Décomposition de Dunford

Références : [FGN09] p.134-135 et [Gou94] p.191.

Théorème 0.1 *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit u un endomorphisme de E.*
Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que :

1. *$u = d + n$;*
2. *d et n commutent ;*
3. *d est diagonalisable et n est nilpotent.*

De plus d et n sont des polynômes en u.

Démonstration

Existence Comme u est un endomorphisme de E où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

où $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distinctes et les entiers $m_i \geq 1$.
D'après le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, E s'écrit comme somme directe de sous-espaces caractéristiques $F_i = \ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$, ie $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.
Soit d l'endomorphisme de E dont la restriction à chaque F_i est $\lambda_i id_{|F_i}$; autrement dit d est diagonalisable et admet chaque sous-espace F_i comme espace propre pour la valeur propre λ_i.
On pose $n = u - d$. Il ne reste plus qu'à vérifier que n est nilpotent et commute avec d. Comme chaque sous-espace caractéristique de E est stable par u et par d (donc aussi par n), il suffit de le vérifier pour les restrictions aux F_i.
On a $u_{|F_i} = d_{|F_i} + n_{|F_i}$ et $d_{|F_i} = \lambda_i id_{|F_i}$. Par définition de F_i, $(u_{|F_i} - \lambda_i id_{|F_i})^{m_i} = 0 = (n_{|F_i})^{m_i}$ donc $n_{|F_i}$ est nilpotente et commute clairement avec l'homothétie $d_{|F_i}$. D'où l'existence, car le couple (d, n) convient.

d et n sont des polynômes en u Vérifions que d et n sont des polynômes en u. Pour ce faire, on utilise le fait que les projections π_i sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^{r} F_j$ sont des polynômes en u. Or par construction :

$$d = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i$$

Et $n = u - d$, donc d et n sont des polynômes en u.
Montrons alors que les projections sont bien des polynômes en u.

- Pour tout $i = 1, \ldots, r$, on pose :

$$Q_i = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j id)^{m_j}$$

Aucun facteur n'est commun à tous les Q_j, ie les Q_j sont premiers entre eux dans leur ensemble, donc d'après le théorème de Bézout, on sait qu'il existe $(U_1, \ldots U_r) \in \mathbb{C}[X]^r$ tels que :

$$U_1 Q_1 + \ldots + U_r Q_r = 1$$

ie :

$$U_1(u) \circ Q_1(u) + \ldots + U_r(u) \circ Q_r(u) = id_E$$

Pour tout $i = 1, \ldots, r$ on pose $P_i = U_i Q_i$ et $\pi_i = P_i(u)$.
On a $id_E = \sum_{i=1}^r \pi_i$. Par ailleurs, $\forall j \neq i$, χ_u divise $Q_i Q_j$, donc $\forall j \neq i$:

$$\pi_i \circ \pi_j = Q_i Q_j(u) \circ U_i U_j(u) = 0$$

On en déduit que $\forall j$, $\pi_j = \sum_{i=1}^r \pi_i \circ \pi_j$ et donc d'après l'égalité ci-dessus que $\pi_i = \pi_i \circ \pi_i$.
Les π_i sont donc des projecteurs.

- Montrons que $\forall i = 1, \ldots, r$, $\Im(\pi_i) = F_i = \ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$.
  Soit $y = \pi_i(x) \in \Im(\pi_i)$. On a :

  $$(u - \lambda_i id)^{m_i}(y) = (u - \lambda_i id)^{m_i} \circ P_i(u)(x) = U_i(u) \circ \chi_u(u)(x) = 0$$

  donc $\Im(\pi_i) \subset F_i$.
  Soit $x \in F_i = \ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$. Alors d'après une formule précédente, on a :

  $$x = \pi_1(x) + \ldots + \pi_r(x)$$

  Or $\forall j \neq i$, $\pi_j(x) = U_j(u) \circ Q_j(u)(x) = 0$ car $(u - \lambda id)^{m_i}$ divise Q_j, donc finalement $x = \pi_i(x) \in \Im(\pi_i)$.
- Montrons que $\forall i$, $\ker(\pi_i) = \bigoplus_{j=1, j\neq i}^r F_j$.
  $\forall j \neq i$, on a $\ker(u - \lambda_j id)^{m_j} \subset \ker \pi_i$ car si $x \in \ker(u - \lambda_j id)^{m_j}$, alors $\pi_i(x) = U_i(u) \circ Q_i(u)(x) = 0$ car $(u - \lambda_j id)^{m_j}$ divise Q_i. D'où $\bigoplus_{j=1, j\neq i}^r F_i \subset \ker(\pi_i)$.
  Soit $x \in \ker(\pi_i)$. D'après une relation précédente, on a :

  $$x = \sum_{j \neq i} \pi_j(x)$$

  donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} F_i$.
- Par construction, les projecteurs π_i sont donc des polynômes en u.

