

Marches aléatoires sur les groupes discrets après Mikhail
Gromov

Ophélie ROUBY

Rapport de stage, juin-août 2011

Table des matières

Introduction	5
Présentation du stage	5
Présentation du rapport	5
1 Marches aléatoires sur les groupes discrets	7
Introduction	7
1.1 Notions préliminaires	7
1.1.1 Premières définitions	7
1.1.2 Marche aléatoire sur un groupe	9
1.1.3 Frontière des marches aléatoires	11
Bilan	14
1.2 Critère entropique	14
1.2.1 Entropie	14
1.2.2 Critère de trivialité de la frontière	16
1.2.3 Applications du critère entropique	17
Bilan	20
1.3 Théorème de Shannon pour les marches aléatoires	20
1.3.1 Marches aléatoires et endomorphismes admettant une mesure σ -finie	20
1.3.2 Théorème de Shannon	21
1.3.3 Corollaires du théorème de Shannon	22
Bilan	24
1.4 Entropie différentielle et transformée de Radon-Nikodym	24
1.4.1 Distance de Kullback-Leibler et entropie	24
1.4.2 μ -entropie d'un G -espace	25
1.4.3 Transformée de Radon-Nikodym	28
Bilan	31
1.5 Convolutions et frontière triviale; Conjecture de Furstenberg	31
1.5.1 Trivialité de la frontière et distribution uniforme	32
1.5.2 Convergence des convolutions vers une moyenne invariante	32
1.5.3 Convolutions et Moyennabilité	34
1.5.4 Conjecture de Furstenberg	35
Bilan	36
Conclusion	36
2 Étude de la frontière des groupes hyperboliques	37
Introduction	37
2.1 Marches aléatoires sur les groupes et frontière de Poisson	37
2.1.1 Marche aléatoire sur un groupe	37
2.1.2 Espace des chemins simples	38
2.1.3 Frontière de Poisson	38
2.1.4 Décalage de Bernoulli	40
2.1.5 μ -frontière	40
2.1.6 μ -maximalité	40
Bilan	41
2.2 Compactification des groupes et μ -frontière	41
2.2.1 Compactification d'un groupe	41
2.2.2 Une première utilisation des conditions (1) et (2)	41

2.2.3	Sous-groupe élémentaire	42
2.2.4	Un résultat fondamental	42
	Bilan	43
2.3	Mesures conditionnelles et transformée de Doob	43
2.3.1	Transformée de Doob	43
2.3.2	Système canonique de mesures conditionnelles par rapport à la frontière de Poisson	44
2.3.3	Système canonique de mesures conditionnelles par rapport aux μ -frontières	45
	Bilan	46
2.4	Entropie conditionnelle et maximalité des μ -frontières	46
2.4.1	Entropie d'une partition mesurable	46
2.4.2	Entropie conditionnelle	47
2.4.3	Comparaison des entropies conditionnelles	48
2.4.4	Entropie asymptotique	49
2.4.5	Critère de maximalité d'une μ -frontière	50
	Bilan	50
2.5	Approximation des rayons	50
2.5.1	Jauge	50
2.5.2	Lemmes importants sur les jauges	52
2.5.3	Maximalité de la μ -frontière	52
2.5.4	Maximalité de la μ -frontière via l'approximation des rayons	53
	Bilan	54
2.6	Approximation des bandes	54
2.6.1	Espace des chemins bilatéraux	54
2.6.2	Décalage de Bernoulli	54
2.6.3	Frontière de Poisson de la mesure réflexive	55
2.6.4	Maximalité des μ -frontières via l'approximation des bandes	55
2.6.5	Corollaires du critère de maximalité	57
2.6.6	μ -maximalité de la compactification	58
	Bilan	59
2.7	Groupes hyperboliques	59
2.7.1	Groupe hyperbolique, espace hyperbolique	59
2.7.2	Critère de régularité des suites	60
2.7.3	Résultats préliminaires	62
2.7.4	Détermination de la frontière de Poisson via l'approximation des rayons	63
2.7.5	Détermination de la frontière de Poisson via l'approximation des bandes	63
	Bilan	65
	Conclusion	65
	Conclusion	67
	Bibliographie	68

Introduction

Présentation du stage

Ce stage a été effectué au Mathematical Institute de la ville d'Oxford au Royaume-Uni pendant une durée de deux mois, sous la direction de Cornelia Drutu et dans le cadre de la deuxième année de magistère de l'Ens Cachan, antenne de Bretagne.

Présentation du rapport

Dans ce rapport, nous allons nous intéresser, comme le suggère le titre, aux marches aléatoires sur les groupes discrets après Mikhail Gromov. En effet, Mikhail Gromov a été l'un des premiers à s'intéresser aux marches aléatoires sur les groupes et nous allons voir ce qu'aujourd'hui nous pouvons en dire. Dans l'étude de ces marches aléatoires est introduite la notion de frontière et c'est cet objet géométrique qui va nous intéresser. En effet, le but d'effectuer une telle étude est de pouvoir classer les groupes selon si la frontière de marches aléatoires sur ceux-ci est triviale ou non.

Ainsi dans un premier chapitre, nous nous proposons d'étudier les marches aléatoires sur les groupes discrets et plus précisément des critères entropiques permettant d'obtenir la trivialité de la frontière de marches aléatoires sur ces groupes. Ensuite dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons au cas particulier des groupes hyperboliques pour lesquels nous montrerons que la frontière de marches aléatoires sur ces derniers n'est pas triviale.

Chapitre 1

Marches aléatoires sur les groupes discrets

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons nous intéresser au lien entre la trivialité de la frontière de marches aléatoires et l'entropie de ces marches aléatoires. Ainsi, nous pourrons déterminer la trivialité de la frontière de marches aléatoires pour plusieurs types de groupes.

1.1 Notions préliminaires

Dans cette partie, nous allons définir les notions de base dont nous aurons besoin par la suite, qui sont principalement celles de marche aléatoire sur un groupe et de frontière d'une marche aléatoire.

1.1.1 Premières définitions

Rappels de théorie des groupes

Commençons par rappeler des définitions de base sur les groupes.

Définition 1.1.1 *Un groupe topologique G est un groupe (muni de l'opération \cdot) pour lequel les applications :*

$$\begin{array}{ll} G \times G \longrightarrow G & G \longrightarrow G \\ (g, g') \longmapsto g \cdot g' & g \longmapsto g^{-1} \end{array}$$

sont continues.

Définition 1.1.2 *Un groupe topologique discret G est un groupe topologique vérifiant que pour tout élément $g \in G$, il existe une boule ouverte B contenant g qui ne contient aucun autre élément de G .*

Définition 1.1.3 *Une action d'un groupe G sur un ensemble X est une application :*

$$\begin{array}{l} \phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g \longmapsto (x \longmapsto g \cdot x) \end{array}$$

De plus l'action est dite transitive si elle ne possède qu'une seule orbite (on rappelle que l'orbite d'un élément $x \in X$ est définie par $O_x = \{g \cdot x, \quad g \in G\}$).

Introduisons maintenant les définitions de deux types de groupes que nous rencontrerons afin d'exemplifier ce que nous étudierons.

Définition 1.1.4 *Une suite de composition d'un groupe G est une suite finie $(H_i)_{i=0, \dots, n}$ de sous-groupes de G tels que :*

1. $H_0 = e$ et $H_n = G$;
2. $H_i \triangleleft H_{i+1}$, pour tout $0 \leq i \leq n$.

Définition 1.1.5 On dit qu'un groupe est nilpotent s'il admet une suite de composition :

$$\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$$

telle que : H_{i+1}/H_i soit inclus en tant que sous-groupe dans $\mathcal{Z}(G/H_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$ (avec \mathcal{Z} le centre du groupe, ie $\mathcal{Z}(G) = \{z \in G, \forall x \in G, x.z = z.x\}$).

Définition 1.1.6 On dit qu'un groupe G est résoluble s'il admet une suite de composition à facteurs commutatifs, ie H_{i+1}/H_i est abélien pour tout $i = 0, \dots, n$.

Rappels de théorie de la mesure

Maintenant, effectuons également quelques rappels de notions fondamentales en théorie de la mesure.

Définition 1.1.7 Soit X un ensemble. On appelle tribu (ou σ -algèbre) sur X un ensemble \mathcal{A} de parties de X vérifiant :

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$;
2. \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire ;
3. \mathcal{A} est stable par union dénombrable.

Définition 1.1.8 Une mesure sur un groupe G est une application $\mu : \mathcal{B}(G) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ (où $\mathcal{B}(G)$ représente les boréliens de G) telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. si (A_j) est une famille dénombrable de boréliens deux à deux disjoints, alors $\mu(\cup A_j) = \sum \mu(A_j)$.

Une mesure est dite de probabilité si $\mu(G) = 1$.

Définition 1.1.9 Une mesure complexe sur un groupe G est une application $\mu : \mathcal{B}(G) \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ telle que :

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. si (A_j) est une famille dénombrable de boréliens deux à deux disjoints tels que leur réunion soit bornée, alors on a, avec convergence absolue du terme de droite :

$$\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j)$$

Définitions de base sur les groupes et les mesures

Introduisons maintenant quelques définitions sur les groupes et les mesures qui nous seront utiles, en tenant compte du fait que dans toute la suite on désignera par G un groupe (on omettra de préciser topologique) discret infini dénombrable d'élément neutre e et par μ une mesure de probabilité.

Remarque : Comme G est un groupe discret dénombrable alors les parties de G et les boréliens de G coïncident, ie $\mathcal{P}(G) = \mathcal{B}(G)$.

Définition 1.1.10

La paire (G, μ) est appelée un groupe muni d'une mesure.

Le support de la mesure μ , noté $\text{supp } \mu$, est défini par : $\text{supp } \mu = \{g \in G, \mu(g) > 0\}$.

La réflexion de la mesure μ , notée $\hat{\mu}$, est définie par : $\hat{\mu}(g) = \mu(g^{-1}), \forall g \in G$.

La mesure μ est dite :

- non dégénérée si le semi-groupe engendré par son support est G tout entier ;
- à support fini, si $\text{supp } \mu$ est fini ;
- symétrique si $\mu = \hat{\mu}$.

Dans toute la suite on considérera une mesure μ non dégénérée. On rappelle aussi qu'un semi-groupe est un ensemble muni d'une opération étant seulement associative.

Définition 1.1.11 *Le produit cartésien infini du groupe G avec lui-même sera noté G^∞ . Les éléments de ce produit $y = (y_0, y_1, y_2, \dots)$ sont appelés trajectoires et l'ensemble G^∞ est appelé l'espace des trajectoires (ou l'espace des chemins simples).*

Proposition 1.1.1 *L'espace des trajectoires G^∞ admet naturellement pour topologie, la topologie produit des topologies discrètes de chacun de ses facteurs. Cette topologie est métrisable, séparable et complète, donc G^∞ est un espace Polonais.*

Définition 1.1.12

Les applications coordonnées de G^∞ à valeurs dans G seront notées :

$$C^n : G^\infty \longrightarrow G$$

$$y = (y_0, y_1, \dots) \longmapsto y_n \quad \forall n \geq 0$$

Les sous-ensembles cylindriques de G^∞ (ces sous-ensembles sont constitués de trajectoires atteignant des points fixés de G à des temps fixés) sont définis par :

$$C_g^n = \{y \in G^\infty, C^n(y) = g\}$$

représentant l'ensemble des trajectoires atteignant le point g au temps fixé n .

$C_{g_1, \dots, g_k}^{n_1, \dots, n_k} = \bigcap_{i=1}^k C_{g_i}^{n_i}$ est l'ensemble des trajectoires atteignant une suite finie de points à des temps fixés.

$C_y^{n_1, \dots, n_k} = \bigcap_{i=1}^k C_{g_i}^{n_i}$, où $g_i = C^{n_i}(y)$ est l'ensemble des trajectoires atteignant les mêmes points qu'une trajectoire fixée y aux temps fixés n_i .

Dans toute la suite $C^n(y)$ (la n -ième coordonnée de la trajectoire y) sera simplement notée y_n .

1.1.2 Marche aléatoire sur un groupe

Maintenant, nous allons définir de nouveaux concepts et c'est sur ceux-ci que nous allons travailler dans tout ce rapport.

Définition 1.1.13 *La marche aléatoire (G, μ) à droite sur le groupe G , déterminée par la mesure de probabilité μ , est la chaîne de Markov homogène d'espace d'états G et de probabilités de transition :*

$$p(g|h) = p(h, g) = \mu(h^{-1}g), \quad \forall g, h \in G$$

qui sont invariantes sous l'action canonique à gauche de G sur lui-même.

Définition 1.1.14 *Une mesure μ est dite G -invariante ou invariante par l'action à gauche de G sur lui-même, si :*

$$\forall g \in G, \quad \forall A \in \mathcal{B}(G), \quad \mu(g.A) = \mu(A)$$

Remarques :

- En d'autres termes, la position de la marche aléatoire peut être obtenue si l'on connaît sa position précédente en la multipliant à droite par un élément indépendant et aléatoire du groupe qui admet la distribution μ .
- On remarque qu'ici on définit la marche aléatoire seulement à partir de ses probabilités de transition, on ne donne pas de distribution initiale, d'où la notation de cette dernière : (G, μ) .
- La marche aléatoire à gauche se définit de la même façon, avec pour probabilités de transition : $\hat{p}(g|h) = \mu(gh^{-1})$. Or on sait que $\hat{p}(g^{-1}|h^{-1}) = \hat{\mu}(h^{-1}g)$, donc en remplaçant μ par sa réflexion, on peut se ramener à l'étude des marches aléatoires à droite.

Ainsi dans toute la suite, on considérera uniquement des marches aléatoires à droite et on ne précisera plus à droite.

Si la distribution initiale de la marche aléatoire est concentrée en un élément $g \in G$ alors la mesure de Borel ${}_g\mathbb{P}^\mu$ apparaît sur l'espace des trajectoires G^∞ , cette dernière étant définie comme suit :

Définition 1.1.15 La mesure de Borel ${}_g\mathbb{P}^\mu$ (pour $g \in G$) est définie comme étant l'image de la mesure produit $\mu^\infty = \mu \times \mu \times \dots$ sur le produit cartésien infini $\prod_{i=1}^\infty G$ par l'application :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^\infty G &\longrightarrow G^\infty \\ (x_1, x_2, \dots) &\longmapsto (g, gx_1, gx_1x_2, \dots) \end{aligned}$$

Définition 1.1.16 La mesure ${}_e\mathbb{P}^\mu$ correspond à la distribution initiale δ_0 et est celle que nous rencontrerons le plus souvent, elle sera donc notée seulement \mathbb{P}^μ .

Définition 1.1.17 Une distribution initiale arbitraire θ détermine sur l'espace des trajectoires la mesure :

$${}_\theta\mathbb{P}^\mu = \sum_{g \in G} \theta(g) {}_g\mathbb{P}^\mu$$

Définition 1.1.18 La convolution $\mu * \mu'$ de deux mesures μ et μ' sur le groupe G est définie comme étant l'image de la mesure produit $\mu \times \mu'$ sur $G \times G$ par l'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1x_2 \end{aligned}$$

On notera μ_n la n -ième convolution de μ avec elle-même et souvent on notera également μ_0 à la place de δ_0 .

Remarque : La définition précédente nous permet de remarquer que la distribution unidimensionnelle $\theta * \mu_n$ de la mesure ${}_\theta\mathbb{P}^\mu$ au temps $n \geq 0$ peut être écrite de la façon suivante :

$$C^n \circ {}_\theta\mathbb{P}^\mu = \theta * \mu_n$$

Définissons d'une façon plus facile pour les calculs la convolution de deux mesures :

Définition 1.1.19 Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur un groupe X . On définit leur convolution pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ par :

$$\begin{aligned} \mu * \nu(A) &= \int \mu(Ax^{-1}) d\nu(x) \\ &= \int \nu(x^{-1}A) d\mu(x) \end{aligned}$$

De plus pour tout point $x \in X$, on note par x la mesure dégénérée du point x et par $\mu * x$ la translation à droite de la mesure μ par x et on a alors pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$(\mu * x)(A) = \mu(Ax^{-1})$$

Remarque : Pour simplifier l'écriture de certaines formules, on omettra de mettre le symbole $*$.

On pose maintenant $\ell^1(G, \mathbb{C})$ le groupe d'algèbre du groupe G sur le corps \mathbb{C} .

La mesure $\mu = \sum \mu(g)\delta_g$ est un élément du groupe d'algèbre, de plus μ définit un opérateur linéaire P^μ sur chaque représentation de l'espace G (en particulier sur $\ell^1(G)$, $\ell^2(G)$, $\ell^\infty(G)$, ...) qui est défini comme suit :

Définition 1.1.20 L'opérateur P^μ agit sur tous les espaces de fonctions de G via :

$$P^\mu f(g) = \sum_x f(gx)\mu(x) = \int f(y_1) d_g\mathbb{P}^\mu(y)$$

ie P^μ agit sur $\ell^\infty(G)$ et est l'opérateur de Markov de la marche aléatoire (G, μ) (on remarque que P^μ est positif et que la fonction indicatrice \mathbb{I} est invariante sous P^μ).

