Critère de Weyl

Référence : [FGN09] p.47-49.

Théorème 0.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $[0,1]$.*
Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on pose $X_n(a,b) = card\{k \in [1,n], u_k \in [a,b]\}$.
Alors, on a équivalence entre :

1. $\dfrac{X_n(a,b)}{n} \longrightarrow b-a$ *pour tout* $0 \leq a \leq b \leq 1$ *;*
2. *pour toute fonction* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue,* $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \longrightarrow \int_0^1 f(t)dt$ *;*
3. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} \longrightarrow 0$.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $0 \leq a \leq b \leq 1$.

– On remarque tout d'abord que :

$$\frac{X_n(a,b)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a,b]}(u_k)$$

Et cette quantité d'après le (1) converge vers $b-a$, donc (2) est vérifiée pour les fonctions caractéristiques d'un segment, car $\int_0^1 \chi_{[a,b]}(t)dt = b-a$.

– Soit f une fonction en escalier sur $[0,1]$, alors f est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments et par linéarité, (2) est alors vérifiée pour les fonctions en escalier. En effet, si $f = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{[a_{j-1},a_j]}$ avec $c_j \in [a_{j-1}, a_j]$ et $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = 1$ une subdivision de $[0,1]$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{[a_{j-1},a_j]}(u_k)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{k=1}^{n} \chi_{[a_{j-1},a_j]}(u_k) \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{[a_{j-1},a_j]}(u_k) \\
&\longrightarrow \sum_{j=1}^{m} c_j (a_j - a_{j-1})
\end{aligned}$$

d'après (1).
Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{[a_{j-1},a_j]}(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j \int_0^1 \chi_{[a_{j-1},a_j]}(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^{m} c_j (a_j - a_{j-1})
\end{aligned}$$

d'où (2) pour les fonctions en escalier.

– Comme les fonctions en escaliers sur $[0,1]$ sont denses dans les fonctions continues sur $[0,1]$ alors si on considère une fonction $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, il va exister une suite $(g_n)_n \in \mathrm{Esc}([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\| g_n - f \|_\infty \longrightarrow 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) - \int_0^1 f\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) - \int_0^1 g_n + \int_0^1 g_n - \int_0^1 f\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (f(u_k) - g_n(u_k))\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) - \int_0^1 g_n\right| + \left|\int_0^1 (g_n - f)\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |f(u_k) - g_n(u_k)| + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) - \int_0^1 g_n\right| + \int_0^1 |g_n - f| \\
&\leq \| f - g_n \|_\infty \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n 1 + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) - \int_0^1 g_n\right| + \| g_n - f \|_\infty \int_0^1 1dt \\
&\leq 2 \| g_n - f \|_\infty + \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) - \int_0^1 g_n\right|
\end{aligned}$$

Or comme $g_n \in \mathrm{Esc}([0,1];\mathbb{R})$ alors d'après le point précédent g_n vérifie (2) donc pour tout $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g_n(u_k) - \int_0^1 g_n\right| < \epsilon$. De plus $\| g_n - f \|_\infty \longrightarrow 0$, d'où le résultat.

Remarque : (2) reste vraie pour une fonction continue par morceaux et pour une fonction réglée.

(2) $\Rightarrow$ (1) Soit $0 < \alpha < \beta < 1$. Soit $f = \chi_{[\alpha,\beta]}$. On considère les fonctions continues définies par :

$$\psi_p = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,\alpha] \cup [\beta, 1]\,; \\ 1 & \forall x \in [\alpha + \frac{1}{p}, \beta - \frac{1}{p}]\,; \\ \text{affine sur } [\alpha, \alpha+\frac{1}{p}] \text{ et } [\beta - \frac{1}{p}, \beta] \end{cases}$$

et

$$\phi_p = \begin{cases} 0 & \forall x \in [0,\alpha - \frac{1}{p}] \cup [\beta + \frac{1}{p}, 1]\,; \\ 1 & \forall x \in [\alpha, \beta]\,; \\ \text{affine sur } [\alpha - \frac{1}{p}, \alpha] \text{ et } [\beta, \beta + \frac{1}{p}] \end{cases}$$

