Sous-Variétés

Référence : [Rou09] p.284-287.

Théorème 0.1 *1. L'ensemble des matrices réelles de déterminant 1, ie $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2-1 dont l'espace tangent en un point $X \in SL_n(\mathbb{R})$ est :*

$$\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); tr(X^{-1}H) = 0\}$$

2. L'ensemble des matrices orthogonales, ie $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$ dont l'espace tangent en un point $X \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est :

$$\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H\}$$

3. Soit V le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de rang r avec $0 < r < n$. Soit U le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices dont le premier mineur $r \times r$ (ie en haut à gauche) est non nul. Alors V et $V \cap U$ sont des sous-variétés de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2-(n-r)^2$.

Démonstration

Étape 1 : assertion 1

On pose :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \det(X) - 1 \end{aligned}$$

C'est une application de classe C^1 (et même C^∞) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme pour tout $X \in SL_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D\det(X)(H) = tr({}^t\tilde{X}H))$$

On a donc :

$$Df(X)(X) = tr(Id) = n$$

Donc la forme différentielle $Df(X)$ est non nulle pour tout $X \in SL_n(\mathbb{R})$, ainsi d'après le théorème des sous-variétés caractérisées implicitement, $SL_n(\mathbb{R})$ est donc une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1 (car définie par une seule relation implicite) et son espace vectoriel tangent en X est :

$$\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); tr(X^{-1}H) = 0\}$$

Pour $X = Id$, on remarque que c'est le sous-espace formé des matrices de trace nulle.

Étape 2 : assertion 2

On procède de la même manière que pour $SL_n(\mathbb{R})$. On rappelle que :

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^tXX = Id\}$$

On pose :

$$\begin{aligned} g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow S_n(\mathbb{R}) \\ X &\longmapsto {}^tXX - Id \end{aligned}$$

g est une application de classe C^1 de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'ensemble des matrices symétriques. Déterminons sa différentielle, soit $X \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} g(X+H) - g(X) &= {}^t(X+H)(X+H) - Id - {}^tXX + Id \\ &= ({}^tX + {}^tH)(X+H) - {}^tXX \\ &= {}^tXX + {}^tXH + {}^tHX + {}^tHH - {}^tXX \\ &= {}^tXH + {}^tHX + o(\|H\|) \end{aligned}$$

Donc :

$$Dg(X)(H) = {}^tXH + {}^tHX = X^{-1}H + {}^t(X^{-1}H)$$

car $X \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $X^{-1} = {}^tX$.

Soit maintenant $Y \in S_n(\mathbb{R})$, l'équation $Dg(X)(H) = Y$ admet la solution $H = \frac{1}{2}XY$, en effet :

$$\begin{aligned} Dg(X)\left(\frac{1}{2}XY\right) &= \frac{1}{2}{}^tXXY + \frac{1}{2}{}^tY\,{}^tXX \\ &= \frac{1}{2}(Y + {}^tY) = Y \end{aligned}$$

car $Y \in S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi l'application $Dg(X)$ est surjective donc d'après le théorème des sous-variétés définies implicitement, on sait que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension :

$$\dim \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Et son espace tangent en $X \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est :

$$\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^t(X^{-1}H) = -X^{-1}H\}$$

Pour $X = Id$, on remarque que c'est le sous-espace des matrices antisymétriques.

Étape 3 : assertion 3 Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$.

Montrons que $X \in V \cap U$ si et seulement si $A \in GL_r(\mathbb{R})$ et $D = CA^{-1}B$.

Par définition de U et V, on a $X \in U \cap V$ si et seulement si X et A sont exactement de rang r. Cela revient à dire que $A \in GL_r(\mathbb{R})$ et que $rang(X) = r$, rang de ses r premières colonnes. Cette dernière condition signifie encore que les $n-r$ dernières colonnes de X sont combinaisons linéaires des r premières, ce qui se traduit par une égalité matricielle de la forme :

$$\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \times M$$

où $M \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R})$.

Comme A est inversible, cela équivaut à $M = A^{-1}B$ et $D = CM = CA^{-1}B$.

L'ensemble $U \cap V$ est donc caractérisé par les conditions $A \in GL_r(\mathbb{R})$ et $D = CA^{-1}B$.

Montrons maintenant que $U \cap V$ et V sont des sous-variétés.

