Théorème d'Abel et théorème taubérien faible

Référence : [Gou08] p.252-254.

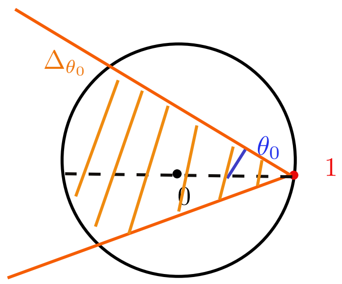
Théorème 0.1 (Abel) *Soit $\sum a_n z^n$ un série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge.*
Soit f la somme de cette série entière sur le disque unité.
On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \quad \textit{et} \quad \exists \rho > 0, \exists \phi \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\phi}\}$$

Alors :

$$\lim_{z \to 1, z \in \Delta_{\theta_0}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Dessinons le domaine Δ_{θ_0} :



Démonstration Notations pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad R_n = S - S_n$$

Pour majorer la quantité $|f(z) - S|$, on va effectuer une transformée d'Abel en écrivant $a_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en effet, on peut faire cela car $a_n = S_n - S_{n-1} = S_n - S + S - S_{n-1} = R_{n-1} - R_n$).

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$, alors $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z_n - S_N &= \sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=1}^{N} R_{n-1}(z^n - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) \quad \text{car } z^0 = 1\,; \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

Ainsi si on fait tendre N vers $+\infty$ alors on obtient :

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n$$

(car $R_n \longrightarrow 0$ et $z^N \longrightarrow 0$).
Comme $R_n \longrightarrow 0$, alors :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |R_n| < \epsilon$$

Ainsi d'après l'égalité qu'on vient d'obtenir, on a $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
|f(z) - S| &\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{\infty} R_n z^n \right| \\
&= |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} R_n z^n \right| \\
&\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + |z-1| \epsilon \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |z|^n \right) \\
&\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + |z-1| \epsilon \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \right) \\
&\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \epsilon \frac{|z-1|}{1-|z|}
\end{aligned}$$

car on reconnaît le terme général d'une série géométrique et $|z| < 1$.
Soit maintenant $z \in \Delta_{\theta_0}$, ie $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $\exists \rho > 0$, $\exists \phi$ tel que $|\phi| < \theta_0$ et donc tel que $z = 1 - \rho e^{i\phi}$. Alors on a :

$$|z|^2 = z\overline{z} = (1 - \rho e^{i\phi})(1 - \rho e^{-i\phi}) = 1 - 2\rho\cos(\phi) + \rho^2$$

Et lorsque $\rho \leq \cos(\theta_0)$ (on peut en particulier considérer un tel ρ puisqu'on souhaite considérer la limite quand $z \longrightarrow 1$ donc en choisissant ρ ainsi on ne fait que se rapprocher de 1 en module et $\cos(\theta_0) \neq 0$), on obtient la majoration :

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) = \frac{\rho}{2\rho\cos(\phi) - \rho^2}(1+|z|) \leq \frac{2}{2\cos(\phi) - \rho} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

(car $|z| \leq 1$).
Si on choisit maintenant $\alpha > 0$ tel que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| z^n < \epsilon$, on voit que si $z \in \Delta_{\theta_0}$ et $|z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos(\theta_0)\}$, alors :

$$|f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

D'où le résultat.

Remarques :

- En appliquant ce résultat à la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{x \to 1, x<1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x \to 1, x<1} \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

- De la même façon, on montre que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$$

- Si la série $\sum a_n$ converge absolument, le résultat est évident (en effet $\sum a_n z^n$ converge alors normalement sur $|z| \leq 1$, donc est continue sur $|z| \leq 1$ donc en 1).
- La réciproque de ce théorème est fausse, par exemple, on a :

$$\lim_{z \to 1, |z|<1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \lim_{z \to 1, |z|<1} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

  et pourtant $\sum (-1)^n$ diverge.
- Cependant si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ la réciproque est vraie et c'est ce que nous allons voir.

Théorème 0.2 (Taubérien faible) *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité.*
On suppose qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\lim_{x \to 1, x<1} f(x) = S$$

Alors si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

Démonstration On utilise les mêmes notations que dans la démonstration précédente.
On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} S_n - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \quad \text{car } x^0 = 1. \end{aligned}$$

Or comme $(1 - x^k) = (1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}) \leq k(1-x)$ car $x \in]0,1[$, alors :

$$\begin{aligned} |S_n - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| |1 - x^k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |x|^k \\ &\leq (1-x) \sum_{k=1}^{n} k |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, x^k \frac{k}{n} \end{aligned}$$

car $x \in]0,1[$ et $\frac{k}{n} \geq \frac{n+1}{n} \geq 1$.

On pose M un majorant de la suite $(ka_k)_k$ (elle est bien majorée car convergente, car $a_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$).

Alors :

$$\begin{aligned}
|S_n - f(x)| &\leq (1-x)Mn + \sup_{k\geq n+1}(k|a_k|)\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \\
&\leq (1-x)Mn + \sup_{k\geq n+1}(k|a_k|)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} x^k \\
&\leq (1-x)Mn + \sup_{k\geq n+1}(k|a_k|)\frac{1}{n(1-x)}
\end{aligned}$$

Soit maintenant $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < 1$, l'inégalité précédente nous donne $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|S_n - f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right)\right| \leq M\epsilon + \sup_{k\geq n+1}(k|a_k|)\frac{1}{\epsilon}$$

Donc si on choisit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sup_{k\geq N_0}(k|a_k|) < \epsilon^2$ (on peut trouver un tel N_0 car $ka_k \longrightarrow 0$), alors $\forall n \geq N_0$:

$$\left|S_n - f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right)\right| \leq M\epsilon + \epsilon$$

Or par hypothèse, $f(x) \longrightarrow S$ quand $x \longrightarrow 1$ et $x < 1$, donc $\exists N_1 \geq N_0$ tel que $\forall n \geq N_1$:

$$\left|f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S\right| < \epsilon$$

Ainsi $\forall n \geq N_1$:

$$|S_n - S| \leq \left|S_n - f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right)\right| + \left|f\left(1 - \frac{\epsilon}{n}\right) - S\right| \leq M\epsilon + \epsilon + \epsilon$$

Donc la suite $(S_n)_n$ converge vers S d'où le résultat.

Remarque : Ce résultat reste vrai si $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ c'est ce qu'on appelle le théorème taubérien fort.

Références

[Gou08] Xavier Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2008.