant positif est connexe par arc, on peut trouver un chemin continue $t \in [0,1] \longmapsto \gamma(t)$ tel que $\gamma(0) = P$ et $\gamma(1) = Q$. Ainsi l'application $t \in [0,1] \longmapsto {}^t\gamma(t)D_k\gamma(t)$ est un chemin continue formé des matrices symétriques de signature $(k, n-k)$ et joignant A à B. D'où la connexité de $\Omega_k(E)$.
Pour finir, on a donc obtenue une partition de $\omega(E)$ en ouverts connexes, ces ouverts connexes sont donc les composantes connexes de $\Omega(E)$ (la réunion de deux de ces ensembles connexes ne peut pas être une composante connexe par définition de la connexité).

Résultats utilisés

Proposition 0.2 *Soit $q \in Q(E)$. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base q-orthogonale de E. On note $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et on note r le nombre de $a_i > 0$ et s celui de $a_i < 0$.*
Alors r est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de E sur lequel q est définie positive et s celui où q est définie négative. De plus (r, s) ne dépend pas de la base choisie.

Démonstration Quitte à permuter les vecteur de la base B, on peut supposer que $a_1, \ldots, a_r > 0$ et $a_{r+1}, \ldots, a_{r+s} < 0$ et que les autres a_i sont nuls.
Il est clair que la restriction de q au sous-espace vectoriel $Vect(e_1, \ldots, e_r)$ est définie positive. La dimension maximale d'un tel sous-espace est donc au moins égale à r.
Inversement, soit F un sous-espace de E sur lequel q est définie positive. Comme q est définie négative sur le sous-espace $Vect(e_{r+1}, \ldots, e_n)$, on est certain que F et G sont en somme directe, par conséquent $\dim F \leq n - \dim G = r$, d'où le résultat.
On raisonne de la même manière pour montrer que s est la dimension maximale du sous-espace sur lequel q est définie négative.
Ces dimensions sont intrinsèquement associées à q et ne dépendent donc pas de la base B orthogonale choisie.

Proposition 0.3 *$GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.*

Démonstration On procède par récurrence sur la dimension.
- Si $n = 1$, comme $GL_1^+(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}_+^*$ qui est connexe, on obtient la connexité de $GL_1^+(\mathbb{R})$.
- Supposons que $GL_{n-1}^+(\mathbb{R})$ soit connexe et montrons que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.
  Comme $GL_{n-1}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1}$ est connexe (comme produit de connexes) et le quotient $GL_n^+(\mathbb{R})/(GL_{n-1}^+(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui est connexe que $n \geq 2$, alors $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

Références

[FGN10] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 3*. Cassini, 2010.

[MT09] Rached Mneimné and Frédéric Testard. *Groupes de Lie classiques*. Hermann, 2009.