Remarques :

- La mesure conditionnelle \mathbb{P}^μ de l'ensemble A_1 donnant la condition A_2 sera notée $\mathbb{P}^\mu(A_1|A_2)$. Par exemple $\mathbb{P}^\mu(C_g^n|C_h^k)$ est la probabilité conditionnelle d'atteindre le point g au temps n pour des trajectoires atteignant le point h au temps k . On peut d'ailleurs déduire la formule suivante (car μ est définie comme une chaîne de Markov) :

$$\mathbb{P}^\mu(C_g^{n+1}|C_h^n) = \mu(h^{-1}g)$$

- L'espace mesurable $(G^\infty, \mathbb{P}^\mu)$ et tous ses quotients sont des espaces de Lebesgue.

Exemple : Un exemple simple de marche aléatoire sur un groupe peut être construit sur le groupe discret dénombrable \mathbb{Z} muni de l'addition.

En effet, on peut considérer sur \mathbb{Z} la marche aléatoire définie par :

$$\mu(-x+y) = p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } y = x+1 \text{ et si } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette marche aléatoire est bien définie puisque les probabilités de transition ci-dessus, considérées sur \mathbb{Z} , nous donnent bien une chaîne de Markov.

1.1.3 Frontière des marches aléatoires

Dans ce paragraphe, nous allons introduire la définition de la frontière d'une marche aléatoire sur un groupe, puis nous définirons plusieurs types de frontières. Cependant, dans ce chapitre, les résultats que nous énoncerons seront vérifiés pour une frontière en général. En fait, l'intérêt de définir plusieurs types de frontières est de pouvoir choisir celle qui nous arrange lorsqu'on étudie un groupe discret en particulier.

Définition 1.1.21 Soit (G, μ) une marche aléatoire sur G . Cette marche aléatoire définit alors un G -espace (ie un espace sur lequel G agit) mesurable Γ muni d'une mesure de probabilité quasi-invariante, μ -stationnaire ν , ie :

$$\nu(A) = \mu * \nu(A) = \sum_g \nu(g^{-1}A)\mu(g) \quad \text{avec } A \subset \Gamma$$

On définit alors la frontière de la marche aléatoire (G, μ) comme étant le G -espace mesurable (Γ, ν) .

Définition 1.1.22 Une mesure μ sur G est dite G -quasi-invariante (ou quasi-invariante par rapport à G) si :

$$\forall g \in G, \quad \forall A \in \mathcal{B}(G), \quad g\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$$

Remarque : On dira d'une frontière qu'elle est triviale si son cardinal vaut zéro, un ou deux.

Nous allons maintenant étudier différents types de frontière.

Frontière stationnaire

Introduisons un premier type de frontière, la frontière stationnaire.

Définition 1.1.23 Un sous-ensemble mesurable de l'espace des trajectoires $A \subset G^\infty$ est dit stationnaire s'il contient pour presque toute trajectoire y , toutes les trajectoires y' pouvant être obtenues à partir de y en décalant ses coordonnées et en remplaçant un nombre fini de coordonnées, ie toute trajectoire y' telle que $y'_{n+k} = y_n$ pour tout n suffisamment grand et tout k fixé.

La σ -algèbre \mathcal{S} des classes d'ensembles stationnaires est appelée la σ -algèbre stationnaire.

Définition 1.1.24 Un sous-ensemble $\alpha \subset G$ est appelé un μ -piège (ou piège si μ est fixée) si la limite :

$$\lim_n \mathbb{I}_\alpha(y_n)$$

existe pour \mathbb{P}^μ -presque toutes les trajectoires $y \in G^\infty$, ie si presque toute trajectoire est entièrement contenue dans α pour des temps suffisamment grand ou n'atteint jamais l'infini.

Les pièges α et α' sont dits équivalents si leur différence symétrique $\alpha \Delta \alpha' = (\alpha \cup \alpha') \setminus (\alpha \cap \alpha')$ est un ensemble complètement transitif, ie :

$$\mathbb{P}^\mu(y \in G^\infty, \quad \lim_n \mathbb{I}_{\alpha \Delta \alpha'}(y_n) = 0) = 1$$

Remarque : Les classes de pièges ainsi définies forment une algèbre booléenne.

Proposition 1.1.2 *L'application $\alpha \mapsto A(\alpha) = \{y \in G^\infty, \lim_n \mathbb{I}_\alpha(y_n) = 1\}$ définit un isomorphisme entre l'algèbre booléenne des classes de pièges et celle des classes d'ensembles stationnaires.*

Définition 1.1.25 *La frontière stationnaire (Γ, μ) de la marche aléatoire (G, μ) est l'espace quotient de l'espace mesurable $(G^\infty, \mathbb{P}^\mu)$ par la partition mesurable liée à la σ -algèbre stationnaire \mathcal{S} . L'application canonique associée sera notée bnd , ie $\text{bnd} : G^\infty \rightarrow \Gamma$. Cette application détermine sur Γ la mesure de probabilité $\nu = \text{bnd}(\mathbb{P}^\mu)$ qui est G -quasi-invariante et μ -stationnaire.*

La mesure ν sera appelée mesure de sortie de la marche aléatoire.

Définition 1.1.26 *Les mesures conditionnelles \mathbb{P}_γ^μ sur l'espace des trajectoires pour presque tout $\gamma \in \Gamma$ sont définies par :*

$$\mathbb{P}^\mu(C|A) = \frac{1}{\mathbb{P}^\mu(A)} \int_A \mathbb{P}_\gamma^\mu(C) d\nu(\gamma)$$

pour tout ensemble non trivial, stationnaire $A \subset G^\infty$ et tout ensemble cylindrique $C \subset G^\infty$.

Ces mesures \mathbb{P}_γ^μ sont de Markov pour presque tout $\gamma \in \Gamma$ et déterminent des chaînes de Markov homogènes (en temps, mais pas en espace) sur G de probabilités de transition :

$$\mathbb{P}_\gamma^\mu(C_g^{n+1}|C_h^n) = \mathbb{P}^\mu(C_g^{n+1}|C_h^n) \frac{dg\nu}{dh\nu}(\gamma) \quad (1.1)$$

Remarque : Ce qu'on a appelé dans la définition précédente l'homogénéité en temps est en fait l'homogénéité standard des Chaînes de Markov, tandis que l'homogénéité en espace se définit comme suit :

Définition 1.1.27 *Un opérateur de Markov P est dit homogène en espace s'il existe un groupe G localement compact de permutations de X qui agit transitivement sur X et laisse invariant P , ie :*

$$p(gx, gy) = p(x, y), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall g \in G$$

Frontière de Poisson

Définissons maintenant la frontière de Poisson. Pour ce faire introduisons tout d'abord quelques définitions préliminaires.

Définition 1.1.28 *Soit \mathbb{K} un corps commutatif. Soit $(A, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.*

On dit que A est une \mathbb{K} -algèbre si l'opération \times est distributive par rapport à $+$ et bilinéaire, ie $\forall x, y, z \in A$ et $\forall a, b \in \mathbb{K}$:

1. $(x + y)z = xz + yz$;
2. $x(y + z) = xy + xz$;
3. $(ax)(by) = (ab)(xy)$.

Une algèbre est dite commutative si \times l'est.

Définition 1.1.29 *Une algèbre normée A est une \mathbb{K} -algèbre munie d'une norme $\| \cdot \|$ telle que $\forall x, y \in A$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$ et $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$.*

Définition 1.1.30 *Une algèbre de Banach $(A, +, \cdot, \times, \| \cdot \|)$ sur \mathbb{K} est une \mathbb{K} -algèbre normée telle que l'espace vectoriel normé sous-jacent soit un espace de Banach.*

Définition 1.1.31

Un caractère d'une algèbre de Banach A est un morphisme d'algèbres non nul $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$.

L'ensemble des caractères est noté $M(A)$ et est appelé le spectre de A .

Définition 1.1.32 *Une fonction à valeurs réelles sur le groupe G est dite μ -harmonique si l'égalité :*

$$f(g) = \sum_x f(gx)\mu(x)$$

est vraie $\forall g \in G$, ie si f est une fonction invariante par l'opérateur de Markov P^μ .

Définition 1.1.33 L'espace de Banach de toutes les fonctions bornées μ -harmoniques sur G (muni de la norme sup) sera noté H_μ^∞ . Cet espace peut être vu comme une algèbre de Banach commutative munie de la multiplication :

$$(f_1 \times f_2)(g) = \lim_x f_1(gx)f_2(gx)\mu_n(x)$$

Définition 1.1.34 L'espace de Poisson $\Pi_\mu(G)$ de la paire (G, μ) est défini comme étant le spectre de l'algèbre de Banach H_μ^∞ .

On peut aussi définir la mesure de probabilité $\widehat{\nu}$ (appelée le noyau de Poisson de μ) sur l'espace $\Pi_\mu(G)$ comme suit : soit $f \mapsto \widehat{f}$ la transformée de Gelfand de H_μ^∞ sur $C(\Pi_\mu)$, alors :

$$\int \widehat{f}(x)d\widehat{\nu}(x) = f(e)$$

Chaque fonction μ -harmonique bornée f admet une représentation de Poisson définie par :

$$f(g) = \int \widehat{f}(x)dg\widehat{\nu}(x) = \int f(x)\frac{dg\widehat{\nu}}{d\widehat{\nu}}(x)d\widehat{\nu}(x)$$

et cette formule constitue une forme explicite de la transformée de Gelfand de H_μ^∞ sur $C(\Pi_\mu) = L^\infty(\Pi_\mu, \widehat{\nu})$.

Définition - Proposition 1.1.1 L'espace de Poisson $(\Pi, \widehat{\nu})$ vu comme G -espace mesurable est canoniquement isomorphe à la frontière (Γ, ν) .

Frontière de Martin

Maintenant, nous allons présenter la frontière dite de Martin.

Définition 1.1.35 La frontière de Martin $\Delta(G, \mu)$ de la paire (G, μ) est définie comme étant la fermeture compacte de l'ensemble des fonctions μ -harmoniques extrémales positives sur G (normées par la condition $f(e) = 1$) dans la topologie de la convergence ponctuelle.

La frontière de Martin est un G -espace topologique définissant naturellement une action à gauche sur G .

Définition - Proposition 1.1.2 Soit f une fonction μ -harmonique, alors il existe une unique mesure représentative ν_f sur la frontière de Martin, ie :

$$f(g) = \int_{\Delta} h(g)d\nu_f(h), \quad \forall g \in G$$

On note la mesure représentative pour la fonction indicatrice \mathbb{I} par ν_1 et son support $\text{supp } \nu_1$ par Δ_1 .

Le compact Δ_1 est appelé la partie active de la frontière de Martin.

Ce compact Δ_1 vu comme un G -espace avec la mesure ν_1 est canoniquement isomorphe à la frontière (Γ, ν) .

Frontière de sortie

Pour finir, nous allons introduire la frontière de sortie.

Définition 1.1.36 Soit \mathcal{A}_n^∞ la σ -algèbre des sous-ensembles mesurables de l'espace des trajectoires $(G^\infty, \mathbb{P}^\mu)$, qui sont déterminés par les coordonnées y_n, y_{n+1}, \dots de la trajectoire y .

L'intersection $\mathcal{A}^\infty = \bigcap_n \mathcal{A}_n^\infty$ est appelée la σ -algèbre résiduelle (ou asymptotique) de la marche aléatoire.

Remarque : Un sous-ensemble mesurable $A \subset G^\infty$ appartient à \mathcal{A}^∞ si et seulement si le fait que la trajectoire $y \in G^\infty$ appartient à \mathcal{A}^∞ ne dépend pas de n'importe quel ensemble fini de coordonnées et est déterminé seulement par son comportement à l'infini.

Définition - Proposition 1.1.3 La σ -algèbre résiduelle de la marche aléatoire (G, μ) coïncide avec la σ -algèbre stationnaire \mathcal{S} , ie la frontière de sortie de la marche aléatoire $(G^\infty, \mathbb{P}^\mu)/\mathcal{A}^\infty$ est canoniquement isomorphe à la frontière (Γ, ν) vu comme espace mesurable.

Bilan

Nous sommes maintenant en mesure de commencer l'étude de la trivialité de la frontière de marches aléatoires sur des groupes puisque nous avons défini les outils nécessaires à cette étude.

1.2 Critère entropique

Dans cette partie, nous allons énoncer un critère faisant intervenir l'entropie d'une mesure de probabilité, permettant de prouver la trivialité de la frontière de marches aléatoires sur un groupe. Puis nous verrons que ce critère permet de déterminer pour certains types de groupes la trivialité de marches aléatoires sur ces derniers.

1.2.1 Entropie

Définissons tout d'abord l'entropie d'une mesure de probabilité, puis celle d'une marche aléatoire et énonçons quelques propriétés de celles-ci.

Définition 1.2.1 *Soit G un groupe discret dénombrable.*

L'entropie de la mesure de probabilité μ sur G sera notée $H(\mu)$ et est définie par :

$$H(\mu) = - \sum_{\{g \in \text{supp } \mu\}} \mu(g) \log \mu(g)$$

Remarque : Comme μ est une mesure de probabilité alors $0 \leq \mu(g) \leq 1$ pour tout $g \in G$, d'où $H(\mu) \geq 0$ (et est éventuellement infinie).

La proposition qui suit nous permet d'estimer l'entropie de la convolution de deux mesures de probabilité sur G .

Proposition 1.2.1 *Soient μ et μ' deux mesures de probabilité sur le groupe G ayant des entropies finies, alors l'entropie de leur convolution est également finie et on a :*

$$H(\mu * \mu') \leq H(\mu) + H(\mu')$$

DÉMONSTRATION

Soient μ et μ' deux mesures de probabilité sur G ayant leurs entropies finies. On sait que l'application canonique ϕ :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto g_1 g_2 \end{aligned}$$

transforme le produit direct $\mu \times \mu'$ en la convolution $\mu * \mu'$, ie $\mu * \mu'(g_1, g_2) = \mu \times \mu'(g_1 g_2)$. Ainsi si $(g_1, g_2) \in \text{supp } \mu * \mu'$, alors $g_1 g_2 \in \text{supp } \mu \times \mu'$, autrement dit $\phi(\text{supp } \mu * \mu') \subset \text{supp } \mu \times \mu'$.

Maintenant démontrons la relation $H(\mu \times \mu') = H(\mu) + H(\mu')$, puis en utilisant l'inclusion des supports ci-dessus, on aura le résultat.

$$\begin{aligned} H(\mu \times \mu') &= - \sum_g (\mu \times \mu')(g) \log (\mu \times \mu')(g) \\ &= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1) \mu'(g_2) \log (\mu(g_1) \mu'(g_2)) \\ &= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1) \mu'(g_2) \log (\mu(g_1)) - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1) \mu'(g_2) \log (\mu'(g_2)) \\ &= - \sum_{g_2} \mu'(g_2) \sum_{g_1} \mu(g_1) \log \mu(g_1) - \sum_{g_1} \mu(g_1) \sum_{g_2} \mu'(g_2) \log \mu'(g_2) \\ &= \mu'(\text{supp } \mu') H(\mu) + \mu(\text{supp } \mu) H(\mu') \\ &= H(\mu) + H(\mu') \end{aligned}$$

car μ et μ' sont des mesures de probabilité.

Ensuite :

$$\begin{aligned}
H(\mu * \mu') &= - \sum_{(g_1, g_2) \in \text{supp } \mu * \mu'} \mu * \mu'(g_1, g_2) \log(\mu * \mu'(g_1, g_2)) \\
&= - \sum_{(g_1, g_2) \in \text{supp } \mu * \mu'} \mu \times \mu'(\phi(g_1, g_2)) \log(\mu \times \mu'(\phi(g_1, g_2))) \\
&= - \sum_{g \in \phi(\text{supp } \mu * \mu')} \mu \times \mu'(g) \log(\mu \times \mu'(g)) \\
&\leq \sum_{g \in \text{supp } \mu \times \mu'} \mu \times \mu'(g) \log(\mu \times \mu'(g)) \\
&= H(\mu \times \mu')
\end{aligned}$$

d'après l'inclusion des supports démontrée ci-dessus. D'où le résultat.

Dans toute la suite on fixe une mesure de probabilité μ sur G ayant une entropie $H(\mu)$ finie.

On notera les entropies de ses convolutions $H(\mu_n)$ par h_n (pour $n \geq 0$). Évidemment $h_0 = H(\mu_0) = H(\delta_0) = 0$.

La formule qui suit pour h_n nous sera utile par la suite :

$$h_n = H(\mu_n) = - \sum_{y_n \in \text{supp } \mu_n} \mu_n(y_n) \log \mu_n(y_n) = - \int \log \mu_n(y_n) d\mathbb{P}^{\mu}(y)$$

Ainsi la proposition (1.2.1) nous prouve également que les entropies h_n sont finies et la suite $\{h_n\}_n$ est sous-additive, ie :

$$h_{n+m} \leq h_n + h_m, \quad \forall n, m \geq 0$$

Ainsi la limite $\lim_n \frac{h_n}{n}$ existe (car $H(\mu_n) \leq nH(\mu)$ d'après la proposition (1.2.1), ie $\frac{H(\mu_n)}{n} \leq H(\mu)$).

