Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

Réf: Alessandri, thèmes de Géométrie

Théorème 0.1 *Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.*
Alors il existe un produit scalaire euclidien $< .,. >_G$ sur $\mathbb{R}^n$ de forme quadratique associée q_G tel que $G \subset \mathcal{O}(q_G)$; où $\mathcal{O}(q_G) = \{\Omega \in GL_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^n, \| \Omega X \|_G = \| X \|_G\}$ et $\| \, . \, \|_G = \sqrt{q_G}$ la norme associée à la forme quadratique.

Remarque : définition du produit scalaire. Pour $S \in G$, on définit le produit scalaire, pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$ par :

$$< X, Y >_S = {}^t XSY$$

Remarque : dans le cas d'un groupe fini. Soit G un sous-groupe compact fini de $GL_n(\mathbb{R})$. Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On pose :

$$< X, Y >_G := \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} < AX, AY >$$

On définit ainsi un produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. En effet :

$$< \lambda X + Y, Z > = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} < A(\lambda X + Y), AZ > = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} (\lambda < AX, AZ > + < AY, AZ >) = \lambda < X, Z > + < Y, Z >$$

$$< X, Y > = < Y, X >$$

$$< X, X > = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} < AX, AX > = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \| AX \|^2 \geq \frac{1}{|G|} \| X \|^2 \geq 0$$

Ainsi si $< X, X > = 0$ alors $\| X \| = 0$ donc $X = 0$ car $\| \, . \, \|$ est une norme.
Et par construction $G \subset \mathcal{O}(q_G)$; en effet pour $B \in G$ et $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\| BX \|_G^2 = q_G(BX) = < BX, BX >_G = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} < ABX, ABX > = \frac{1}{|G|} \sum_{A \in G} \| ABX \|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{C \in G} \| CX \|^2 = q_G(X)$$

car la translation :

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ A &\longmapsto AB \end{aligned}$$

est une bijection de G sur lui-même.

Démonstration Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit K un compact convexe non vide de $\mathcal{V}$.

Lemme 0.1 *Soit $\mathcal{G}$ un groupe compact de $GL(\mathcal{V})$ tel que $\forall u \in \mathcal{G}$, $u(K) \subset K$.*
Alors il existe un élément de K fixé par chaque $u \in \mathcal{G}$.

Démonstration du lemme

Étape 1 : Soit N une norme euclidienne sur $\mathcal{V}$. Montrons que $\nu(x) = \max_{u \in \mathcal{G}} N(u(x))$ définit une norme $\mathcal{G}$-invariante sur $\mathcal{V}$ et strictement convexe.
Tout d'abord le groupe $\mathcal{G}$ opère de façon naturelle sur $\mathcal{V}$ via :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\longrightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{V}) \\ u &\longmapsto \sigma_u : x \longmapsto u.x := u(x) \end{aligned}$$

On considère l'orbite de x, $\mathcal{O}(x) = \{u(x), x \in \mathcal{G}\}$. Montrons que la fonction ν est bien définie et que $\nu(x)$ ne dépend que de l'orbite de x.
L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u &\longmapsto N(u(x)) \end{aligned}$$

est continue sur le compact $\mathcal{G}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes, d'où l'existence du maximum, donc ν est bien définie.
Soit maintenant $y \in \mathcal{O}(x)$, alors il existe $v \in \mathcal{G}$, tel que $y = v(x)$. Montrons que $\nu(y) = \nu(v(x)) = \nu(x)$.
On a :

$$\begin{aligned} N(u(y)) = N(u \circ v(x)) \leq \nu(x) \quad &\text{car } u \circ v \in \mathcal{G}\,; \\ N(u(x)) = N(u \circ v^{-1}(y)) \leq \nu(y) \quad &\text{car } u \circ v^{-1} \in \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Ces deux inégalités impliquent que $\nu(x) = \nu(y)$, donc ν dépend uniquement de l'orbite. Ainsi ν est $\mathcal{G}$-invariante.

- Soient $x, y \in \mathcal{V}$, alors puisque N est une norme sur $\mathcal{V}$ et u est une application linéaire, on a :

  $$N(u(x+y)) = N(u(x) + u(y)) \leq N(u(x)) + N(u(y)) \leq \nu(x) + \nu(y)$$

  De plus comme le maximum est le plus petit des majorants de l'ensemble $\{N(u(x+y)), x, y \in \mathcal{V}, u \in \mathcal{G}\}$, on a :

  $$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathcal{V}$; alors puisque N est une norme, on a :

  $$N(u(\lambda x)) = N(\lambda u(x)) = |\lambda| N(x) \leq |\lambda| \nu(x)$$

  Ainsi par définition du maximum, on a :

  $$\nu(\lambda x) \leq |\lambda| \nu(x)$$

  Si $\lambda = 0$, alors on a bien l'égalité.
  Supposons maintenant $\lambda \neq 0$. On pose $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ et $y = \lambda x$, alors si on applique l'inégalité à μ et y, on obtient :

  $$\nu(\mu y) \leq |\mu| \nu(y)$$

  ie

  $$\nu\left(\frac{1}{\lambda} \lambda x\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \nu(\lambda x)$$

  ie

  $$|\lambda| \nu(x) \leq \nu(\lambda x)$$

  D'où l'égalité.
- Si $\nu(x) = 0$, alors $\forall u \in \mathcal{G}$, $N(u(x)) = 0$, donc $u(x) = 0$ (car N est une norme), donc en particulier $id(x) = 0$, ie $x = 0$.