D'après ce que l'on vient de montrer, cela signifie que $U \cap V$ est, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le graphe de l'application :

$$\begin{aligned} g : GL_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R}) \\ (A,B,C) &\longmapsto D = CA^{-1}B \end{aligned}$$

Or le groupe linéaire $GL_r(\mathbb{R})$ est l'ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par la non-nullité du déterminant, donc l'ensemble $GL_r(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ est un ouvert de dimension :

$$d = r^2 + r(n-r) + (n-r)r = r^2 + rn - r^2 + nr - r^2 = n^2 - (n-r)^2$$

Comme g est de classe C^1, d'après le théorème sur les sous-variétés on sait que le sous-ensemble V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $V \cap U$ de dimension d.
Enfin soit $X_0 \in V$ quelconque, alors il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que PX_0Q ait son premier mineur (ie en haut à gauche) non nul, ie $PX_0Q \in U \cap V$.
Donc l'application $X \longmapsto PXQ$ est un difféomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, donc V est une sous-variété en X_0 de dimension d. D'où V sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension d.

Trucs utilisés

Théorème 0.2 (sous-variétés implicites) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f_1, \ldots, f_p : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1. Soit $V = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in U ; f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0; \ldots ; f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$. On suppose que les différentielles $Df_1(x), \ldots, Dfp(x)$ sont indépendantes de tout point de V. Alors V est une sous-variété de dimension $n-p$ de $\mathbb{R}^n$ et l'espace vectoriel tangent en $a \in V$ est l'ensemble :*

$$\left\{ v = (v_1, \ldots, v_n); \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) v_j = 0; \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) v_j = 0 \right\}$$

Théorème 0.3 (des sous-variétés) *Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in V$. Soit $d \in \mathbb{N}$. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *V est lisse en a, de dimension d ;*
2. *(définition implicite) il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et $n-d$ fonctions $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que :*

   $$x \in V \cap U \Leftrightarrow x \in U \quad \textit{et} \quad f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

   et les différentielles $Df_1(a), \ldots, Df_{n-p}(a)$ sont indépendantes ;
3. *(graphe) il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert U' de $(a_1, \ldots, a_d)$ dans $\mathbb{R}^d$ et $n-d$ fonctions $g_i : U' \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, telles que (après éventuelle permutation des coordonnées x_i) :*

   $$x \in U \cap V \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_d) \in U' \quad \textit{et} \quad x_{d+1} = g_1(x_1, \ldots, x_d), \ldots, x_n = g_{n-d}(x_1, \ldots, x_d)$$

4. *(définition paramétrique) il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et n fonctions $\phi_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, telles que l'application :*

   $$\phi : u = (u_1, \ldots, u_d) \longmapsto x = (\phi_1(u), \ldots, \phi_n(u))$$

   soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$, avec $a = \phi(0)$ et que la matrice jacobienne $D\phi(0)$ soit injective.

Si on note $f = (f_1, \ldots, f_{n-d})$, $g = (g_1, \ldots, g_{n-d})$ et $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ l'espace vectoriel tangent en a à V est alors :

2. *le noyau de $Df(a)$;*
3. *le graphe de $Dg(a_1, \ldots, a_d)$;*
4. *l'image de $D\phi(0)$.*

Lemme 0.1 *Soit A une matrice de rang r. Alors il existe $P, Q_inGL_n(\mathbb{R})$ telles que :*

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la différentielle du déterminant Comme le déterminant d'une matrice est un polynôme en ses coefficients, on en déduit que l'application $M \longmapsto \det(M)$ est de classe C^∞.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour calculer la différentielle du déterminant au point M, nous allons calculer les dérivées partielles du déterminant au point M.
Désignons par $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il s'agit de calculer $\dfrac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(M)$.

En désignant par $C = (C_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la comatrice de M (de sorte que C_{ij} est le cofacteur de l'élément d'indice (i,j) de M), la n-linéarité du déterminant entraîne, pour tout (i,j) et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\det(M + tE_{ij}) = \det(M) + tC_{ij}$$

Donc :

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(M) = \lim_{t \longrightarrow 0, t \neq 0} \frac{\det(M + tE_{ij}) - \det(M)}{t} = C_{ij}$$

Ainsi si $H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D \det(M)(H) = \sum_{i,j} h_{ij} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(M) = \sum_{i,j} h_{ij} C_{ij} = tr({}^tCH)$$

Lorsque M est inversible, on peut obtenir une autre expression de la différentielle en utilisant l'identité ${}^tC = (\det(M))M^{-1}$ qui entraîne :

$$D \det(M)(H) = (\det(M)) tr(M^{-1}H)$$

pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Références

[Rou09] François Rouvière. *Petit guide du calcul différentiel.* Cassini, 2009.