Exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable

Référence : [BMP05] p.215-216.

Proposition 0.1 *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.*
Alors u est diagonalisable si et seulement si $\exp(u)$ est diagonalisable.

Démonstration

Étape 1 Déterminons la décomposition de Dunford de $\exp(u)$.
La décomposition de Dunford de u s'écrit : $u = s + n$ où s est diagonalisable, n est nilpotent et $s \circ n = n \circ s$.
Comme s et n commutent alors $\exp(u) = \exp(s) \circ \exp(n)$.
On cherche maintenant à construire un endomorphisme nilpotent à partir de $\exp(n)$.
Comme n est nilpotent alors $\exp(n)$ est unipotent (car l'exponentielle réalise une bijection entre les matrices nilpotentes et unipotentes) d'où $\exp(n) = id + n'$ avec n' nilpotente. On obtient alors :

$$\exp(u) = \exp(s) + \exp(s)n'$$

Vérifions que :

1. $\exp(s)$ est diagonalisable ;
2. $\exp(s)n'$ est nilpotente ;
3. $\exp(s)$ et $\exp(s)n'$ commutent.

1. Comme s est diagonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de s est diagonale, notons cette matrice D.
   La matrice de $\exp(s)$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors la matrice diagonale $\exp(D)$ puisque l'application :

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ u &\longmapsto mat_{\mathcal{B}}(u) \end{aligned}$$

   est un homéomorphisme car ψ est linéaire donc continue puisque définie sur un espace vectoriel de dimension finie.

2. et 3. Comme s et n commutent, alors $\exp(s)$ et $\exp(n)$ commutent. Ainsi les endomorphismes $\exp(s)$ et $n' = \exp(n) - id$ commutent, on en déduit donc que $\exp(s)$ et $\exp(s)n'$ commutent.
   De ce dernier point, on déduit que pour tout l, $(\exp(s)n')^l = (\exp(s))^l (n')^l$, ainsi comme n' est nilpotent alors $\exp(s)n'$ l'est aussi.

L'unicité de la décomposition de Dunford permet de conclure que la décomposition de Dunford de $\exp(u)$ est $\exp(s) + \exp(s)n'$.

Étape 2 Montrons que u est diagonalisable si et seulement si $\exp(u)$ l'est.
Commençons par caractériser la diagonalisabilité d'un endomorphisme à l'aide de sa décomposition de Dunford.
Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la partie nilpotente dans sa décomposition est nulle.
En effet :

($\Rightarrow$) Si u est diagonalisable alors on vérifie que $u = u + 0$ est sa décomposition de Dunford, ce qui est le cas puisque u est diagonalisable, 0 est nilpotent et u et 0 commutent.

($\Leftarrow$) Si $u = d + n$ est la décomposition de Dunford de u et que $n = 0$. Alors $u = d$ est diagonalisable.

Montrons maintenant la proposition.

($\Rightarrow$) Si u est diagonalisable, on a déjà vu dans l'étape 1 qu'alors $\exp(u)$ est diagonalisable. On peut cependant effectuer une autre preuve, car si u est diagonalisable alors $u = d + n$ avec $n = 0$ donc $\exp(n) = id$ et $n' = 0$. On a donc $\exp(s)n' = 0$, la partie nilpotente de la décomposition de Dunford de $\exp(u)$ est donc nulle, d'où $\exp(u)$ diagonalisable.

($\Leftarrow$) Si $\exp(u)$ est diagonalisable, alors $\exp(s)n' = 0$. Comme $\exp(s)$ est inversible (une exponentielle est toujours inversible), on en déduit que $n' = 0$. On a donc $\exp(n) = id$ et comme $\exp : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{U}$ est bijective alors $n = 0$, d'où u est diagonalisable.

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* HK, 2005.