Montrons que ν est strictement convexe. Soient $x, y \in \mathcal{V}$, soit $u_0 \in \mathcal{G}$ tel que :

$$\nu(x+y) = N(u_0(x) + u_0(y)) = N(u_0(x)) + N(u_0(y)) = \nu(x) + \nu(y)$$

Comme N est une norme euclidienne, la condition $\nu(x+y) = \nu(x) + \nu(y)$ entraîne que $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés, ie $\exists \lambda \geq 0$ tel que $u_0(x) = \lambda u_0(y)$ et donc x et y sont aussi positivement liés (car $u_0 \in \mathcal{G}$, qui est un sous-groupe de $GL(\mathcal{V})$, ie ν est strictement convexe.

Étape 2 : Conclusion.
Pour $u \in \mathcal{G}$, posons $F_u = \{x \in K, u(x) = x\}$.
Il reste à prouver que $\cap_{u \in \mathcal{G}} F_u \neq \emptyset$.
Comme $(F_u)_{u \in \mathcal{G}}$ est une famille de fermés du compact K, il suffit de vérifier qu'elle a la propriété de l'intersection finie, ie si $u_1, \ldots, u_p$ sont quelconques dans G, on a $\cap_{1 \leq k \leq p} F_{u_k} \neq \emptyset$. En effet, comme K est compact il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, ie de toutes réunions d'ouverts

de K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Ainsi si on passe au complémentaire dans cette propriété, on obtient que de toute intersection finie du vide, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Ainsi en passant à la contraposée dans cette propriété, on obtient la validité de ce que l'on souhaite faire.
Posons :

$$v = \frac{1}{p} \sum_{1 \leq k \leq p} u_k$$

Soit $a \in K$ tel que $v(a) = a$ (v est un endomorphisme de $\mathcal{V}$ qui stabilise le compact convexe non vide K donc d'après le lemme ci-dessous a existe).
Choisissons une norme euclidienne N sur $\mathcal{V}$ et travaillons avec la norme $\mathcal{G}$-invariante ν qui s'en déduit :

$$\begin{aligned}\nu(a) = \nu(v(a)) = \nu\left(\frac{1}{p} \sum_{1 \leq k \leq p} u_k(a)\right) \\ \leq \frac{1}{p} \sum_{1 \leq k \leq p} \nu(u_k(a)) = \frac{1}{p} \sum_{1 \leq k \leq p} \nu(a) = \nu(a) \quad \text{car } \nu \text{ est } \mathcal{G}\text{-invariante.}\end{aligned}$$

Donc par stricte convexité de ν, les $u_k(a)$ sont positivement liés, ie $\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k(a) = v(a) = a$ et mêmes égaux (en effet $\nu(u_k(a)) = \nu(a)$ d'après la dernière ligne du calcul précédent). Comme leur moyenne vaut a, ils sont tous égaux à a et $a \in \cap_{1 \leq k \leq p} F_{u_k}$. Donc il existe un élément $\mathcal{G}$-fixe de K.

Démonstration du théorème
Étape 1 : Soit $A \in G$ et soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, on pose $\rho(A)(S) = {}^tASA$.
Montrons que $\rho : G \longrightarrow GL(S_n)$ est bien définie, continue et que $\forall A, B \in G^2$, $\rho(BA) = \rho(A) \circ \rho(B)$.
$\rightsquigarrow$ On définit une loi de groupe sur G en posant $A.B = BA$, ie :

$$\begin{aligned}\rho : G &\longrightarrow GL(S_n) \\ A &\longmapsto \rho(A) : S \longmapsto {}^tASA\end{aligned}$$

Montrons que ρ est bien définie, ie $\forall A \in G$, $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, $\rho(A)(S) \in S_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, soit $A \in G$ et soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors :

$${}^t\rho(A)(S) = {}^t({}^tASA) = {}^tA\,{}^tSA = {}^tASA = \rho(A)(S)$$

car $S \in S_n(\mathbb{R})$.
Montrons maintenant que pour $A \in G$, $\rho(A)$ est bien bijective. Pour cela exhibons son inverse :

$$\begin{aligned}\phi(A) : S_n &\longrightarrow S_n \\ S &\longmapsto {}^tA^{-1}SA^{-1}\end{aligned}$$