Définition 1.2.2 Soit G un groupe discret dénombrable.

Soit μ une mesure de probabilité sur G ayant une entropie $H(\mu)$ finie.

Alors la limite : $h(G, \mu) = \lim_n \frac{H(\mu_n)}{n}$ est appelée l'entropie de la paire (G, μ) .

Remarque : Cette définition a le sens probabiliste suivant : asymptotiquement $h(G, \mu)$ est la quantité principale d'information contenue dans le produit $x_1 \dots x_n = y_n$ de n variables aléatoires indépendantes μ -distribuées à valeurs dans G .

Remarque : On peut montrer que si l'entropie $H(\mu)$ est infinie, alors toutes les entropies $h_n = H(\mu_n)$ sont aussi infinies.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent sur le groupe discret dénombrable \mathbb{Z} et déterminons l'entropie de la mesure μ .

$$\begin{aligned}
H(\mu) &= - \sum_g \mu(g) \log \mu(g) \\
&= - \sum_g \mu(-0 + g) \log \mu(-0 + g) \\
&= - \sum_g p(0, g) \log p(0, g)
\end{aligned}$$

Or par définition $p(0, g) \neq 0$ si $g = 1$ et si $g = -1$, d'où :

$$\begin{aligned}
H(\mu) &= -p(0, 1) \log p(0, 1) - p(0, -1) \log p(0, -1) \\
&= -\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \\
&= -\log \frac{1}{2} \\
&= \log 2
\end{aligned}$$

Donc l'entropie de la mesure de probabilité μ vaut $\log 2$.

1.2.2 Critère de trivialité de la frontière

Définissons maintenant l'entropie conditionnelle et établissons quelques résultats sur celle-ci afin d'arriver à l'énoncé du critère entropique.

Définition 1.2.3 Soient $\{\eta_n\}$ et $\{\alpha_n\}$ (pour $n \geq 1$) deux partitions mesurables sur l'espace des trajectoires $(G^\infty, \mathbb{P}^\mu)$ définies par :

$$\begin{aligned} y \stackrel{\eta_n}{\sim} y' &\Leftrightarrow \forall k \geq n, \quad y_k = y'_k \\ y \stackrel{\alpha_n}{\sim} y' &\Leftrightarrow \forall k \leq n, \quad y_k = y'_k \end{aligned}$$

Autrement dit deux trajectoires appartiennent au même élément de la partition η_n si leurs coordonnées d'indices $k \geq n$ coïncident et au même élément de la partition α_n si leurs segments initiaux (jusqu'à la n -ième coordonnée) coïncident.

Proposition 1.2.2 Les partitions α_n croissent et leur réunion $\bigvee_{n=1}^\infty \alpha_n$ est égale à ϵ (la partition de l'espace des trajectoires en points).

La suite $\{\eta_n\}$ est décroissante, la réunion mesurable $\bigvee_{n=1}^\infty \eta_n$ sera notée η .

Définition 1.2.4 La partition η est appelée partition résiduelle de la marche aléatoire (G, μ) (car la σ -algèbre des sous-ensembles η -mesurables coïncide avec la σ -algèbre résiduelle \mathcal{A}^∞ de la marche aléatoire).

Définition 1.2.5 On considère deux partitions mesurables ξ et ζ sur un espace de Lebesgue (X, m) . L'entropie conditionnelle moyenne de la partition ξ par rapport à la partition ζ est définie par :

$$H(\xi|\zeta) = - \int \log m(x, \xi|\zeta) dm(x)$$

où $m(x, \xi|\zeta)$ est la mesure conditionnelle de $\xi(x)$ (l'élément de ξ contenant x) par rapport à ζ .

Évaluons maintenant l'entropie conditionnelle moyenne des partitions α_k par rapport aux partitions η_k .

Proposition 1.2.3 Si $0 \leq k \leq n$, alors l'entropie conditionnelle moyenne de la partition α_k par rapport à la partition η_n vaut :

$$H(\alpha_k|\eta_n) = kh_1 + h_{n-k} - h_n$$

En particulier, on a :

$$H(\alpha_1|\eta_n) = h_1 + h_{n-1} - h_n$$

DÉMONSTRATION

Soit $0 \leq k \leq n$. Évaluons la mesure conditionnelle $\mathbb{P}^\mu(y, \alpha_k|\eta_n)$ lorsqu'une trajectoire $y \in G^\infty$ est fixée :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\mu(y, \alpha_k|\eta_n) &= \mathbb{P}^\mu(C_y^{0, \dots, k} | C_y^n) \quad \text{par définition des probabilités considérées et des ensembles } C_g^n; \\ &= \frac{\mathbb{P}^\mu(C_y^{0, \dots, k} \cap C_y^n)}{\mathbb{P}^\mu(C_y^n)} \quad \text{par définition de la probabilité conditionnelle;} \\ &= \frac{\mu(x_1) \dots \mu(x_k) \mu_{n-k}(y_k^{-1} y_n)}{\mu_n(y_n)} \quad \text{par définition des ensembles } C_g^n. \end{aligned}$$

D'où :

$$\log(\mathbb{P}^\mu(y, \alpha_k|\eta_n)) = \log(\mu(x_1) \dots \mu(x_k) \mu_{n-k}(y_k^{-1} y_n)) - \log(\mu_n(y_n))$$

Ainsi si on intègre par rapport à la mesure de probabilité \mathbb{P}^μ , on obtient :

$$\int \log(\mathbb{P}^\mu(y, \alpha_k|\eta_n)) d\mathbb{P}^\mu(y) = \int \log(\mu(x_1) \dots \mu(x_k) \mu_{n-k}(y_k^{-1} y_n)) d\mathbb{P}^\mu(y) - \int \log(\mu_n(y_n)) d\mathbb{P}^\mu(y)$$

Enfin par définition des h_i et de α_k , on obtient :

$$H(\alpha_k|\eta_n) = kh_1 + h_{n-k} - h_n$$

Remarque : Puisque la suite $\{\eta_n\}$ est décroissante, on a également pour $x \in G^\infty$:

$$\begin{aligned} m(x, \alpha_1 | \eta_n) &\geq m(x, \alpha_1 | \eta_{n+1}) \\ \log m(x, \alpha_1 | \eta_n) &\geq \log m(x, \alpha_1 | \eta_{n+1}) \\ - \int \log m(x, \alpha_1 | \eta_n) d\mathbb{P}^\mu(x) &\leq - \int \log m(x, \alpha_1 | \eta_{n+1}) d\mathbb{P}^\mu(x) \\ H(\alpha_1 | \eta_n) &\leq H(\alpha_1 | \eta_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où pour tout $n \geq 1$:

$$h_n - h_{n-1} \geq h_{n+1} - h_n \quad (1.2)$$

Proposition 1.2.4 *La suite $\{h_{n+1} - h_n\}$ décroît de façon monotone vers l'entropie $h(G, \mu)$.*

DÉMONSTRATION

En effectuant un rapprochement entre la formule (1.2) et la définition de $h(G, \mu)$, on obtient le résultat.

Procédons maintenant à l'énoncé du théorème principal de cette partie :

Théorème 1.2.5 *Soit G un groupe discret dénombrable.*

Soit μ une mesure de probabilité sur G d'entropie $H(\mu)$ finie.

Alors la frontière $\Gamma(G, \mu)$ de la marche aléatoire (G, μ) est triviale si et seulement si $h(G, \mu) = 0$.

DÉMONSTRATION

Puisque la suite de partitions η_n est décroissante et converge vers la partition résiduelle η , la suite des entropies conditionnelles moyennes $H(\alpha_k | \eta_n)$ converge vers $H(\alpha_k | \eta)$.

Ainsi en passant à la limite sur n dans la formule obtenue dans la proposition (1.2.3) et en appliquant la proposition (1.2.4), on obtient :

$$H(\alpha_k | \eta) = kH(\mu) - kh(G, \mu)$$

et en particulier :

$$H(\alpha_1 | \eta) = H(\mu) - h(G, \mu) \quad (1.3)$$

Puisque l'égalité $H(\xi | \zeta) = H(\xi)$ a lieu pour des partitions ξ ayant des entropies finies si et seulement si les partitions ξ et ζ sont indépendantes (ce résultat est montré dans [Roh67]), et puisque $H(\alpha_k) = kH(\mu)$, on obtient que $h(G, \mu) = 0$ si et seulement si les partitions α_k et η sont indépendantes pour tout k ; or cela signifie la trivialité de η et celle de la frontière $\Gamma(G, \mu)$ par la loi 0-1 de Kolmogorov.

Remarque : Ce théorème, au vu de la forme dans laquelle il a été donné, n'est pas applicable au cas où l'entropie $H(\mu)$ est infinie.

Exemple : Soit G est un groupe abélien et soit μ une mesure de probabilité sur G d'entropie $H(\mu)$ infinie.

Alors l'entropie $h(G, \mu)$ est infinie et la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est triviale d'après le théorème de Choquet-Deny (énoncé et démontré dans [CD60]), qui nous dit qu'un groupe abélien n'admet pas de fonction μ -harmonique bornée.

1.2.3 Applications du critère entropique

Maintenant appliquons le critère entropique que nous venons de voir afin de déterminer la trivialité de la frontière de marches aléatoires sur certains groupes selon leur croissance.

On considère désormais dans cette partie un groupe G ayant un nombre fini de générateurs et T un ensemble de ceux-ci.

On considère également la suite des puissances de T :

$$T^n = \{g = g_1 \times \dots \times g_n, g_i \in T\}$$

Définition 1.2.6 Le groupe G est dit à croissance exponentielle si :

$$\lim_n |T^n|^{\frac{1}{n}} > 1$$

et à croissance non-exponentielle sinon.

Si $|T^n| \leq Cn^d$ alors G est dit à croissance polynomiale de degré inférieur ou égal d (où C est une constante).

Remarque : On peut montrer que cette définition ne dépend pas de T .

Proposition 1.2.6 Soit G un groupe à croissance non-exponentielle.

Soit μ une mesure à support fini sur G .

Alors la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est triviale.

DÉMONSTRATION

Notons le support de μ par T . Puisque $\text{supp } \mu_n = T^n$, on obtient :

$$\begin{aligned} H(\mu_n) &= - \sum_{y_n \in \text{supp } \mu_n} \mu_n(y_n) \log(\mu_n(y_n)) \\ &\leq \log |T^n| \sum_{y_n \in \text{supp } \mu_n} \mu_n(y_n) \\ &\leq \log |T^n| \end{aligned}$$

De plus, la croissance non-exponentielle de G implique que :

$$\lim_n |T^n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

D'où

$$\lim_n \frac{1}{n} \log |T^n| = 0$$

Doù : $\log |T^n| = o(n)$.

Par conséquent, on a $h(G, \mu) = 0$ car $h(G, \mu) = \frac{h_n}{n} \leq \frac{\log |T^n|}{n} \rightarrow 0$.

Donc la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est triviale d'après le théorème (1.2.5).

Remarque : La trivialité de la frontière pour certaines classes de groupes exponentiels et pour certaines mesures à support non fini sur des groupes non-exponentiels peut aussi être obtenue en estimant l'entropie $H(\mu_n)$.

Exemple : Considérons de nouveau l'exemple sur le groupe dénombrable discret \mathbb{Z} et montrons que ce dernier admet une croissance non-exponentielle.

On a vu précédemment que $\text{supp } \mu = \{-1, 1\}$ et ce support engendre \mathbb{Z} , posons alors $T = \{-1, 1\}$ et déterminons T^n .

Pour ce faire on distingue alors deux cas :

cas 1 : n est pair, alors $T^n = \{-n, -n+2, \dots, 0, \dots, n-2, n\}$;

cas 2 : n est impair, alors $T^n = \{-n, -n+2, \dots, -1, 1, \dots, n-2, n\}$.

Dans tous les cas, on a $|T^n| = n+1$, d'où :

$$|T^n|^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \log(n+1)\right) \rightarrow 1$$

Donc le groupe \mathbb{Z} a une croissance non-exponentielle, ainsi d'après la proposition (1.2.6) la frontière de la marche aléatoire (\mathbb{Z}, μ) est triviale.

Définition 1.2.7 Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe G ayant un nombre fini de générateurs d'ensemble de générateurs T (contenant e).

On définit la mesure de probabilité κ sur \mathbb{Z} par :

$$\kappa(k) = \mu(T^k \setminus T^{k-1})$$

qui représente la mesure μ des mots dont la longueur est exactement k .

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 1.2.7 *Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe G ayant un nombre fini de générateurs d'ensemble de générateurs T (contenant e).*

Alors :

$$H(\mu_n) \leq - \sum_k \kappa_n(k) \log(\kappa_n(k)) \log(|T^k|) \quad (1.4)$$

où κ_n est la n -ième convolution de κ avec lui-même.

DÉMONSTRATION

Comme la mesure μ est non dégénérée, alors son support engendre G , d'où $\text{supp } \mu = T$ et ainsi $\text{supp } \mu_n = T^n$. De plus, comme $e \in T$, alors la suite des puissances de T est croissante, d'où $T^n = T^{n-1} \cup (T^n \setminus T^{n-1})$. Donc :

$$\begin{aligned} H(\mu_n) &= - \sum_{g \in T^n} \mu_n(g) \log \mu_n(g) \\ &= - \sum_{g \in T^{n-1} \cup (T^n \setminus T^{n-1})} \mu_n(g) \log \mu_n(g) \\ &= - \sum_{g \in T^{n-1}} \mu_n(g) \log \mu_n(g) - \sum_{g \in T^n \setminus T^{n-1}} \mu_n(g) \log \mu_n(g) \\ &= - \sum_{g \in T^{n-2}} \mu_n(g) \log \mu_n(g) - \sum_{g \in T^{n-1} \setminus T^{n-2}} \mu_n(g) \log \mu_n(g) - \sum_{g \in T^n \setminus T^{n-1}} \mu_n(g) \log \mu_n(g) \\ &= - \sum_k \left(\sum_{g \in T^k \setminus T^{k-1}} \mu_n(g) \log \mu_n(g) \right) \\ &= - \sum_k \kappa_n(k) \log \kappa_n(k) \\ &\leq - \sum_k \kappa_n(k) \log(\kappa_n(k)) \log(|T^k|) \end{aligned}$$

Remarque : L'inégalité (1.4) réduit le problème de la trivialité de la frontière au comportement asymptotique des convolutions sur le groupe des entiers et permet de prouver la trivialité de la frontière pour certaines classes de mesures à support non fini sur des groupes non-exponentiels.

Exemple : La trivialité de la frontière pour les groupes à croissance polynomiale avec une mesure arbitraire peut être déduite de la théorie de leurs structures. Tous les groupes polynomiaux sont des extensions finies de groupes nilpotents (d'après le théorème de Gromov) et la frontière d'un groupe nilpotent est triviale.

Conjecture 1 *Si on se donne un groupe exponentiel G , il existe une mesure symétrique (en général à support non fini) ayant une frontière non triviale.*

La notion de croissance pour des groupes ayant un nombre dénombrable de générateurs est plus délicate. Il est nécessaire d'introduire la notion de croissance uniformément polynomiale.

Définition 1.2.8 *Un groupe discret G admet une croissance uniformément polynomiale si pour tout $k \geq 0$, il existe un polynôme p_k tel que :*

$$|T^n| \leq p_k(n)$$

pour tout T constitué de k éléments.

Remarque : En d'autres termes p_k nous donne une estimation de la croissance uniforme pour des sous-groupes de G engendrés par k éléments.

Les degrés des polynômes p_k sont liés aux groupes qui sont polynomiaux dans le sens de la définition (1.2.6), mais en général les degrés des p_k ne sont pas liés entre eux.

Par analogie avec la définition précédente, on peut également définir :

Définition 1.2.9 *Un groupe discret G admet une croissance exponentiellement faible si :*

$$\lim_n \sup_{\{|T|=k\}} \frac{\log |T^n|}{n} = c_k > 0$$

pour un certain entier naturel k .

Bilan

Cette partie nous a permis d'énoncer un critère entropique qui peut s'appliquer à tous les types de groupes discrets et de voir son application sur ceux à croissance non-exponentielle. Ainsi selon leur croissance, les marches aléatoires sur les groupes admettent ou non une frontière triviale. Maintenant nous allons essayer d'élargir ce critère entropique.

1.3 Théorème de Shannon pour les marches aléatoires

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au théorème de Shannon et à plusieurs de ses corollaires qui vont nous permettre de mettre en exergue d'autres formules déterminant l'entropie d'une marche aléatoire. Ces différentes formules permettant, lors de l'étude d'un groupe discret en particulier, de choisir celle qui sera la plus aisée à utiliser.