Ainsi pour tout p assez grand, on a $\psi_p \leq f \leq \phi_p$. Ainsi pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(u_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \phi_p(u_k) \\
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \chi_{[\alpha,\beta]}(u_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \phi_p(u_k) \\
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) &\leq \frac{X_n(\alpha,\beta)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \phi_p(u_k)
\end{aligned}$$

Or par hypothèse, puisque ϕ_p et ψ_p sont continues alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \psi_p(u_k) \longrightarrow \int_0^1 \psi_p(t)dt& \\
&= (\beta - \frac{1}{p} - (\alpha + \frac{1}{p})) \times 1 + \frac{(\alpha + \frac{1}{p} - \alpha) \times 1}{2} + \frac{(\beta - (\beta - \frac{1}{p})) \times 1}{2} \\
&= \beta - \alpha - \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Et de même on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi_p(u_k) \longrightarrow \int_0^1 \phi_p(t)dt = \beta - \alpha + \frac{1}{p}$$

Ainsi, soit $\epsilon > 0$, on peut choisir p tel que $\frac{1}{p} < \epsilon$. Alors $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\left|\frac{X_n(\alpha,\beta)}{n}\right| < 2\epsilon$. D'où le (1) lorsque $0 < \alpha < \beta < 1$.
On peut adapter cette démonstration lorsque $\alpha = 0$ ou $\beta = 1$.
En effet, si $\alpha = 0$, il suffit de considérer $\psi_p = 1$ sur $[0, \beta - \frac{1}{p}]$ et $\phi_p = 1$ sur $[0, \beta]$.
D'où le résultat.

(2) $\Rightarrow$ (3) Il suffit d'écrire $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p u_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi p u_k) + \frac{1}{n}i\sum_{k=1}^{n}\sin(2\pi p u_k)$$

Et puisque cosinus et sinus sont des fonctions continues sur $[0,1]$ alors en appliquant (2), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi p u_k) + \frac{1}{n}i\sum_{k=1}^{n}\sin(2\pi p u_k) &\longrightarrow \int_0^1 \cos(2\pi p x)dx + i\int_0^1 \sin(2\pi p x)dx \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi p x}dx \\ &= 0 \quad \text{car } p \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (2) Par linéarité, on a la proposition (2) pour tout polynôme trigonométrique du type : $x \longmapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(2\pi k x) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2\pi k x)$.
D'après le théorème de Weierstrass trigonométrique, on sait que toute fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques du type précédent. Donc (2) est vérifiée pour les fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(0) = f(1)$. De plus si la fonction f ne vérifie pas $f(0) = f(1)$, alors on peut trouver pour tout $\epsilon > 0$, une fonction g continue sur $[0,1]$ telle que $g(0) = g(1)$ et que $\int_0^1 |f - g| < \epsilon$, ce qui suffit pour montrer (2).

Démonstration des lemmes utilisés

Lemme 0.1 *Les fonctions en escalier sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *sont denses dans les fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Remarque : On peut généraliser ce lemme aux fonctions en escaliers sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans un evn de dimension finie E.

Démonstration Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. Alors d'après le théorème de Heine f est uniformément continue sur $[0,1]$, ie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in [0,1], |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Montrons qu'il est possible d'approximer f à ϵ près par une fonction en escalier g, ie qu'il existe g telle que $\| f - g \| \leq \epsilon$ sur $[0,1]$.
Considérons un α associé à ϵ et une subdivision quelconque dont le pas soit inférieur à α, ie $0 = a_0 < a_1 < \ldots a_m = 1$ avec $a_{i+1} - a_i < \alpha$ pour $i \in [0, m-1]$.
Choisissons un point à l'intérieur de chaque $[a_i, a_{i+1}[$, par exemple le milieu m_i ou a_i et définissons g comme suit : si $x = a_i$, $g(x) = f(a_i)$ et si $x \in]a_i, a_{i+1}[$, $g(x) = f(m_i)$.
Alors en appliquant la propriété d'uniforme continuité de f sur $[0,1]$, on obtient dans tous les cas $\| f - g \| \leq \epsilon$.
Ainsi pour construire une suite convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$, on choisit $g_n = g$ construite comme ci-dessus avec $\epsilon = \frac{1}{n}$.

Lemme 0.2 (Théorème de Weierstrass trigonométrique) *Toute fonction continue et périodique est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Démonstration La démonstration découle du théorème de Fejer.

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens analyse 2.* Cassini, 2009.