Lemme de Morse

Références : [Rou09] p.354-355 ([Gri11] et [Gou94]).

Théorème 0.1 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine.*
On suppose que 0 est un point critique quadratique non dégénéré de f, ie $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $D^2f(0)$ est non dégénérée et de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un C^1-difféomorphisme $x \longmapsto u = \phi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\phi(0) = 0$ et :
$$f(x) - f(0) = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$

Démonstration Appliquons la formule de Taylor Reste intégral à la fonction f à l'ordre 2 autour de l'origine :
$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \int_0^1 \frac{(1-t)}{1!} D^2f(0+tx)(x,x)dt$$
Or $Df(0) = 0$, d'où :
$$f(x) - f(0) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x,x)dt$$
Cela se réécrit :
$$f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x$$
avec
$$Q(x) = \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)dt$$
qui est une matrice symétrique, fonction C^1 de x (car $D^2f(tx)$ est une matrice symétrique, fonction C^1 de x, car f est de classe C^3).
D'après la formule du lemme 2, on sait qu'il existe une matrice inversible $M(x)$, fonction C^1 de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ telle que :
$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$
D'où :
$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$$
avec $y = M(x)x$.
Or $Q(0) = \dfrac{1}{2}D^2f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, il existe donc un changement linéaire de coordonnées $y = Au$ où A est une matrice inversible tel que :
$${}^t y Q(0) y = {}^t u \, {}^t A Q(0) A u = u_1^2 + \ldots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \ldots - u_n^2$$
ce qui donne l'expression voulue.
Enfin l'application $x \longmapsto A^{-1}M(x)x$ a pour différentielle à l'origine $A^{-1}M(0)$, matrice inversible. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale c'est un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

Lemmes utilisés

Lemme 0.1 (Taylor Reste intégral) *Si f est de classe C^{k+1} sur U et si le segment $[a, a+h]$ est inclus dans U, alors :*
$$f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \ldots - \frac{1}{k!}D^kf(a)(h)^k = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1}f(a+th)(h)^{k+1}dt$$

Démonstration Par récurrence sur k.

Lemme 0.2 (Théorème d'inversion locale) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1.*
On suppose que la matrice jacobienne $Df(a)$ est inversible, ie $\det Df(a) \neq 0$.
Alors il existe un ouvert V contenant a (et contenu dans U) et un ouvert W contenant $b = f(a)$ tels que la restriction de f à V soit un difféomorphisme de classe C^1 de V sur $W = f(V)$.

Remarque : On a ainsi l'équivalence : $x \in V$ et $y = f(x)$ si et seulement si $y \in W$ et $x = f^{-1}(y)$ en notant $f^{-1} : W \longrightarrow V$ la bijection réciproque de f.
L'équation $f(x) = y$ d'inconnue x admet donc une unique solution x dans V.
On a de plus : $D(f^{-1})(y) = Df(x)^{-1}$ pour tout $x \in V$.

Lemme 0.3 *Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ inversible. Soit :*

$$\begin{aligned} \phi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto {}^tMA_0M \end{aligned}$$

Alors :

1. *$D\phi(I)$ est surjective et son noyau est $\{H \in M_n(\mathbb{R}), A_0H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$;*
2. *il existe un voisinage V de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et une application $A \in V \longmapsto M \in GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tels que $A = {}^tMA_0M$ pour tout $A \in V$.*

Démonstration
$\rightsquigarrow$ ϕ est polynomiale donc de classe C^1 sur $M_n(\mathbb{R})$. Ainsi pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \phi(I+H) - \phi(I) &= {}^t(I+H)A_0(I+H) - A_0 \\ &= ({}^tI + {}^tH)A_0(I+H) - A_0 \\ &= A_0H + {}^tHA_0 + {}^tHA_0H \\ &= A_0H + {}^t(A_0H) + O(\| H \|^2) \end{aligned}$$