1.3.1 Marches aléatoires et endomorphismes admettant une mesure σ -finie

Établissons tout d'abord un lien entre les marches aléatoires et les endomorphismes. Pour ce faire, on rappelle la définition suivante :

Définition 1.3.1 *Soit θ une mesure positive (non nécessairement de probabilité) sur un groupe G . On considère la mesure associée sur l'espace des trajectoires :*

$${}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu} = \sum_{g \in G} \theta(g) {}_g\mathbb{P}^{\mu}$$

Proposition 1.3.1 *La mesure ${}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu}$ est finie (ou σ -finie) simultanément avec la distribution initiale θ .*

Définition 1.3.2 *On définit le décalage temporel T de l'espace des chemins $G^{\mathbb{Z}_+}$ comme étant l'application :*

$$\begin{aligned} G^{\mathbb{Z}_+} &\longrightarrow G^{\mathbb{Z}_+} \\ \{y_n\} &\longmapsto \{y_{n+1}\} \end{aligned}$$

Remarque : En général T ne préserve pas la mesure ${}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu}$, ni même le type de mesure.

Proposition 1.3.2 *La mesure ${}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu}$ est T -invariante si et seulement si la mesure θ (vue comme une fonction sur G) est $\hat{\mu}$ -harmonique.*

DÉMONSTRATION

Supposons que la mesure ${}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu}$ est T -invariante, ie $T * {}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu} = {}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu}$.

Or on peut montrer que (cf la proposition (2.1.1) du chapitre 2) : $T * {}_{\theta}\mathbb{P}^{\mu} = {}_{\theta * P^{\mu}}\mathbb{P}^{\mu}$, ie $\theta(g) = \theta * P^{\mu}(g)$, d'où le fait que θ soit $\hat{\mu}$ -harmonique. Et inversement. D'où le résultat.

Remarque : Il n'existe pas de fonction μ -harmonique non nulle sommable sur les groupes infinis, ie chaque mesure T -invariante pour des groupes G infinis est seulement σ -finie. La mesure T -invariante σ -finie ${}_m\mathbb{P}^{\mu} = \sum_g {}_g\mathbb{P}^{\mu}$ correspond à la mesure de Haar m sur G .

Remarque : Beaucoup de propriétés des marches aléatoires peuvent être exprimées en termes d'endomorphismes T avec la mesure σ -finie ${}_m\mathbb{P}^{\mu}$.

Par exemple la conservativité de T est équivalente à la récurrence de la marche aléatoire, l'ergodicité de T à la trivialité de la frontière de sortie et le mélange des deux pour T à la trivialité de la frontière stationnaire de la marche aléatoire (G, μ) .

Donc l'entropie définie dans la partie précédente est la mesure de la non-ergodicité de l'endomorphisme T .

1.3.2 Théorème de Shannon

Énonçons maintenant le théorème de Shannon.

Théorème 1.3.3 *Supposons que l'entropie $H(\mu)$ d'une mesure de probabilité μ sur un groupe dénombrable G soit finie.*

Alors l'égalité :

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \mu_n(y_n) = -h(G, \mu)$$

est vraie pour \mathbb{P}^μ -presque toutes les trajectoires $y \in G^\infty$.

DÉMONSTRATION

Définissons tout d'abord une suite de fonctions mesurables sur l'espace des trajectoires pour $k \geq 0$ et $y \in G^\infty$ par :

$$\begin{aligned} \phi_k(y) &= \log \mathbb{P}^\mu(C_y^1 | \eta_{k+1}) \\ &= \log \mathbb{P}^\mu(C_y^1 | C_y^{k+1}) \quad \text{par définition de } \eta_{k+1}; \\ &= \log \frac{\mu(y_1) \mu_k(y_1^{-1} y_{k+1})}{\mu_{k+1}(y_{k+1})} \end{aligned}$$

et on pose : $\phi(y) = \log \mathbb{P}^\mu(C_y^1 | \eta)$.

Les fonctions ϕ_k et ϕ sont le logarithme de probabilités conditionnelles de la première coordonnée y_1 de la trajectoire y par rapport aux σ -algèbres \mathcal{A}_{k+1} et \mathcal{A}_∞ .

Ainsi par le théorème de convergence pour les probabilités conditionnelles, on obtient :

$$\phi_k(y) \longrightarrow \phi(y)$$

\mathbb{P}^μ -presque partout.

Cette convergence peut également être établie dans $L^1(\mathbb{P}^\mu)$. Puisque :

$$\int \phi_k(y) d\mathbb{P}^\mu(y) = -H(\alpha_1 | \eta_{k+1})$$

et

$$\int \phi(y) d\mathbb{P}^\mu(y) = -H(\alpha_1 | \eta)$$

et $H(\alpha_1 | \eta_k) \longrightarrow H(\alpha_1 | \eta)$, d'où :

$$\int \phi_k(y) d\mathbb{P}^\mu(y) \longrightarrow \int \phi(y) d\mathbb{P}^\mu(y)$$

De plus les fonctions ϕ_k sont négatives (car elles sont définies comme étant le logarithme de probabilités), d'où la convergence de ϕ_k vers ϕ dans $L^1(\mathbb{P}^\mu)$.

Écrivons maintenant $\mu_n(y_n)$ comme étant :

$$\mu_n(y_n) = \frac{\mu_n(y_n)}{\mu_{n-1}(y_1^{-1} y_n)} \frac{\mu_{n-1}(y_1^{-1} y_n)}{\mu_{n-2}(y_2^{-1} y_n)} \cdots \frac{\mu_2(y_{n-2}^{-1} y_n)}{\mu(y_{n-1}^{-1} y_n)} \mu(y_{n-1}^{-1} y_n)$$

Alors on a :

$$\log \mu_n(y_n) = \sum_{i=1}^n \log \mu(y_{i-1}^{-1} y_i) - \sum_{i=1}^n \phi_{n-i}(U^{i-1} y)$$

où U est la mesure ergodique préservant la transformation sur l'espace des trajectoires $(G^\infty, \mathbb{P}^\mu)$ induite par le décalage de Bernouilli sur l'espace des incréments de la marche aléatoire, ie :

$$(Uy)_k = y_1^{-1} y_{k+1}, \quad \forall k \geq 0$$

(pour démontrer cette relation, il suffit de montrer auparavant par récurrence que : $(U^n y)_k = y_n^{-1} y_{n+k}$ et de passer au logarithme dans la première relation). À présent d'après le théorème ergodique de Birkhoff (cf théorème (1.3.4)), on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{n-i}(U^{i-1} y) \longrightarrow \int \phi(y) d\mathbb{P}^\mu(y) = h(G, \mu) - H(\mu)$$

est vraie pour presque toute trajectoire y .
Et puisque la relation :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \mu(y_{i-1}^{-1} y_i) \longrightarrow -H(\mu)$$

est vraie pour presque toute trajectoire y , on obtient l'égalité voulue.

Remarque : En fait nous avons aussi démontré la convergence de la suite $\frac{1}{n} \log \mu_n(y_n)$ vers $-h(G, \mu)$ dans l'espace $L^1(\mathbb{P}^\mu)$.

Remarque : Dans cette démonstration, nous avons utilisé le théorème de Birkhoff (que nous ne démontrerons pas ici) qui s'énonce de la façon suivante :

Théorème 1.3.4 *Soit T un endomorphisme ergodique de l'espace de probabilités (X, m) . Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable à valeurs réelles. Alors pour presque tout $x \in X$, on a :*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \circ T^i(x) \longrightarrow \int f dm$$

1.3.3 Corollaires du théorème de Shannon

Intéressons-nous désormais à certains corollaires du théorème de Shannon. Dans cette optique, dans tout ce paragraphe, nous allons supposer que l'entropie $H(\mu)$ est finie. L'entropie de la paire (G, μ) sera encore notée $h(G, \mu)$.

Corollaire 3.4.1 *La trivialité de la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est équivalente à la condition :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \mu_n(y_n) = 0$$

vraie pour \mathbb{P}^μ -presque toutes les trajectoires $y \in G^\infty$.

DÉMONSTRATION

La démonstration découle directement du théorème (1.3.3) et du théorème (1.2.5).

Remarque : Kesten avait introduit la condition :

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \mu_n(e) = 0$$

sur la paire (G, μ) qui est équivalente (si μ est non dégénérée et symétrique) à la moyennabilité de G (nous verrons dans la dernière partie de façon plus précise ce qu'est un groupe moyennable). Nous verrons que la condition donnée dans le corollaire est plus forte que la condition de Kesten. Ainsi la probabilité de retourner à e semble devenir un événement atypique dans une échelle logarithmique pour certains groupes.

Exemple : La condition de Kesten pour prouver qu'un groupe est moyennable s'applique aisément à notre exemple de marche aléatoire sur \mathbb{Z} . En effet pour $n \in \mathbb{N}$, déterminons $\mu_n(0) = p^n(0, 0)$. On distingue deux cas :

- cas 1 : si n est impair, alors $\mu_n(0) = 0$;
- cas 2 : si n est pair, alors en posant $n = 2m$:

$$\begin{aligned} p^{2m}(0, 0) &= \frac{\text{nombre de possibilités de choisir } +1 \text{ } m \text{ fois et de choisir } -1 \text{ } m \text{ fois}}{\text{nombre de possibilités de choisir } +1 \text{ et } -1 \text{ } 2m \text{ fois}} \\ &= \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} \end{aligned}$$

D'où d'après la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}\mu_{2m}(0) &\simeq \frac{1}{2^{2m}} \frac{\sqrt{2\pi 2m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left(\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m\right)^2} \\ &\simeq \frac{1}{2^{2m}} \frac{2\sqrt{\pi m}}{2\pi m} \left(\frac{2m}{e}\right)^{2m} \left(\frac{e}{m}\right)^{2m} \\ &\simeq \frac{1}{2^{2m}} \frac{\sqrt{\pi m}}{\pi m} 2^{2m} \\ &\simeq \frac{\sqrt{\pi m}}{\pi m}\end{aligned}$$

Donc dans tous les cas $\frac{1}{n} \log \mu_n(0) \rightarrow 0$. Donc \mathbb{Z} est un groupe moyennable et nous verrons dans la partie 5 quel résultat cela nous donne sur ce groupe.

Corollaire 3.4.2 *L'égalité :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k+1}) = -H(\alpha_1 | \eta) = h(G, \mu) - H(\mu)$$

est vraie pour \mathbb{P}^μ -presque toute trajectoire y , ie la valeur moyenne du logarithme des probabilités de transition converge vers $h(G, \mu) - H(\mu)$ le long de presque toutes les trajectoires.

DÉMONSTRATION

Pour $k \geq 0$ et $y \in G^\infty$, puisque :

$$\mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k+1}) = \frac{\mathbb{P}^\mu(C_y^k)}{\mathbb{P}^\mu(C_y^{k+1})} \mu(y_k^{-1} y_{k+1})$$

alors on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k+1}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \log \mu(y_k^{-1} y_{k+1}) + \log \mu_1(y_1) - \log \mu_{n+1}(y_{n+1}) \right) \rightarrow -H(\mu) + h(G, \mu)$$

Corollaire 3.4.3 *L'égalité :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k-1}, \eta) = -H(\alpha_1 | \eta)$$

est vraie pour \mathbb{P}^μ -presque toutes les trajectoires y de la marche aléatoire.

DÉMONSTRATION

Puisque les probabilités de transition de la marche aléatoire sont invariantes par l'action à gauche de G sur lui-même, on a pour $k \geq 0$ et $y \in G^\infty$:

$$\mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k-1}, \eta) = \mathbb{P}^\mu(C_{y'}^1, \eta)$$

où $y' = U^{k-1}y$.

Donc en appliquant le théorème ergodique de Birkhoff (cf le théorème (1.3.4)) au décalage U on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k-1}, \eta) &= \int \log \mathbb{P}^\mu(C_y^1 | \eta) d\mathbb{P}^\mu(y) \\ &= -H(\alpha_1 | \eta)\end{aligned}$$

Remarque : En notant par y_∞ le point de sortie de la trajectoire y (ie $y_\infty = \text{bnd}(y)$) on peut écrire :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(y_k | y_{k-1}, y_\infty) = -H(\alpha_1 | \eta) = h(G, \mu) - H(\mu)$$

ie la valeur moyenne (le long des trajectoires) du logarithme des probabilités de cotransition pour presque toute marche conditionnelle est égale à $h(G, \mu) - H(\mu)$.

Corollaire 3.4.4 *L'égalité :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(y_k | y_{k+1}) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(y_k | y_{k-1}, y_\infty)$$

est vraie pour presque toute trajectoire y de la marche aléatoire, ie la valeur moyenne du logarithme des probabilités de transition et la valeur moyenne du logarithme des probabilités de cotransition pour des marches conditionnelles coïncident pour presque toutes les trajectoires.

DÉMONSTRATION

La démonstration découle des corollaires (3.4.2) et (3.4.3).

Corollaire 3.4.5 *L'égalité :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \frac{dy_n * \nu}{d\nu}(y_\infty) = h(G, \mu)$$

où $y_\infty = \text{bnd}(y)$ et ν est la mesure de sortie de Γ , est vraie pour presque toutes les trajectoires de la marche aléatoire.

DÉMONSTRATION

Grâce à la formule (1.1) de la première partie, on obtient :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k-1}, \eta) = \lim_n \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}^\mu(C_y^k | C_y^{k-1}) + \log \frac{dy_n \nu}{d\nu}(y_\infty) \right)$$

D'où par le corollaire (3.4.3) le résultat.

Bilan

Dans cette partie, nous avons étendu la portée du critère entropique en déterminant d'autres formules pour l'entropie conditionnelle d'une marche aléatoire. À présent, nous pouvons nous intéresser à d'autres moyens de déterminer la frontière d'une marche aléatoire sur un groupe discret.

1.4 Entropie différentielle et transformée de Radon-Nikodym

Dans cette partie, nous allons déterminer deux autres façons de trouver la frontière d'une marche aléatoire, l'une via la distance de Kullback-Leibler, l'autre via la μ -entropie.

1.4.1 Distance de Kullback-Leibler et entropie

Introduisons, pour commencer, la distance de Kullback-Leibler ainsi qu'une propriété sur celle-ci.

Définition 1.4.1 Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité équivalentes sur un espace mesurable X .

On définit leur distance de Kullback-Leibler par la quantité :

$$I(\nu_1 | \nu_2) = - \int \log \frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) d\nu_2(x)$$

Remarque : On rappelle que deux mesures de probabilité sont dites équivalentes si elles ont les mêmes ensembles négligeables.

Proposition 1.4.1

1. La distance de Kullback-Leibler est positive ou nulle (incluant l'infini).
2. Elle est nulle si et seulement si ν_1 et ν_2 concident.
3. En général, elle n'est pas symétrique, ie $I(\nu_1 | \nu_2) \neq I(\nu_2 | \nu_1)$.
4. Si X est un G -espace, alors l'action naturelle de G sur l'espace des mesures sur X préserve la distance, ie $I(g\nu_1 | g\nu_2) = I(\nu_1 | \nu_2)$, pour $g \in G$.

DÉMONSTRATION

Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité équivalentes sur X .

1. Par définition :

$$I(\nu_1|\nu_2) = - \int \log \frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) d\nu_2(x)$$

et $\frac{d\nu_1}{d\nu_2} \geq 0$ tandis que $\log \frac{d\nu_1}{d\nu_2} \leq 0$, donc par positivité de l'intégrale, on a $I(\nu_1|\nu_2) \geq 0$.

2. (\Leftarrow) Si $\nu_1 = \nu_2$, alors :

$$\begin{aligned} I(\nu_1|\nu_2) &= - \int \log \frac{d\nu_1}{d\nu_1}(x) d\nu_1(x) \\ &= - \int \log 1 d\nu_1(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Si $I(\nu_1|\nu_2) = 0$, par le théorème de nullité de l'intégrale, on a :

$$\forall x, \quad - \log \frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) = 0$$

D'où :

$$\forall x, \quad \frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) = 1$$

Donc $\nu_1 = \nu_2$.

3. Évident.

4. On obtient le résultat en effectuant le changement de variable $x \mapsto g.x$, pour $g \in G$.

Théorème 1.4.2 *Si l'entropie $H(\mu)$ de la mesure μ sur le groupe G est finie, alors :*

$$h(G, \mu) = - \sum_g \mu(g) \int \log \frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(\gamma) d\nu(\gamma) = \sum_g \mu(g) I(g^{-1}\nu|\nu)$$

En d'autres termes $h(G, \mu)$ est la distance moyenne (par rapport à g) entre les mesures $g^{-1} * \nu$ et ν .

DÉMONSTRATION

En utilisant la formule (1.1) de la première partie et la formule (1.3) de la deuxième partie, on a :

$$\begin{aligned} h(G, \mu) &= H(\mu) - H(\alpha_1|\eta) \quad \text{d'après la formule (1.3)}; \\ &= H(\mu) + \int \log \mathbb{P}^\mu(C_y^1|\eta) d\mathbb{P}^\mu(y) \quad \text{par définition de } H(\alpha_1|\eta); \\ &= H(\mu) + \int \log \left(\mathbb{P}^\mu(y) \frac{dy_1\nu}{d\nu}(\text{bnd}(y)) \right) d\mathbb{P}^\mu(y) \quad \text{d'après la formule (1.1)}; \\ &= H(\mu) + \sum_g \mu(g) \int \log \left(\mu(g) \frac{d\nu}{dg^{-1}\nu}(\gamma) \right) d\nu(\gamma) \quad \text{où } y_1 = g, \text{ bnd}(y) = g\gamma \text{ et car } \nu = \text{bnd}(\mathbb{P}^\mu); \\ &= - \sum_g \mu(g) \int \log \frac{dg^{-1}\nu}{d\nu}(\gamma) d\nu(\gamma) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

1.4.2 μ -entropie d'un G -espace

Définissons maintenant la μ -entropie et énonçons plusieurs propriétés sur cette dernière.