Unicité Supposons l'existence d'un couple (d', n') d'endomorphismes de E vérifiant les conditions (1) à (3).
On a alors $d' - d = n - n'$.
Comme n' commute avec d' et $u' = d' + n'$, alors d' commute avec u, en effet :

$$d' \circ u = d' \circ (d' + n') = d' \circ d' + d' \circ n' = d' \circ d' + n' \circ d' = (d' + n') \circ d' = u \circ d'$$

Alors d' commute avec tout polynôme en u, donc en particulier avec d. Ainsi d et d' sont simultanément diagonalisable et donc $d' - d$ est diagonalisable (en effet $d = PDP^{-1}$ et $d' = P\overline{D}P^{-1}$, d'où $d' - d = P(\overline{D} - D)P^{-1}$ et $\overline{D} - D$ est bien une matrice diagonale).
De même, on montre que n commute avec n'. Ainsi $n - n'$ est nilpotente (en effet, comme n nilpotente, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n^k = 0$ et de même $\exists l \in \mathbb{N}$, tel que $(n')^l = 0$ et comme n et n' commutent, on peut appliquer la formule de binôme de Newton, d'où $(n - n')^{k+l} = 0$).
Enfin, le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est 0, en effet si A diagonalisable alors $A = PDP^{-1}$ et si A nilpotent, alors $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$ d'où $A^k = PD^kP^{-1} = 0$ donc en multipliant par P^{-1} à gauche et par P à droite, on a $D^k = 0$ d'où $D = 0$ car D diagonale, d'où $A = 0$.
Ainsi $d = d'$ et $n = n'$.

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 (Décomposition des noyaux) *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = P_1 \ldots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec les $P_i \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors :* $\ker(P(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \ldots \oplus \ker(P_k(f))$.

Démonstration On procède par récurrence sur $k \geq 2$.

- **k=2** Comme P_1 et P_2 sont premiers entre eux alors d'après le théorème de Bézout il va exister $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$.
  Soit $x \in \ker(P_1(f)) \cap \ker(P_2(f))$. Alors $P_1(f)(x) = 0$ et $P_2(f)(x) = 0$. Or d'après la relation de Bézout $x = (UP_1 + VP_2)(x) = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x) = 0$ donc $x = 0$. Donc $\ker(P_1(f)) \cap \ker(P_2(f)) = \{0\}$.
  Soit $x \in \ker(P(f))$. On a toujours $x = (UP_1 + VP_2)(x)$. Or :

  $$P_2(f)(UP_1(f)(x)) = UP_1P_2(f)(x) = UP(f)(x) = 0$$

donc $UP_1(f)(x) \in \ker(P_2(f))$.
De même, on montre que $VP_2(f)(x) \in \ker(P_1(f))$ donc $x = UP_1(f)(x) + VP_2(f)(x)$ s'écrit somme d'un élément de $\ker(P_1(f))$ et de $\ker(P_2(f))$ d'où le résultat.

– **k $\geq$ 2** On suppose que le résultat est vrai au rang k.
On a $P = Q_1Q_2$ avec $Q_1 = P_1 \dots P_k$ et $Q_2 = P_{k+1}$, comme les polynômes Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, alors d'après le cas où $k = 2$, on a $\ker(P(f)) = \ker(Q_1(f)) \oplus \ker(Q_2(f))$.
Or par hypothèse de récurrence on sait que $\ker(Q_1(f)) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_k(f))$. D'où le résultat.

Corollaire 0.1.1 $E = \bigoplus_j \ker(u - \lambda_j id)^{m_j}$

Démonstration On pose $P = \prod_j (X - \lambda_j)^{m_j}$. Comme les $(X - \lambda_j)^{m_j}$ sont premiers entre eux deux à deux (car les λ_j sont distincts) et comme $u \in \mathcal{L}(E)$, alors d'après le lemme des noyaux :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_j \ker(u - \lambda_j id)^{m_j}$$

Or u diagonalisable, donc $P(u) = 0$ (d'après le théorème de Cayley-Hamilton) d'où $\ker(P(u)) = E$, d'où le résultat.

Lemme 0.2 (Diagonalisation simultanée) *Soient u, v deux endomorphismes de E ($\mathbb{C}$-espace vectoriel) tels que $u \circ v = v \circ u$.*
Alors u et v sont co-diagonalisables.

Démonstration

– Soit λ une valeur propre de u et $F = \ker(u - \lambda id)$ le sous-espace propre associé à λ.
On considère $v : F \longrightarrow E$. Montrons que v est un endomorphisme de F.
Soit $x \in F$, alors $u(x) = \lambda x$ et :

$$u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

d'où $v(x) \in F$.

– Montrons que $v_{|F}$ est diagonalisable.
Comme v est diagonalisable, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de v scindé à racines simples, ie $P(v) = 0$. Or P est aussi annulateur de $v_{|F}$, d'où $P(v_{|F}) = 0$. Donc $v_{|F}$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples d'où $v_{|F}$ diagonalisable.

– Ainsi sur F sous-espace propre de u, on a $u_{|F}$ diagonalisable et $v_{|F}$ diagonalisable, donc sur $E = \bigoplus E_{\lambda_i}$, on a u et v diagonalisables.

Références

[FGN09] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux x-ens algèbre 2.* Cassini, 2009.

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Ellipses, 1994.