(on peut bien considérer A^{-1} car $A \in G$ et G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$).
Maintenant, soient $A, B \in G^2$ et soit $S \in S_n$:

$$\rho(BA)(S) = {}^t(BA)S(BA) = {}^tA\,{}^tBSBA = {}^tA\rho(B)(S)A = \rho(A)(\rho(B)(S)) = \rho(A) \circ \rho(B)(S)$$

D'où $\rho(BA) = \rho(A) \circ \rho(B)$.
$\rightsquigarrow$ Soient :

$$\begin{aligned}\delta : G &\longrightarrow G \times G \\ A &\longmapsto (A, A)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R})) \\ (A, B) &\longmapsto {}^tASB\end{aligned}$$

Alors $\rho = \beta \circ \delta$ est la composée de deux fonctions continues donc est continue (β est continue car elle est bilinéaire en dimension finie).

Étape 2 : Établissons le résultat en considérant l'enveloppe convexe de $\{ {}^t MM, M \in G\}$.
$\rightsquigarrow$ On pose $\mathcal{G} = \rho(G)$ c'est un sous-groupe de $GL(S_n)$ (image du morphisme ρ) compact car image par l'application continue ρ du compact G.
$\rightsquigarrow$ Comme G est compact, l'ensemble $\{ {}^t MM, M \in G\}$ est un compact non vide du convexe $S_n^{++}(\mathbb{R})$, c'est donc aussi le cas de son enveloppe convexe, que l'on note maintenant K (d'après un corollaire du théorème de Carathéodory).
$\rightsquigarrow$ Par construction K est $\mathcal{G}$-stable, en effet soit $A \in G$ et $M \in G$:

$$\rho(A)({}^t MM) = {}^t A({}^t MM)A = {}^t(MA)(MA) \in K$$

par définition de K enveloppe convexe de $\{ {}^t MM, M \in G\}$, on sait que les éléments de K sont des combinaisons linéaires des éléments de $\{ {}^t MM, M \in G\}$ et que $\rho(A)$ est linéaire (en effet : $\rho(A)(\lambda S + T) = {}^t A(\lambda S + T)A = \lambda {}^t ASA + {}^t ATA = \lambda\rho(A)(S) + \rho(A)(T)$).
$\rightsquigarrow$ D'après le théorème du point fixe collectif, on dispose donc d'un élément $S \in K$ fixé par chaque élément de $\mathcal{G}$. Un tel S vérifie $\forall A \in G$, $\rho(A)(S) = {}^t ASA = S$.
Autrement dit $G \subset \mathcal{O}(q_S)$ ce qui prouve le résultat car S ne dépend que du groupe G, en effet, si $\Omega \in G$, alors $\forall X \in \mathbb{R}^n$:

$$\| \Omega X \|_S^2 = < \Omega X, \Omega X >_S = {}^t(\Omega X)S(\Omega X) = {}^t X {}^t\Omega S \Omega X = {}^t XSX = < X, X >_S = \| X \|_S^2$$

(par définition du produit scalaire $< ., . >_S$). D'où $G \in \mathcal{O}(q_S)$. D'où le résultat !

Lemmes utilisés

Lemme 0.2 *Soit $v \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ tel que $u(K) \subset K$ (avec K compact convexe non vide de $\mathcal{V}$). Alors il existe un point fixe de v dans K.*

Démonstration Fixons $x_0 \in K$ et considérons la suite x_k du convexe K :

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} v^l(x_0)$$

Par compacité, on dispose d'une extraction ϕ qui rend la suite $x_{\phi(k)}$ convergente dans K, notons sa limite $a \in K$.
Or :

$$\begin{aligned} v(x_k) &= v\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} v^l(x_0)\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}(v(v^l(x_0)) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k} v^l(x_0) + \frac{1}{k+1}\left(v^{k+1}(x_0) - x_0\right) \\ &= x_k + \frac{1}{k+1}\left(v^{k+1}(x_0) - x_0\right) \end{aligned}$$

Donc $v(x_{\phi(k)}) = x_{\phi(k)} + \epsilon_k$, avec $\epsilon_k \longrightarrow 0$ (car on a quelquechose de borné (car on est dans le compact K) multiplié par $\dfrac{1}{k+1}$ qui tend vers 0).
Par continuité de v, on a donc $v(a) = a$ (en passant à la limite dans l'expression précédente). D'où le résultat.

Lemme 0.3 (Corollaire du Théorème de Carathéodory) *Soit $\mathcal{V}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit K un compact non vide de $\mathcal{V}$. Alors l'enveloppe convexe de K est encore un compact.*

Démonstration : cf le développement sur le théorème de Carathéodory.