Définition 1.4.2 *Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité μ -stationnaire λ . La quantité :*

$$E(B, \mu, \lambda) = \sum_g \mu(g) I(g^{-1}\lambda|\lambda)$$

est appelée l'entropie de l'espace (B, λ) par rapport à μ (ou μ -entropie de la paire (B, λ)).

Proposition 1.4.3 *Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité μ -stationnaire λ . Alors :*

1. $E(B, \mu, \lambda) = 0$ si et seulement si λ est G -invariante.
2. De plus λ étant μ -stationnaire, on a également :

$$\frac{1}{\mu(g^{-1})} \geq \frac{dg^{-1} * \lambda}{d\lambda} \geq \mu(g)$$

DÉMONSTRATION

1. (\Leftarrow) Évident.
(\Rightarrow) Si $E(B, \mu, \lambda) = 0$, alors $\forall g, \mu(g)I(g^{-1}\lambda|\lambda) = 0$.
Or $g \in \text{supp } \mu$, d'où $\mu(g) \neq 0$, ie $\forall g, I(g^{-1}\lambda|\lambda) = 0$, ie $g^{-1}\lambda = \lambda$ d'après l'assertion (2) de la proposition (1.4.1).
2. Se déduit de la définition de la convolution des mesures λ et g^{-1} et de la μ -stationnarité de λ .

On peut également montrer la propriété suivante sur l'entropie de l'espace (B, λ) par rapport à μ :

Proposition 1.4.4 *Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité μ -stationnaire λ . Alors la μ -entropie $E(B, \mu, \lambda)$ satisfait l'inégalité :*

$$E(B, \mu, \lambda) \leq - \sum_g \mu(g) \log \mu(g) = H(\mu) \quad (1.5)$$

DÉMONSTRATION

On sait que :

$$\begin{aligned} E(B, \mu, \lambda) &= \sum_g \mu(g) I(g^{-1}\lambda|\lambda) \\ &= - \sum_g \mu(g) \int \log \frac{dg^{-1}\lambda}{d\lambda}(\gamma) d\lambda(\gamma) \\ &\leq - \sum_g \mu(g) \int \log \mu(g)(\gamma) d\lambda(\gamma) \quad \text{d'après l'assertion (2) de la proposition (1.4.3);} \\ &= H(\mu) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 1.4.5 *Soient μ et μ' deux mesures de probabilité sur G .*

Soit λ une mesure μ et μ' -stationnaire.

*Alors λ est stationnaire par rapport à la convolution $\mu * \mu'$ et à toutes combinaisons convexes des mesures μ et μ' .*

DÉMONSTRATION

Soient μ et μ' deux mesures de probabilité sur G . On considère :

$$\begin{aligned} (\mu * \mu')(\lambda) &= \sum_g (\mu * \mu')(g) g\lambda \\ &= \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1) \mu'(g_2) g_1 g_2 \lambda \\ &= \sum_{g_1} \mu(g_1) g_1 \sum_{g_2} \mu'(g_2) g_2 \lambda \\ &= \sum_{g_1} \mu(g_1) g_1 \mu' \lambda \\ &= \sum_{g_1} \mu(g_1) g_1 \lambda \quad \text{car } \lambda \text{ est } \mu'\text{-stationnaire;} \\ &= \mu \lambda \\ &= \lambda \quad \text{car } \lambda \text{ est } \mu\text{-stationnaire.} \end{aligned}$$

De la même façon, si on choisit une combinaison convexe de μ et μ' , on a :

$$\begin{aligned}
(\alpha\mu + \beta\mu')\lambda &= \sum_g (\alpha\mu + \beta\mu')(g)g\lambda \\
&= \sum_g (\alpha\mu(g) + \beta\mu'(g))g\lambda \\
&= \sum_g \alpha\mu(g)g\lambda + \sum_g \beta\mu'(g)g\lambda \\
&= \alpha \sum_g \mu(g)g\lambda + \beta \sum_g \mu'(g)g\lambda \\
&= \alpha\mu\lambda + \beta\mu'\lambda \\
&= (\alpha + \beta)\lambda \quad \text{car } \lambda \text{ est } \mu \text{ et } \mu' \text{-stationnaire;} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Proposition 1.4.6 Soient μ et μ' deux mesures sur G .

Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité λ telle que $\mu * \lambda = \mu' * \lambda = \lambda$, alors :

$$\begin{aligned}
E(B, \lambda, \mu * \mu') &= E(B, \lambda, \mu) + E(B, \lambda, \mu') \\
E(B, \lambda, \alpha\mu + \beta\mu') &= \alpha E(B, \lambda, \mu) + \beta E(B, \lambda, \mu')
\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION

Ces inégalités découlent de la définition de la μ -entropie. En effet :

$$\begin{aligned}
E(B, \lambda, \mu * \mu') &= \sum_g \mu * \mu'(g) I(g^{-1}\lambda|\lambda) \\
&= - \sum_g \mu * \mu'(g) \int \log \frac{dg^{-1}\lambda}{d\lambda}(b) d\lambda(b) \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d(g_1g_2)^{-1}\lambda}{d\lambda}(b) d\lambda(b) \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_1g_2b)}{d\lambda(b)} d\lambda(b) \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_1g_2b)}{d\lambda(g_2b)} \frac{d\lambda(g_2b)}{d\lambda(b)} d\lambda(b) \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_1g_2b)}{d\lambda(g_2b)} d\lambda(b) - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_2b)}{d\lambda(b)} d\lambda(b) \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_1g_2b)}{d\lambda(g_2b)} d\lambda(b) - \sum_{g_1} \mu(g_1) \sum_{g_2} \mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_2b)}{d\lambda(b)} d\lambda(b) \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_1g_2b)}{d\lambda(g_2b)} d\lambda(b) + E(B, \lambda, \mu') \\
&= - \sum_{g_1, g_2} \mu(g_1)\mu'(g_2) \int \log \frac{d\lambda(g_1b)}{d\lambda(b)} d\lambda(g_2^{-1}b) \quad \text{via le changement de variable } b \mapsto g_2^{-1}b; \\
&= - \sum_{g_1} \mu(g_1) \int \log \frac{d\lambda(g_1b)}{d\lambda(b)} \sum_{g_2} \mu'(g_2) d\lambda(g_2^{-1}b) \\
&= - \sum_{g_1} \mu(g_1) \int \log \frac{d\lambda(g_1b)}{d\lambda(b)} d\lambda(b) \quad \text{par hypothèse sur } \lambda; \\
&= E(B, \lambda, \mu) + E(B, \lambda, \mu')
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} E(B, \lambda, \alpha\mu + \beta\mu') &= \sum_g (\alpha\mu + \beta\mu')(g) I(g^{-1}\lambda|\lambda) \\ &= \sum_g \alpha\mu(g) I(g^{-1}\lambda|\lambda) + \sum_g \beta\mu'(g) I(g^{-1}\lambda|\lambda) \\ &= \alpha E(B, \lambda, \mu) + \beta E(B, \lambda, \mu') \end{aligned}$$

Corollaire 4.6.1 *Soit λ une mesure de probabilité μ -stationnaire. Soit $\mu' = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \mu_k$, où $\alpha_k \geq 0$ et $\sum_{k \geq 0} \alpha_k = 1$, alors :*

$$E(B, \lambda, \mu') = E(B, \lambda, \mu) \times \sum_{k \geq 0} k \alpha_k$$

DÉMONSTRATION

On a :

$$\begin{aligned} E(B, \lambda, \mu') &= E(B, \lambda, \sum_{k \geq 0} \alpha_k \mu_k) \quad \text{par définition de } \mu'; \\ &= \sum_{k \geq 0} \alpha_k E(B, \lambda, \mu_k) \quad \text{d'après la proposition précédente;} \\ &= \sum_{k \geq 0} \alpha_k k E(B, \lambda, \mu) \quad \text{d'après la proposition précédente.} \end{aligned}$$

Corollaire 4.6.2 *Soit μ une mesure de probabilité sur le groupe G . Soit $\mu' = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \mu_k$, où $\alpha_k \geq 0$ et $\sum_{k \geq 0} \alpha_k = 1$, alors :*

$$h(G, \mu') = h(G, \mu) \times \sum_{k \geq 0} k \alpha_k$$

DÉMONSTRATION

La coïncidence des frontières $\Gamma(G, \mu)$ et $\Gamma(G, \mu')$ (cette propriété est montrée dans [Kai83]) et le corollaire (4.6.1) nous donnent le résultat.

Corollaire 4.6.3 *Si l'entropie $H(\mu)$ est finie, alors :*

$$E(B, \lambda, \mu) \leq h(G, \mu)$$

pour tout G -espace mesurable B de mesure de probabilité μ -stationnaire λ .

DÉMONSTRATION

Cette affirmation est une conséquence du corollaire (4.6.1) dans le cas où $\mu' = \mu_k$, de la proposition (1.4.4) et de la définition de $h(G, \mu)$. Plus précisément, si $\mu' = \mu_k$, alors :

$$E(B, \lambda, \mu') = E(B, \lambda, \mu * \mu \dots * \mu) = k E(B, \lambda, \mu)$$

D'où :

$$E(B, \lambda, \mu) = \frac{E(B, \lambda, \mu_k)}{k} \leq \frac{H(\mu_k)}{k}$$

Donc en passant à la limite sur k , on obtient le résultat, ie $E(B, \lambda, \mu) \leq h(G, \mu)$.

1.4.3 Transformée de Radon-Nikodym

Intéressons-nous désormais au lien entre la μ -entropie et la transformée de Radon-Nikodym, puis nous énoncerons un théorème permettant d'identifier la frontière d'une marche aléatoire, ce qui reviendra à déterminer une condition nécessaire et suffisante afin que $E(B, \lambda, \mu) = h(G, \mu)$.

Définition 1.4.3 *Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité μ -stationnaire λ . La transformée de Radon-Nikodym r_n de l'espace (B, λ) est l'application mesurable de B dans \mathbb{R}^G (l'espace des fonctions à valeurs réelles sur G avec la topologie de la convergence ponctuelle) définie par la formule :*

$$(r_n(b))(g) = \frac{dg * \lambda}{d\lambda}(b)$$

Proposition 1.4.7 r_n est un homomorphisme de l'espace mesurable (B, λ) sur son image.

Définition 1.4.4 *Le support de la mesure $r_n \circ \lambda$ (compact par les inégalités (1.5)) sera noté $RN(B, \lambda)$ et appelé le compact de Radon-Nikodym de l'espace (B, λ) .*

Remarques :

1. Presque tous les éléments (par rapport à la mesure $r_n \circ \lambda$) de RN sont des fonctions positives, μ -harmoniques sur G , puisque λ est μ -stationnaire.
2. Le compact RN se réduit au point \mathbb{I} si et seulement si la mesure λ est invariante.
3. L'action de G sur RN (induite par l'action sur B) est donnée par la formule :

$$(h\gamma)(g) = \frac{dg(r_n \circ \lambda)}{dr_n \circ \lambda}(h\gamma) = \frac{dh^{-1}g(r_n \circ \lambda)}{dh^{-1}(r_n \circ \lambda)}(\gamma) = \frac{\gamma(h^{-1}g)}{\gamma(h^{-1})}$$

(la mesure $r_n \circ \lambda$ est μ -stationnaire par rapport à cette action).

4. En tant qu'espace mesurable $(RN, r_n \circ \lambda)$ est isomorphe au quotient de l'espace (B, λ) par la partition mesurable engendrée par l'ensemble dénombrable de Radon-Nikodym dérivé de B :

$$\Delta g(b) = \frac{dg\lambda}{d\lambda}(b)$$

Par conséquent, on obtient également :

Proposition 1.4.8 *Pour presque tout $b \in B$, on a :*

$$\frac{dg\lambda}{d\lambda}(b) = \frac{dg(r_n \circ \lambda)}{dr_n \circ \lambda}(r_n(b))$$

DÉMONSTRATION

Par définition, on a : $(r_n(b))(g) = \frac{dg\lambda}{d\lambda}(b)$.

D'après l'assertion (3) de la remarque précédente, on sait également que : $\frac{dg(r_n \circ \lambda)}{dr_n \circ \lambda}(r_n(b)) = (r_n(b))(g)$.

D'où le résultat.

Proposition 1.4.9 *La transformée de Radon-Nikodym ne change pas la valeur de la μ -entropie, ie :*

$$E(RN, r_n \circ \lambda, \mu) = E(B, \lambda, \mu)$$

DÉMONSTRATION

Les égalités qui suivent nous donne le résultat voulu :

$$\begin{aligned} E(RN, r_n \circ \lambda, \mu) &= \sum_g \mu(g) I(g^{-1}r_n \circ \lambda | r_n \circ \lambda) \\ &= - \sum_g \mu(g) \int \log \frac{dg^{-1}r_n \circ \lambda}{dr_n \circ \lambda}(b) dr_n \circ \lambda(b) \\ &= E(B, \lambda, \mu) \quad \text{d'après la proposition (1.4.8).} \end{aligned}$$

Remarques : Grâce à la proposition (1.4.8), le compact de Radon-Nikodym détermine une décomposition de \mathbb{I} en fonctions μ -harmoniques positives (qui sont les éléments de RN) :

$$\mathbb{I} = \int \gamma dr_n \circ \lambda(\gamma)$$

puisque pour presque tout $g \in G$, on a :

$$\int \gamma(g) dr_n \circ \lambda(\gamma) = \int \frac{dg(r_n \circ \lambda)}{dr_n \circ \lambda}(\gamma) dr_n \circ \lambda(\gamma) = 1$$

Considérons maintenant la transformée de Radon-Nikodym de la frontière $\Gamma(G, \mu)$ de la marche aléatoire.

Pour commencer, rappelons que la frontière (Γ, ν) est isomorphe (comme G -espace mesurable) à la partie active de la frontière de Martin $\Delta_1(G, \mu)$ de mesure ν_1 (représentant la mesure de \mathbb{I}). Ainsi l'action de G sur la frontière de Martin se trouve être la même que l'action de G sur RN .

Alors par la relation :

$$\mathbb{I} = \int (g^{-1}\gamma)(x) d\nu_1(g^{-1}\gamma) = \int \frac{\gamma(gx)}{\gamma(g)} dg\nu_1(\gamma), \quad \forall g, x \in G$$

on obtient deux décompositions de \mathbb{I} en fonctions μ -harmoniques extrémales :

$$\mathbb{I} = \int \gamma d\nu_1(\gamma) = \int \gamma \frac{dg\nu_1(\gamma)}{\gamma(g)}$$

et par unicité de la mesure représentative de la frontière de Martin, il s'ensuit que pour presque tout $\gamma \in \Delta_1(G, \mu)$:

$$\frac{dg\nu_1}{d\nu_1}(\gamma) = \gamma(g)$$

Ainsi, on a la propriété :

Proposition 1.4.10 *La transformée de Radon-Nikodym de la frontière (Γ, ν) est un isomorphisme d'espaces mesurables et le compact de Radon-Nikodym correspondant RN de mesure $r_n \circ \lambda$ coïncide avec la partie active de la frontière de Martin $\Delta_1(G, \mu)$ de mesure ν_1 (la mesure représentative de \mathbb{I}).*

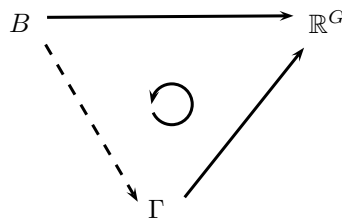
Puisque chaque décomposition de \mathbb{I} en fonctions μ -harmoniques peut être obtenue par intégration d'une décomposition en fonctions μ -harmoniques extrémales, on obtient grâce à la proposition précédente :

Proposition 1.4.11 *Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité μ -stationnaire λ . Le compact de radon-Nikodym $RN(B, \lambda)$ vu comme G -espace de mesure $r_n \circ \lambda$ est un espace quotient de la frontière (Γ, ν) .*

Théorème 1.4.12 *Soit μ une mesure de probabilité sur G d'entropie $H(\mu)$ finie. Soit B un G -espace mesurable de mesure de probabilité μ -stationnaire λ . Alors :*

$$E(B, \lambda, \mu) \leq h(G, \mu)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si le compact de Radon-Nikodym $(RN, r_n \circ \lambda)$ de l'espace (B, λ) est isomorphe en tant que G -espace à la frontière (Γ, ν) de la marche aléatoire (G, μ) . En d'autres termes l'égalité a lieu si et seulement si la transformée de Radon-Nikodym vue comme un homomorphisme de G -espaces mesurables, fait commuter le diagramme suivant :



où l'application $\Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^G$ est l'injection canonique définie dans la proposition (1.4.10).