D'où $D\phi(I)(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$.
Ainsi le noyau de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} D\phi(I) : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ H &\longmapsto {}^t(A_0H) + A_0H \end{aligned}$$

est formé des matrices H telles que A_0H soit antisymétrique.
Cette application est par ailleurs surjective, car pour A donnée dans $S_n(\mathbb{R})$, l'équation $D\phi(I)(H) = A$ admet la solution $H = \frac{1}{2}A_0^{-1}A \in M_n(\mathbb{R})$.
$\rightsquigarrow$ On sait que toute matrice est de manière unique somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, ainsi $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}); A_0M \in S_n(\mathbb{R})\}$ est un supplémentaire du noyau de $D\phi(I)$ dans $M_n(\mathbb{R})$, de plus $I \in F$.
Soit $\psi : F \longrightarrow S_n(\mathbb{R})$ la restriction de ϕ à F. Alors la différentielle $D\psi(I) = D\phi(I)_{|F}$ est bijective puisque $\ker D\phi(I) \cap F = \{0\}$.
D'après le théorème d'inversion locale, il existe alors un ouvert U de I dans F (que l'on peut supposer contenu dans l'ouvert des matrices inversibles) tel que ψ soit un C^1-difféomorphisme de U sur $V = \psi(U)$.
Ainsi V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I) = \phi(I)$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et pour tout $A \in V$, il existe une unique matrice inversible $M \in U$ telle que $A = {}^tMA_0M$ et $M = \psi^{-1}(A)$ est une fonction continûment différentiable de A.

Lemme 0.4 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Alors $S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$.*

Démonstration Soit $A \in S_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, alors $A = {}^tA = -{}^tA$, donc ${}^tA = 0$, ainsi $A = 0$, d'où $S_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0\}$.
Ensuite soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, alors $A = \dfrac{A + {}^tA}{2} + \dfrac{A - {}^tA}{2}$ d'où $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Lemme 0.5 (Théorème de Sylvester) *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ (E est donc isomorphe à $\mathbb{R}^n$). Soit q une forme quadratique sur E.*
Alors il existe une base (e_i) de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a :

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

ie :

$$M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de q et p est un entier qui ne dépend que de la forme quadratique q (et non de la base).
Le couple $(p, r-p)$ est appelé la signature de q.

Démonstration Soit (e_i) une base orthogonale de E. Si $x = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on aura :

$$q(x) = a_1 y_1^2 + \ldots + a_r y_r^2$$

avec les $a_i \in \mathbb{R}$.
Supposons que $a_1, \ldots, a_p > 0$ et que $a_{p+1}, \ldots, a_r \leq 0$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} q(x) &= (\sqrt{a_1} y_1)^2 + \ldots + (\sqrt{a_p} y_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}} y_{p+1})^2 - \ldots - (\sqrt{-a_r} y_r)^2 \\ &= x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 \end{aligned}$$

avec $x_i = \sqrt{a_i} y_i$ pour $i = 1, \ldots, p$ et $a_j = \sqrt{-a_j} y_j$ pour $j = p+1, \ldots, r$.
Il reste maintenant à montrer que p ne dépend pas du choix de la base. Considérons deux bases (e_i) et (e'_i) telles que :

$$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^n x_i e_i\right)$$

$$q(x) = y_1^2 + \ldots + y_{p'}^2 - y_{p'+1}^2 - \ldots - y_r^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^n y_i e'_i\right)$$

Soient $F = Vect(e_1, \ldots, e_p)$, $F' = Vect(e'_1, \ldots, e'_{p'})$, $G = Vect(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ et $G' = Vect(e'_{p'+1}, \ldots, e'_n)$.
On a :
- $x \in F \setminus \{0\}$ implique que $q(x) > 0$;
- $x \in F' \setminus \{0\}$ implique que $q(x) > 0$;
- $x \in G$ implique que $q(x) \leq 0$;
- $x \in G'$ implique que $q(x) \leq 0$.

Donc $x \in F \cap G'$ implique que $x = 0$ et par conséquent que $F \cap G' = \{0\}$.
Ainsi F et G' sont en somme directe et puisque $F \cap G' \subset E$:

$$\dim F + \dim G' \leq n$$

ie $p + n - p' \leq n$, donc $p \leq p'$.
De la même façon, on montre que $F' \cap G = \{0\}$ et donc que $p' \leq p$. D'où l'égalité.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre*. Ellipses, 1994.

[Gri11] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire*. Cépaduès, 2011.

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel*. Cassini, 2009.