DÉMONSTRATION

Nous allons baser cette démonstration sur une propriété de la distance de Kullback-Leibler :

Lemme 1.4.1 *Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures équivalentes de l'espace X et p est une application mesurable surjective de X dans X' . Soient $\nu'_1 = p \circ \nu_1$ et $\nu'_2 = p \circ \nu_2$, alors :*

$$I(\nu'_1 | \nu'_2) \leq I(\nu_1 | \nu_2)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si presque sûrement :

$$\frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) = \frac{d\nu'_1}{d\nu'_2}(p(x))$$

1.5. CONVOLUTIONS ET FRONTIÈRE TRIVIALE; CONJECTURE DE FURSTENBERG31

DÉMONSTRATION DU LEMME

Montrons tout d'abord l'inégalité sur les distances de Kullback-Leibler.

$$\begin{aligned}
 I(\nu'_1|\nu'_2) &= - \int_{X'} \log \frac{d\nu'_1}{d\nu'_2}(x) d\nu'_2(x) \\
 &= - \int_{X'} \log \frac{dp \circ \nu_1}{dp \circ \nu_2}(x) dp \circ \nu_2(x) \\
 &= - \int_X \log \frac{dp \circ \nu_1}{dp \circ \nu_2}(p(x)) dp \circ \nu_2(p(x)) \quad \text{par changement de variable } x \mapsto p(x); \\
 &= - \int_X \log \frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) dp \circ \nu_2(p(x)) \\
 &\leq I(\nu_1|\nu_2) \quad \text{car } p \text{ est surjective.}
 \end{aligned}$$

Montrons maintenant la condition équivalente pour avoir l'égalité.

(\Rightarrow) Si $I(\nu_1|\nu_2) = I(\nu'_1|\nu'_2)$, alors par le théorème de nullité de l'intégrale, on trouve que $\frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) = \frac{d\nu'_1}{d\nu'_2}(p(x))$

pour tout $x \in X$.

(\Leftarrow) Si $\frac{d\nu_1}{d\nu_2}(x) = \frac{d\nu'_1}{d\nu'_2}(p(x))$ pour tout $x \in X$, alors en passant au logarithme, puis à l'intégrale dans cette égalité, on trouve le résultat.

Démontrons maintenant le théorème.

Soit $(RN, r_n \circ \lambda)$ le compact de Radon-Nikodym de l'espace (B, λ) . D'après la proposition (1.4.11), on sait qu'il existe une factorisation $p : \Gamma \rightarrow RN$.

D'après le lemme donné ci-dessus sur la distance de Kullback-Leibler et la proposition (1.4.9), on a :

$$\begin{aligned}
 E(B, \lambda, \mu) &= E(RN, r_n \circ \lambda, \mu) \\
 &= \sum_g \mu(g) I(g^{-1}(r_n \circ \lambda) | r_n \circ \lambda) \\
 &\leq \sum_g \mu(g) I(g^{-1}\nu | \nu) = h(G, \mu)
 \end{aligned}$$

L'égalité $E(B, \lambda, \mu) = h(G, \mu)$ est équivalente à l'égalité :

$$\frac{dg\nu}{dg}(\gamma) = \frac{dg(r_n \circ \lambda)}{dr_n \circ \lambda}(p(\gamma)) \tag{1.6}$$

pour tout $g \in \text{supp } \mu$ et pour presque tout $\gamma \in \Gamma$.

Par la non dégénérescence de μ , on obtient que (1.6) est vraie pour tout $g \in G$, or d'après la proposition (1.4.10) cela signifie que p est un isomorphisme de G -espaces mesurables, d'où le résultat.

Bilan

Dans cette partie, nous avons vu une autre façon de déterminer la frontière d'une marche aléatoire sur un groupe, celle-ci permet en partant d'un objet connu sur le groupe de l'identifier à la frontière de la marche aléatoire sous certaines conditions. Nous allons donc pouvoir poursuivre dans cette voie et exemplifier cela.

1.5 Convolution et frontière triviale ; Conjecture de Furstenberg

Nous allons, dans cette partie, énoncer un autre critère de trivialité de la frontière faisant intervenir la convolution de la mesure sur le groupe. Puis nous verrons le cas particulier des groupes moyennables.

1.5.1 Trivialité de la frontière et distribution uniforme

Énonçons un nouveau critère de trivialité.

Théorème 1.5.1 *Soit μ une mesure de probabilité sur G .*

Alors la frontière $\Gamma(G, \mu)$ de la marche aléatoire correspondante est triviale si et seulement si la condition renforcée qui suit, sur l'uniformité de la distribution, est vraie pour presque toute trajectoire $y \in G^\infty$ et pour tout $g \in \text{supp } \mu$:

$$\lim_n \frac{\mu_{n-1}(g^{-1}y_n)}{\mu_n(y_n)} = 1$$

DÉMONSTRATION

La probabilité conditionnelle de l'ensemble cylindrique C_g^1 (quand la n -ième coordonnée de la trajectoire est fixée) est égale à :

$$\mathbb{P}^\mu(C_g^1 | C_y^n) = \mu(g) \frac{\mu_{n-1}(g^{-1}y_n)}{\mu_n(y_n)}$$

(\Rightarrow) Si la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est triviale, alors le théorème de convergence pour les probabilités conditionnelles nous donne :

$$\mathbb{P}^\mu(C_g^1 | C_y^n) \longrightarrow \mathbb{P}^\mu(C_g^1 | \eta) = \mathbb{P}^\mu(C_g^1) = \mu(g)$$

(\Leftarrow) Inversement, si :

$$\frac{\mu_{n-1}(g^{-1}y_n)}{\mu_n(y_n)} \longrightarrow 1$$

pour tout $g \in \text{supp } \mu$, alors :

$$\frac{\mu_{n-k}(g^{-1}y_n)}{\mu_n(y_n)} \longrightarrow 1$$

pour tout $g \in \text{supp } \mu_k$ et presque toute trajectoire y . Ceci signifie exactement que tous les ensembles cylindriques C_g^k (d'où tous les ensembles cylindriques $C_{g_0, \dots, g_k}^{0, \dots, k}$) sont indépendants de la σ -algèbre résiduelle \mathcal{A}_∞ .

Donc \mathcal{A}_∞ , η et $\Gamma_\phi(G, \mu)$ sont triviaux par la loi 0-1 de Kolmogorov.

1.5.2 Convergence des convolutions vers une moyenne invariante

Intéressons-nous maintenant à la frontière des marches aléatoires sur les groupes moyennables.

Définition 1.5.1 *Une suite $\{\phi_n\}$ de mesures de probabilité sur G est dite faiblement convergente vers une moyenne (ie une mesure finement additive) invariante à gauche sur G , si la suite $\{g\phi_n - \phi_n\}$ tend vers 0 faiblement dans $\ell^\infty(G)^*$, pour tout $g \in G$.*

Elle est dite fortement convergente vers une moyenne invariante à gauche, si $\{g\phi_n - \phi_n\}$ tend vers 0 en norme $\ell^1(G)$ (ici l'invariance à gauche signifie que la moyenne ϕ vérifie : $g\phi(A) = \phi(g^{-1}A)$, ce qui correspond au décalage à gauche de ϕ par g).

Définition 1.5.2 *La période de la mesure de probabilité μ est définie comme étant le plus grand diviseur commun de l'ensemble $\{K \geq 0, \mu_K(e) \leq 0\}$ et μ est dite apériodique si sa période vaut 1.*

Théorème 1.5.2 *Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée et apériodique sur G . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est triviale ;
2. la suite $\{\mu_n\}$ des convolutions de la mesure μ converge fortement vers une moyenne invariante à gauche sur G ;
3. la suite $\{\mu_n\}$ des convolutions de la mesure μ converge faiblement vers une moyenne invariante à gauche sur G .

DÉMONSTRATION

Par apériodicité de μ , on peut sans perte de généralité, supposer que l'élément neutre du groupe est chargé par μ .

(i) \Rightarrow (ii) Puisque $e \in \text{supp } \mu$, d'après le théorème (1.5.1), on a :

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\mu_{n-1}(g^{-1}y_n)}{\mu_n(y_n)} &= \lim_n \frac{\mu_{n-1}(g^{-1}y_n)}{\mu_{n-1}(y_n)} \\ &= \lim_n \frac{\mu_n(g^{-1}y_n)}{\mu_n(y_n)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

pour tout $g \in \text{supp } \mu$ et presque tout $y \in G^\infty$, d'où :

$$\mu_n \left\{ x \in G, \left| 1 - \frac{\mu_n(g^{-1}x)}{\mu_n(x)} \right| > \epsilon \right\} \longrightarrow 0$$

pour tout $g \in \text{supp } \mu$ et pour tout $\epsilon > 0$.

Puisque $\text{supp } \mu$ engendre G par la non dégénérescence de μ , cela complète la preuve.

(ii) \Rightarrow (iii) Cette implication est facile à démontrer.

(iii) \Rightarrow (i) Appliquons le fait que la trivialité de la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est équivalente à l'absence de fonction μ -harmonique bornée non triviale sur G .

Soit f une telle fonction, alors $\forall x \in G$, on a :

$$f(x) = \sum_g f(g)\mu_n(x^{-1}g)$$

et en particulier :

$$f(e) = \sum_g f(g)\mu_n(g)$$

Soustrayons ces deux égalités :

$$f(x) - f(e) = \sum_g f(g)(\mu_n(x^{-1}g) - \mu_n(g))$$

Par convergence faible de $\{\mu_n\}$ vers une moyenne invariante à gauche et par le fait que la fonction f est bornée, le côté droit de l'égalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

D'où $f(x) = f(e)$, $\forall x \in G$, ie f est constante.

Donc toute fonction μ -harmonique bornée est constante sur G et ainsi $\Gamma(G, \mu)$ est triviale.

Corollaire 5.2.1 *Si G n'est pas moyennable (ie n'admet pas de moyenne invariante), alors la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est non triviale pour toute mesure non dégénérée sur G .*

Remarque : Si μ est périodique, de période $d > 1$, alors une assertion analogue sur la suite des mesures $\overline{\mu_n} = \frac{1}{d}(\mu_n + \mu_{n+1} + \dots + \mu_{n+d-1})$ permet d'obtenir un résultat similaire.

Remarque : L'existence d'une suite de mesures convergeant faiblement vers une moyenne invariante à gauche est connue comme étant équivalente à l'existence d'une suite de mesures convergeant fortement vers une moyenne invariante à gauche. Le théorème (1.5.2) nous montre que ces types de convergence coïncident pour des suites de convolutions.

Remarque : La marche aléatoire à droite et celle à gauche diffèrent en tant que processus de Markov mais leurs distributions unidimensionnelles coïncident. Le critère de trivialité de la frontière donné par le théorème (1.2.5) dépend seulement des distributions unidimensionnelles de la marche aléatoire et ne dépend pas du fait que celle-ci soit à droite ou à gauche. Donc, si on se donne une mesure μ d'entropie $H(\mu)$ finie, les frontières des marches aléatoires à gauche et à droite seront triviales (ou non triviales) en même temps et la convergence (faible ou forte) des convolutions μ_n vers une moyenne invariante à gauche est équivalente à la convergence (faible ou forte) de la suite μ_n vers une moyenne invariante à droite sur G . Cependant cette équivalence n'a pas lieu pour des mesures d'entropies infinies.

Exemple : Reprenons l'exemple sur \mathbb{Z} , on a montré précédemment que \mathbb{Z} était moyennable, de plus la mesure de probabilité μ sur \mathbb{Z} est bien non dégénérée et apériodique (car $\mu(0) = p(0, 0) = 0$) donc d'après le théorème (1.5.2) on retrouve le fait que la frontière de la marche aléatoire est triviale.

1.5.3 Convolutions et Moyennabilité

Considérons à présent quelques critères permettant de montrer qu'un groupe est moyennable.

Proposition 1.5.3 (Critère de Reiter) *La condition de Reiter est l'une des conditions équivalentes donnant la moyennabilité d'un groupe G .*

Un groupe G est moyennable si et seulement si pour tout sous-ensemble fini $K \subset G$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une mesure de probabilité ϕ sur G telle que :

$$\|\phi - g\phi\| < \epsilon, \quad \forall g \in K$$

On peut reformuler cette condition de la façon suivante :

G est moyennable si et seulement si il existe une suite de mesures de probabilité ϕ_n sur G telle que :

$$\lim_n \|\phi_n - g\phi_n\| = 0, \quad \forall g \in G$$

DÉMONSTRATION

Pour une démonstration de cette proposition se référer à l'appendice G de [BdlHV08].

On peut dès lors se demander si l'on peut choisir la suite $\{\phi_n\}$ avec des propriétés particulières. Par exemple, cette suite peut-elle être constituée de convolutions de mesure ?

Le critère qui suit répond à cette question.

Théorème 1.5.4 *Afin qu'un groupe dénombrable G soit moyennable, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une mesure de probabilité μ non dégénérée sur G telle que :*

$$\lim_n \|\mu_n - g\mu_n\| = 0, \quad \forall g \in G$$

où μ_n est la n -ième convolution de μ .

DÉMONSTRATION

La démonstration consiste en la construction directe de la mesure désirée en utilisant la condition de Reiter.

Soit $e \in K_0 \subset K_1 \subset \dots$ une suite croissante exhaustive d'ensembles finis dans G (ie $\cup K_i = G$).

Soient $\{t_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ et $\{\epsilon_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ deux suites de nombres réels positifs telles que : $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$ et la suite $\{\epsilon_i\}$ décroît vers 0.

Soit $\{n_i\}$ une suite d'entiers telle que : $(t_1 + t_2 + \dots + t_{i-1})^{n_i} < \epsilon_i$.

Le groupe G est moyennable, donc d'après la condition de Reiter, il existe une suite de mesures de probabilité $\{\alpha_m\}$ sur G à supports finis $A_m = \text{supp } \alpha_m$ telle que la condition suivante soit satisfaite :

$$\|\alpha_m - g\alpha_m\| < \epsilon_m, \quad \forall g \in B_m = K_m \cup (A_{m-1})^{n_m} \quad (1.7)$$

De plus, on peut choisir les mesures α_m de telles sortes qu'elles satisfassent la condition $A_m = \text{supp } \alpha_m \supset B_m$.

À présent, soit :

$$\mu = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \alpha_m$$

Montrons alors que μ est la mesure voulue.

Soit $g \in G$, alors $g \in A_{m-1}$ pour un certain entier naturel m . Notons l'élément n_m de la suite $\{n_i\}$ par n . Considérons la n -ième convolution de μ :

$$\mu_n = \sum_k t_{k_1} \dots t_{k_m} \alpha_{k_1} * \dots * \alpha_{k_n}$$

où la somme est prise pour tous les multi-indices $k = (k_1, \dots, k_n)$, avec les $k_i \geq 0$.

Subdivisons la somme ci-dessus en deux :

$$\nu_1 = \sum_{|k| < m} t_{k_1} \dots t_{k_n} \alpha_{k_1} * \dots * \alpha_{k_n}$$

$$\nu_2 = \mu_n - \nu_1$$

où $|k| = \max_i k_i$.

Alors :

$$\| \nu_1 \| = \sum_{|k| < m} t_{k_1} \dots t_{k_n} = (t_1 + \dots + t_{m-1})^{n_m} < \epsilon_m$$

Considérons maintenant la mesure ν_2 :

$$\nu_2 = \sum_{|k| \geq m} t_{k_1} \dots t_{k_n} \alpha_{k_1} * \dots * \alpha_{k_n}$$

Fixons un multi-indice $k = (k_1, \dots, k_n)$ tel que $|k| \geq m$.

Soit j le plus petit indice tel que l'inégalité $k_j \leq m$ soit vérifiée, alors on peut réécrire $\theta = \alpha_{k_1} * \dots * \alpha_{k_n}$ sous la forme :

$$\theta = \theta_1 * \alpha_{k_j} * \theta_2$$

Puisque l'inégalité $k_i < m$ est vraie pour tout $i < j$ par définition de j , l'inclusion $\text{supp } \alpha_{k_i} \subset A_{m-1}$ est aussi vraie pour tout $i < j$ (les ensembles A_m étant croissants).

Puisque $j \leq n$, on a aussi l'inclusion :

$$\text{supp } \theta_1 \subset (A_{m-1})^{n-1}$$

En plus de cela, $g \in A_{m-1}$, donc $\text{supp } g\theta_1 \subset (A_{m-1})^n$, d'où par (1.7) les inégalités :

$$\begin{aligned} \| \alpha_{k_j} - g\theta_1 * \alpha_{k_j} \| &< \epsilon_m \\ \| \alpha_{k_j} - \theta_1 * \alpha_{k_j} \| &< \epsilon_m \end{aligned}$$

sont vérifiées.

Par conséquent :

$$\| g\theta_1 * \alpha_{k_j} - \theta_1 * \alpha_{k_j} \| < 2\epsilon_m$$

D'où :

$$\| g\theta_1 * \alpha_{k_j} * \theta_2 - \theta_1 * \alpha_{k_j} * \theta_2 \| < 2\epsilon_m$$

ie $\| g\theta - \theta \| < 2\epsilon_m$.

Cette dernière inégalité implique :

$$\| g\nu_2 - \nu_2 \| < 2\epsilon_m$$

Et puisque $\| \nu_1 \| < \epsilon_m$ (d'où $\| g\nu_1 \| < \epsilon_m$), on obtient :

$$\| g\mu_n - \mu_n \| < 4\epsilon_m$$

La démonstration est ainsi terminée car la suite de normes $\{ \| g\mu_n - \mu_n \| \}$ est décroissante et les ensembles A_m exhaustifs par rapport à G (donc chaque g appartient à tous les ensembles A_m pour m suffisamment grand et $\| g\mu_n - \mu_n \| \rightarrow 0$).

Remarque : Le cas d'un groupe arbitraire localement compact σ -compact (ie il s'écrit comme une union dénombrable de sous-espaces compacts) peut être traité de la même façon en remplaçant les ensembles finis K_i par des compacts.

Remarque : Les mesures α_i obtenues via la condition de Reiter peuvent être choisies symétriques. Ainsi la mesure construite μ est aussi symétrique et la suite de ses convolutions converge vers une moyenne bivariable sur G .

1.5.4 Conjecture de Furstenberg

Ici, nous allons démontrer la conjecture de Furstenberg grâce à ce qu'on a fait précédemment.

Théorème 1.5.5 *Pour chaque groupe G dénombrable moyennable, il existe une mesure de probabilité μ non dégénérée symétrique telle que la frontière $\Gamma(G, \mu)$ de la marche aléatoire correspondante soit triviale.*

DÉMONSTRATION

La démonstration découle du critère de Reiter et du théorème (1.5.2).

Remarque : En passant (si nécessaire) de la mesure μ à une combinaison convexe de ses convolutions (ce remplacement ne change pas la frontière Γ), on peut montrer que le support de la mesure μ peut être G tout entier.

Ainsi le théorème (1.5.5) prouve la conjecture suivante due à Furstenberg : " Un groupe G possède une mesure μ dont le support est G en entier et pour laquelle la frontière $\Gamma(G, \mu)$ est triviale si et seulement si G est moyennable."

Bilan

Dans cette partie, nous avons vu que les groupes moyennables admettent des marches aléatoires dont la frontière est triviale, ce qui étend énormément la classe des groupes admettant de telles marches aléatoires.

Conclusion

Grâce aux différents critères que nous avons énoncé, nous avons pu voir se dessiner une classification des groupes selon la trivialité ou non de la frontière de marches aléatoires sur ceux-ci et nous sommes arrivés à la conclusion que les groupes finis, nilpotents, moyennables admettent de telles marches aléatoires.

Cependant ce ne sont pas forcément a priori ces groupes qui s'avèrent être les plus intéressants, aussi maintenant que nous avons établi lesquels admettaient des marches aléatoires dont la frontière est triviale et comment le montrer, nous allons poursuivre avec un cas particulier de groupes pour lequel des marches aléatoires ont des frontières non triviales.

Chapitre 2

Étude de la frontière des groupes hyperboliques

Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des méthodes permettant d'identifier la frontière de Poisson de marches aléatoires sur des groupes ayant des propriétés hyperboliques. Puis nous appliquerons celles-ci aux groupes hyperboliques. Ces derniers nous fournissant alors un exemple pour lequel la frontière de Poisson de marches aléatoires n'est pas triviale.

2.1 Marches aléatoires sur les groupes et frontière de Poisson

Dans cette partie nous allons effectuer quelques rappels sur les marches aléatoires sur les groupes, l'espace des chemins, la frontière de Poisson et nous introduirons également quelques nouveaux concepts qui nous serviront de point de départ pour l'identification de la frontière de Poisson de marches aléatoires sur des groupes ayant des propriétés hyperboliques.

2.1.1 Marche aléatoire sur un groupe

Dans un premier temps, commençons par rappeler les définitions de marche aléatoire sur un groupe et celle de l'opérateur de Markov associé à cette marche aléatoire.

Définition 2.1.1 *La marche aléatoire (G, μ) à droite sur le groupe G , déterminée par la mesure de probabilité μ , est la chaîne de Markov homogène d'espace d'états G et de probabilités de transition :*

$$p(y|x) = p(x, y) = \mu(x^{-1}y), \quad \forall x, y \in G$$

qui sont invariantes sous l'action canonique à gauche de G sur lui-même.

Remarque : La position x_n de la marche aléatoire au temps n est obtenue de sa position x_0 au temps 0 en multipliant à droite par des incréments μ -distribués h_i :

$$x_n = x_0 h_1 \dots h_n \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *L'opérateur de Markov P des probabilités de transition de la marche aléatoire (G, μ) est défini par :*

$$Pf(x) = \sum_x p(x, y) f(y) = \sum_h f(xh) \mu(h)$$

Remarques :

- On note ici l'opérateur de Markov par P et non par P^μ comme dans le chapitre 1 dans le but d'alléger les notations par la suite.
- Si θ est la distribution de la position de la marche aléatoire au temps n , alors $\theta * P = \theta * \mu$ est la distribution de sa position au temps $n + 1$.

2.1.2 Espace des chemins simples

Dans ce paragraphe, nous allons rappeler ce qu'est l'espace des chemins simples et énoncer quelques définitions fondamentales sur celui-ci et les mesures de probabilité sur les groupes.

Définition 2.1.3 *Le produit cartésien infini du groupe G avec lui-même sera noté $G^{\mathbb{Z}^+}$ ou G^∞ . Les éléments de ce produit $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ sont appelés trajectoires et l'ensemble $G^{\mathbb{Z}^+}$ est appelé l'espace des trajectoires (ou l'espace des chemins simples).*

Remarque : Dans ce chapitre nous utiliserons la notation $G^{\mathbb{Z}^+}$ pour l'espace des chemins ou espace des chemins simples afin de ne pas confondre avec l'espace $G^{\mathbb{Z}}$ des chemins bilatéraux que nous définirons plus tard.

Définition 2.1.4

Les sous-ensembles cylindriques de l'espace des chemins sont définis par :

$$C_g^{0, \dots, n} = \{x \in G^{\mathbb{Z}^+}, \quad x_i = g_i, \quad \forall 0 \leq i \leq n\} = \bigcap_{i=0}^n C_g^i$$

où $C_g^i = \{x \in G^{\mathbb{Z}^+}, \quad x_i = g\}$ sont les cylindres unidimensionnels.

Définition 2.1.5 *Une distribution initiale θ sur G détermine la mesure de Markov \mathbb{P}_θ (notée ${}_\theta\mathbb{P}^\mu$ dans le chapitre 1) sur l'espace des chemins qui est définie comme étant l'image par l'isomorphisme (2.1) de la mesure $\theta \otimes \bigotimes_{n=1}^\infty \mu$.*

Définition 2.1.6 *Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur un groupe X . On définit leur convolution pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$ par :*

$$\begin{aligned} \mu * \nu(A) &= \int \mu(Ax^{-1})d\nu(x) \\ &= \int \nu(x^{-1}A)d\mu(x) \end{aligned}$$

De plus pour tout point $x \in X$, on note par x la mesure dégénérée du point x et par $\mu * x$ la translation à droite de la mesure μ par x et on a alors pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$(\mu * x)(A) = \mu(Ax^{-1})$$

Remarque : Comme dans le chapitre 1, pour simplifier l'écriture de certaines formules, on omettra de mettre le symbole $*$.

Définition 2.1.7 *La distribution unidimensionnelle de la mesure \mathbb{P}_θ au temps n (ie son image sous la projection $y \mapsto y_n$) est $\theta * P^n = \theta * \mu_n$, où μ_n est la n -ième convolution de μ .*

Définition 2.1.8 *On note par \mathbb{P} la mesure sur l'espace des chemins correspondant à la distribution initiale concentrée sur l'élément identité e du groupe G .*

Remarques :

- Toutes les mesures $\mathbb{P}_\theta = \theta * \mathbb{P}$ sont dominées par la mesure (σ -finie) \mathbb{P}_m , où m est la mesure de comptage sur G .
- L'espace $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P}_m)$ est un espace de Lebesgue, ce qui nous permet d'utiliser la théorie ergodique sur cet espace, ce que nous ferons par la suite.

2.1.3 Frontière de Poisson

Nous allons maintenant définir à nouveau la frontière de Poisson et la mesure sur cette dernière.

Définition 2.1.9 *On définit le décalage temporel T de l'espace des chemins $G^{\mathbb{Z}^+}$ comme étant l'application :*

$$\begin{aligned} G^{\mathbb{Z}^+} &\longrightarrow G^{\mathbb{Z}^+} \\ \{y_n\} &\longmapsto \{y_{n+1}\} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *Pour toute mesure θ sur G , on a la formule suivante :*

$$T * \mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{\theta * P} = \mathbb{P}_{\theta * \mu} \tag{2.2}$$

où T est le décalage défini ci-dessus.

DÉMONSTRATION

Par définition, on sait que $\mathbb{P}_\theta = \theta * \mathbb{P}$.

D'où $\mathbb{P}_{\theta * P} = (\theta * P) * \mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_{\theta * \mu} = (\theta * \mu) * \mathbb{P}$.

Or, d'après la définition (2.1.7), on sait que $\theta * P = \theta * \mu$, d'où $\mathbb{P}_{\theta * P} = \mathbb{P}_{\theta * \mu}$.

De plus par définition, si θ est la distribution de la marche aléatoire au temps n alors $\theta * P = \theta * \mu$ sera la distribution de la marche aléatoire au temps $n + 1$, d'où par définition du décalage T , $T * \theta = \theta * P = \theta * \mu$.

D'où $T * \theta * \mathbb{P} = \theta * P * \mathbb{P}$, ie $T * \mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{\theta * P}$.

Définition 2.1.10 *Une application $T : X \rightarrow X$ est dite ergodique par rapport à une mesure donnée, si tout ensemble mesurable invariant sous T est de mesure nulle ou de complémentaire de mesure nulle.*

Définition 2.1.11 *L'espace Γ des composantes ergodiques du décalage T sur l'espace des chemins $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P}_m)$ est appelé la frontière de Poisson de la marche aléatoire (G, μ) .*

Remarque : De façon plus détaillée, si on note \mathcal{A}_T la σ -algèbre des ensembles mesurables T -invariants, puisque $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P}_m)$ est un espace de Lebesgue, il existe un (unique à isomorphisme près) espace mesurable Γ (l'espace des composantes ergodiques) et une application $\text{bnd} : G^{\mathbb{Z}^+} \rightarrow \Gamma$ tels que la σ -algèbre \mathcal{A}_T coïncide avec la σ -algèbre des images réciproques par bnd des sous-ensembles mesurables de Γ .

Dans toute la suite on note η la partition mesurable correspondante de l'espace des chemins dans les images réciproques par bnd des points de Γ . On appellera η la partition de Poisson.

Remarque : L'action des coordonnées de G sur l'espace des chemins commute avec le décalage T , donc elle se projette en une action canonique de G sur Γ .

Définition 2.1.12 *La mesure ν définie par $\nu = \text{bnd}(\mathbb{P})$ sur la frontière de Poisson est appelée la mesure harmonique.*

Dans toute la suite, on considère Γ la frontière de Poisson de (G, μ) et $\nu = \nu_e$ la mesure harmonique déterminée par e comme point de départ.

Sauf mention contraire, aucune condition n'est imposée que ce soit sur le groupe $\text{gr}(\mu)$ engendré par le support de μ ou sur le semi-groupe $\text{sgr}(\mu)$ engendré par le support de μ .

Proposition 2.1.2 *Soit T le décalage temporel, soit \mathbb{P} la mesure sur $G^{\mathbb{Z}}$ et soit ν la mesure harmonique, alors :*

$$\nu = \text{bnd}(T * \mathbb{P}) = \text{bnd}(\mathbb{P}_\mu) = \mu * \text{bnd}(\mathbb{P}) = \mu * \nu = \sum_g \mu(g)g * \nu$$

ie la mesure harmonique ν est μ -stationnaire.

De plus, la translation $g * \nu$ est absolument continue par rapport à ν , pour tout $g \in \text{sgr}(\mu)$.

DÉMONSTRATION

L'ensemble Γ est par définition l'ensemble des composantes ergodiques du décalage T , ie comme $\text{bnd} : G^{\mathbb{Z}^+} \rightarrow \Gamma$ et par définition de la mesure ν , alors $\nu = \text{bnd}(\mathbb{P}) = \text{bnd}(T * \mathbb{P})$.

Ensuite, d'après la proposition (2.1.1), on sait que $\mathbb{P}_\mu = T * \mathbb{P}$ d'où $\nu = \text{bnd}(T * \mathbb{P}) = \text{bnd}(\mathbb{P}_\mu)$.

Enfin $\text{bnd}(\mathbb{P}_\mu) = \mu * \text{bnd}(\mathbb{P}) = \mu * \nu = \sum_g \mu(g)g * \nu$ par définition de ν et de la convolution de μ avec ν . Ainsi par définition de l'absolue continuité d'une mesure par rapport à une autre, on a également que $g * \nu$ est absolument continue par rapport à ν .

2.1.4 Décalage de Bernoulli

Poursuivons notre étude en définissant le décalage de Bernoulli et en énonçant un premier lemme sur ce dernier.

Définition 2.1.13 *Le décalage de Bernoulli sur l'espace des incréments de la marche aléatoire détermine une transformation ergodique de l'espace des chemins $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P}) : U$, préservant la mesure et définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$(Ux)_n = x_1^{-1}x_{n+1}$$

Lemme 2.1.1 *Pour \mathbb{P} -presque tout chemin simple $x = \{x_n\} \in G^{\mathbb{Z}^+}$, on a :*

$$\text{bnd}(x) = x_1(\text{bnd}(Ux))$$

DÉMONSTRATION

Montrons au préalable que $Tx = x_1(Ux)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors par définition du décalage T , on a $(Tx)_n = x_{n+1}$ et par définition du décalage U , on a $(x_1(Ux))_n = x_1x_1^{-1}x_{n+1}$. D'où $Tx = x_1(Ux)$.

Montrons maintenant la relation du lemme. Soit $A \in \mathcal{B}(G)$, alors d'après la définition de la convolution :

$$\text{bnd} * x(A) = \text{bnd}(Ax^{-1})$$

et

$$x_1 * \text{bnd} * Ux(A) = x_1 * (\text{bnd}(A(Ux)^{-1})) = \text{bnd}(x_1^{-1}A(Ux)^{-1}) = \text{bnd}(A(Tx)^{-1}) = \text{bnd}(Ax^{-1})$$

d'après la relation que l'on vient de montrer. D'où le résultat.

2.1.5 μ -frontière

Introduisons désormais le concept de μ -frontière qui va s'avérer fondamental pour la suite.

Définition 2.1.14 *Le quotient (Γ_ξ, ν_ξ) de la frontière de Poisson (Γ, ν) par une certaine partition mesurable G -invariante ξ est appelée une μ -frontière.*

Ainsi, par définition, la frontière de Poisson est la μ -frontière maximale.

Remarque : Un autre moyen de définir une μ -frontière est de dire que c'est un G -espace muni d'une mesure μ -stationnaire λ telle que $x_n * \lambda$ converge faiblement vers une δ -mesure pour \mathbb{P} -presque tout chemin $\{x_n\}$ de la marche aléatoire (G, μ) .

Définition 2.1.15 *On note par bnd_ξ la projection canonique :*

$$\text{bnd}_\xi : (G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\Gamma, \nu) \longrightarrow (\Gamma_\xi, \nu_\xi)$$

et par η_ξ la partition correspondante de l'espace des chemins.

Ainsi le problème de la description de la frontière de Poisson de la paire (G, μ) se ramène à :

1. trouver (de manière géométrique ou combinatoire) une μ -frontière (B, λ) ;
2. montrer que cette μ -frontière est maximale.

2.1.6 μ -maximalité

Terminons cette partie en définissant le concept de μ -maximalité.

Définition 2.1.16 *Une compactification du groupe G est dite μ -maximale si les chemins simples de la marche aléatoire (G, μ) convergent presque sûrement dans la compactification et la μ -frontière considérée est en fait isomorphe à la frontière de Poisson de (G, μ) .*

Remarque : La compactification d'un groupe est définie dans le paragraphe qui suit.

Bilan

Nous sommes maintenant en mesure de commencer l'étude des méthodes permettant d'identifier la frontière de Poisson de marches aléatoires sur des groupes ayant des propriétés hyperboliques, étant donné que nous avons rappelé et défini tous les outils dont nous avons besoin. Désormais notre but est de montrer des critères de maximalité des μ -frontières et de μ -maximalité des compactifications en utilisant l'entropie des marches aléatoires.

2.2 Compactification des groupes et μ -frontière

Dans cette partie nous allons introduire des résultats intermédiaires qui nous permettront ensuite de traiter l'exemple des groupes hyperboliques plus facilement et d'énoncer des théorèmes identifiant la frontière de Poisson de marches aléatoires de façon plus aisée.

2.2.1 Compactification d'un groupe

Définissons tout d'abord la compactification d'un groupe et introduisons deux conditions sur celle-ci.

Définition 2.2.1 Soient T et S deux G -espaces d'un groupe G . Soit $f : T \rightarrow S$, alors f est dite G -équivariante si pour tout $t \in T$ et tout $g \in G$, elle vérifie $f(gt) = gf(t)$.

Définition 2.2.2 On définit par $\overline{G} = G \cup \partial G$ la compactification d'un groupe dénombrable G .

Dans toute la suite, cette compactification \overline{G} sera compatible avec la structure du groupe G dans le sens que l'action de G sur lui-même par translation à gauche s'étend en une action de \overline{G} par homéomorphisme.

On supposera également toujours que \overline{G} est séparable et on introduit les conditions suivantes sur G :

Condition 1 Si une suite $g_n \in G$ converge vers un point de ∂G dans la compactification \overline{G} , alors la suite $g_n x$ converge vers la même limite $\forall x \in G$.

Condition 2 La frontière ∂G consiste en au moins trois points et il existe une application borélienne G -équivariante S :

$$\begin{aligned} S : \partial G \times \partial G &\longrightarrow \mathcal{B}(G) \\ (b_1, b_2) &\longmapsto S(b_1, b_2) \neq \emptyset \end{aligned}$$

telle que pour tout triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\partial G)^3$, il existe des voisinages $\alpha \in \mathcal{O}_\alpha \subset \overline{G}$, $\beta \in \mathcal{O}_\beta \subset \partial G$ et $\gamma \in \mathcal{O}_\gamma \subset \partial G$ tels que :

$$S(b_1, b_2) \cap \mathcal{O}_\alpha = \emptyset \quad \forall b_1 \in \mathcal{O}_\beta, \forall b_2 \in \mathcal{O}_\gamma$$

Remarque : La condition (1) est appelée projectivité et la condition (2) signifie que les points de ∂G sont séparés par des bandes $S(b_1, b_2)$.

Comme nous allons le voir par la suite, il s'avère pratique de considérer pour $S(b_1, b_2)$ la réunion de toutes les géodésiques bi-infinies de G (provenant de la structure de graphe de Cayley) ayant b_1 et b_2 pour extrémités.

2.2.2 Une première utilisation des conditions (1) et (2)

Énonçons maintenant un premier résultat de convergence pour un groupe dont la compactification satisfait les conditions que nous venons de poser.

Définition 2.2.3 Soit μ une mesure sur un espace mesurable (X, S) .

Un ensemble $E \subset S$ est appelé un atome pour la mesure μ si :

1. $\mu(E) > 0$;
2. soit $F \in S$, alors soit $\mu(E \cap F) = 0$, soit $\mu(E \setminus F) = 0$.

Définition 2.2.4 Soit μ une mesure sur un espace mesurable (X, S) .

On dit que la mesure μ est purement atomique ou simplement atomique si tout ensemble mesurable de mesure strictement positive contient un atome.

On dit que μ est non-atomique s'il n'existe pas d'atome pour μ , ce qui signifie que tout ensemble mesurable de mesure strictement positive peut s'écrire comme la réunion disjointe de deux ensembles mesurables de mesures strictement positives.

Lemme 2.2.1 Soit $\overline{G} = G \cup \partial G$ une compactification satisfaisant les conditions (1) et (2).

Soit $(g_n) \subset B$ une suite telle que $g_n \rightarrow \overline{b} \in \partial G$.

Alors pour toute mesure de probabilité non-atomique λ sur ∂G , les translations $g_n * \lambda$ convergent vers la mesure ponctuelle $\delta_{\overline{b}}$ pour la topologie faible-*.

DÉMONSTRATION

Soit $\overline{G} = G \cup \partial G$ satisfaisant les conditions (1) et (2). Tout d'abord, si $g_n b \rightarrow \overline{b}, \forall b \in \partial G$ alors il n'y a rien à démontrer.

Montrons à présent que seulement le cas précédent a lieu. Pour cela on suppose le contraire et alors en passant à une sous-suite, on sait qu'il va exister $b_1 \in \partial G$ tel que $g_n b_1 \rightarrow \overline{b_1} \neq \overline{b}$.

Or on sait que $g_n \overline{b} \rightarrow \overline{b}, \forall b \neq b_1$. En effet, sinon quitte à re-extraire, on aurait l'existence d'un élément $b_2 \neq b_1$ tel que $g_n b_2 \rightarrow \overline{b_2} \neq \overline{b}$ et si on considère un point $x \in S(b_1, b_2)$, alors d'après la condition (2) les seules limites possibles pour $g_n x$ sont $\overline{b_1}$ ou $\overline{b_2}$, ce qui contredit la condition (1).

D'où nécessairement $g_n b \rightarrow \overline{b}$, pour tout $b \in \partial G$.

Enfin, puisque la mesure λ est purement non-atomique, cette affirmation implique que $g_n * \lambda \rightarrow \delta_{\overline{b}}$. Ainsi toute suite (g_n) telle que $g_n \rightarrow \overline{b}$ admet une sous-suite (g_{n_k}) telle que $g_{n_k} * \lambda \rightarrow \delta_{\overline{b}}$, ie $g_n * \lambda \rightarrow \delta_{\overline{b}}$.

2.2.3 Sous-groupe élémentaire

Introduisons à présent la notion de sous-groupe élémentaire.

Définition 2.2.5 Un sous-groupe $G' \subset G$ est dit élémentaire par rapport à la compactification $\overline{G} = G \cup \partial G$ si G' fixe un sous-ensemble fini de ∂G , ie ce sous-ensemble est invariant par l'action de G' sur ∂G .

2.2.4 Un résultat fondamental

Terminons cette partie avec un premier théorème important donnant l'existence d'une μ -frontière.

Théorème 2.2.1 Soit $\overline{G} = G \cup \partial G$ une compactification séparable d'un groupe dénombrable G satisfaisant les conditions (1) et (2).

Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que le sous-groupe $gr(\mu)$ engendré par le support de μ soit non-élémentaire par rapport à la compactification.

Alors \mathbb{P} -presque tout chemin $x = \{x_n\}$ converge vers une limite $\Pi x \in \partial G$, la mesure limite $\lambda = \Pi * \mathbb{P}$ est purement non-atomique, l'espace mesurable $(\partial G, \lambda)$ est une μ -frontière et λ est l'unique mesure de probabilité μ -stationnaire sur ∂G .

DÉMONSTRATION

Par compacité de ∂G , il existe une mesure de probabilité μ -stationnaire λ sur ∂G .

Montrons que cette mesure est purement non-atomique par l'absurde.

Soit m le poids maximal de ses atomes. Soit $A_m \subset \partial G$ l'ensemble fini des atomes de poids m .

Puisque λ est μ -stationnaire, on a :

$$\lambda = \mu * \lambda = \sum_g \mu(g) g * \lambda$$

D'où par définition de la convolution pour tout $b \in A_m$:

$$\lambda(b) = \sum_g \mu(g) g * \lambda(b) = \sum_g \mu(g) \lambda(g^{-1}b)$$

D'où A_m est $sgr^{-1}(\mu)$ -invariante (par définition de l'invariance) et par finitude de A_m , on a aussi que A_m est $gr(\mu)$ -invariante, ce qui est impossible car le groupe $gr(\mu)$ est non-élémentaire, ie ne

fixe aucun sous-ensemble fini de ∂G . Donc λ est bien purement non-atomique.

De plus, puisque la mesure λ est μ -stationnaire, \mathbb{P} -presque toute suite de mesures $x_n * \lambda$ converge faiblement vers une mesure de probabilité $\lambda(x)$ et comme $gr(\mu)$ est non-élémentaire, presque tout chemin $x = \{x_n\}$, vu comme sous-ensemble de G , n'est pas borné.

Alors, d'après le lemme (2.2.1), $\Pi x = \lim x_n$ existe presque sûrement et $\lambda(x) = \delta_{\Pi x}$.

Montrons maintenant l'unicité de la mesure λ .

On pose $\nu = \Pi * \mathbb{P}$, ie $(\partial G, \nu)$ est une μ -frontière d'après ce qu'on vient de démontrer.

Or λ est μ -stationnaire, donc μ_n -stationnaire, ie pour tout $n \geq 0$:

$$\lambda = \mu_n * \lambda = \sum_g \mu_n(g) g * \lambda$$

D'où pour tout $A \in \mathcal{B}(\partial G)$, on a :

$$\begin{aligned} \mu * \lambda(A) &= \int \mu_n(Ax^{-1}) d\lambda(x) \\ &= \int \lambda(x^{-1}A) d\mu_n(x) \\ &= \int \lambda(x_n^{-1}A) d\mathbb{P}(x) \\ &= \int x_n * \lambda(A) d\mathbb{P}(x) \end{aligned}$$

D'où $\mu_n * \lambda = \int x_n * \lambda d\mathbb{P}(x)$.

Ainsi puisque $x_n * \lambda \longrightarrow \delta_{\Pi x}$, alors en passant à la limite sur n , on obtient pour tout $A \in \mathcal{B}(\partial G)$:

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\longrightarrow \int \delta_{\Pi x}(A) d\mathbb{P}(x) \\ &= \mathbb{P}(\Pi^{-1}A) \\ &= \Pi * \mathbb{P}(A) \end{aligned}$$

Donc pour tout $A \in \mathcal{B}(\partial G)$, on a $\lambda(A) = \nu(A)$, d'où le résultat.

Bilan

Cette partie nous a permis d'accéder à une première étape de notre processus pour déterminer la frontière de Poisson, qui est l'identification d'une μ -frontière.

2.3 Mesures conditionnelles et transformée de Doob

Dans cette partie nous allons étudier plus précisément la notion de μ -frontière et voir sur celle-ci de quels objets nous disposons en terme de mesures et quel est le lien avec la mesure sur le groupe.

2.3.1 Transformée de Doob

Définissons tout d'abord une nouvelle chaîne de Markov via la transformée de Doob.

Définition 2.3.1 On définit l'espace $H_1^+(G, \mu)$ comme étant l'ensemble convexe des fonctions f harmoniques positives sur $gr(\mu)$ (ie telles que $Pf = f$) normalisées par la condition $f(e) = 1$.

Toute fonction $f \in H_1^+(G, \mu)$ détermine une nouvelle chaîne de Markov (la transformée de Doob) sur $gr(\mu)$ de probabilités de transition :

$$p^f(x, y) = \mu(x^{-1}y) \frac{f(y)}{f(x)}$$

On note par \mathbb{P}^f la mesure de Markov associée sur $G^{\mathbb{Z}^+}$ (avec la distribution initiale δ_e).

Proposition 2.3.1 Soit $f \in H_1^+(G, \mu)$. Alors pour tout sous-ensemble cylindrique, on a :

$$\mathbb{P}^f(C_g^{0, \dots, n}) = \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) f(g_n)$$

ie l'application $f \longmapsto \mathbb{P}^f$ est affine.

DÉMONSTRATION

On a défini pour tous $x, y \in G$ et pour $f \in H_1^+(G, \mu)$ les probabilités de transition p^f par :

$$p^f(x, y) = p(x, y) \frac{f(y)}{f(x)} = \mu(x^{-1}y) \frac{f(y)}{f(x)}$$

Or on sait également que $\mathbb{P}(C_g^{n+1}|C_h^n) = \mu(h^{-1}g)$. Donc :

$$\mathbb{P}(C_g^{n+1}|C_h^n) \frac{f(g)}{f(h)} = \mu(h^{-1}g) \frac{f(g)}{f(h)}$$

D'où :

$$\mathbb{P}^f(C_g^{0, \dots, n}) = \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) \frac{f(g_n)}{f(e)} = \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) f(g_n)$$

car $f(e) = 1$ puisque $f \in H_1^+(G, \mu)$. D'où le résultat.

2.3.2 Système canonique de mesures conditionnelles par rapport à la frontière de Poisson

À présent grâce à la transformée de Doob, définissons un système de mesures conditionnelles par rapport à la frontière de Poisson.

Proposition 2.3.2 *Soit A un sous-ensemble mesurable de la frontière de Poisson tel que $\nu(A) > 0$, alors pour tout ensemble cylindrique $C_g^{0, \dots, n}$:*

$$\mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n} | \text{bnd}^{-1}A) = \frac{\mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) g_n * \nu(A)}{\mathbb{P}(\text{bnd}^{-1}A)} = \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) \frac{g_n \nu(A)}{\nu(A)}$$

ie la mesure conditionnelle $\mathbb{P}^A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \text{bnd}^{-1}A)$ est la transformée de Doob de la mesure \mathbb{P} déterminée par la fonction harmonique normalisée $\phi_A(x) = \frac{x\nu(A)}{\nu(A)}$.

DÉMONSTRATION

Soit A un sous-ensemble mesurable de la frontière de Poisson tel que $\nu(A) > 0$, alors pour tout ensemble cylindrique $C_g^{0, \dots, n}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n} \cap \text{bnd}^{-1}A) &= \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) \mathbb{P}_{g_n}(\text{bnd}^{-1}A) \\ &= \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) g_n * \mathbb{P}(\text{bnd}^{-1}A) \\ &= \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) g_n * \nu(A) \end{aligned}$$

Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n} | \text{bnd}^{-1}A) &= \frac{\mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n} \cap \text{bnd}^{-1}A)}{\mathbb{P}(\text{bnd}^{-1}A)} \quad \text{par définition de la probabilité conditionnelle;} \\ &= \frac{\mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) g_n * \nu(A)}{\nu(A)} \quad \text{d'après la formule précédente et la définition de } \nu. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Désormais on pose :

$$\phi_A = \frac{1}{\nu(A)} \int_A \phi_\gamma d\nu(\gamma)$$

où $\phi_\gamma(x) = \frac{dx\nu}{d\nu}(\gamma)$, alors on a :

Proposition 2.3.3 *Soit A un sous-ensemble mesurable de la frontière de Poisson tel que $\nu(A) > 0$, alors :*

$$\mathbb{P}^A = \frac{1}{\nu(A)} \int_A \mathbb{P}^\gamma d\nu(\gamma)$$

où \mathbb{P}^γ est la transformée de Doob déterminée par les fonctions ϕ_γ (leurs harmonicités découlent de la μ -stationnarité de la mesure ν).

DÉMONSTRATION

Soit A un sous-ensemble mesurable de la frontière de Poisson tel que $\nu(A) > 0$.

Comme $\mathbb{P}^A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | \text{bnd}^{-1}A)$ est la transformée de Doob de la mesure \mathbb{P} déterminée par les fonctions $\phi_A(x) = \frac{x * \nu(A)}{\nu(A)}$, alors $\mathbb{P}^A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)\phi_A(x)$.

Or :

$$\phi_A = \frac{1}{\nu(A)} \int_A \frac{x * \nu}{\nu}(\gamma) d\nu(\gamma)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^A(\cdot) &= \mathbb{P}(\cdot) \frac{1}{\nu(A)} \int_A \frac{x * \nu}{\nu}(\gamma) d\nu(\gamma) \\ &= \mathbb{P}(\cdot) \frac{1}{\nu(A)} \int_A \phi_\gamma(x) d\nu(\gamma) \\ &= \frac{1}{\nu(A)} \int_A \mathbb{P}(\cdot) \phi_\gamma(x) d\nu(\gamma) \\ &= \frac{1}{\nu(A)} \int_A \mathbb{P}^\gamma(\cdot) d\nu(\gamma) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Définition 2.3.2 *Un système de mesures conditionnelles de la mesure μ sur G par rapport à l'espace \mathcal{P} est une famille $(\mu_P)_{P \in \mathcal{P}}$ de mesures de probabilité telle que :*

1. $\mu_P(P) = 1$ pour $\widehat{\mu}$ -presque tout $P \in \mathcal{P}$;
2. pour toute fonction continue $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction :

$$\mathcal{P} \ni P \mapsto \int \phi d\mu_P$$

est mesurable et on a la relation :

$$\int \phi d\mu = \int \left(\int \phi d\mu_P \right) d\widehat{\mu}(P)$$

Théorème 2.3.4 *Les mesures :*

$$\mathbb{P}^\gamma(C_g^{0, \dots, n}) = \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n} | \gamma) = \mathbb{P}(C_g^{0, \dots, n}) \frac{dg_n \nu}{d\nu}(\gamma)$$

correspondant aux opérateurs de Markov P^γ sur $\text{sgr}(\mu)$ de probabilités de transition :

$$p^\gamma(x, y) = \mu(x^{-1}y) \frac{dy \nu}{dx \nu}(\gamma)$$

forment un système canonique de mesures conditionnelles de la mesure \mathbb{P} par rapport à la frontière de Poisson.

DÉMONSTRATION

La démonstration de ce théorème se trouve dans [Roh67].

2.3.3 Système canonique de mesures conditionnelles par rapport aux μ -frontières

Terminons par établir également un système de mesures conditionnelles par rapport aux μ -frontières.

Définition 2.3.3 *Soit (Γ_ξ, ν_ξ) une μ -frontière, alors on peut lui associer la quantité :*

$$\frac{dg \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\gamma_\xi) = \int \frac{dg \nu}{d\nu}(\gamma) d\nu(\gamma | \gamma_\xi)$$

pour tout $g \in \text{sgr}(\mu)$, pour ν_ξ -presque tout $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$ et où $\nu(\cdot | \gamma_\xi)$ sont les mesures conditionnelles de la mesure ν sur les fibres de la projections $\Gamma \ni \gamma \mapsto \gamma_\xi \in \Gamma_\xi$.

Définition 2.3.4 Soit (Γ_ξ, ν_ξ) une μ -frontière.

On définit par $\mathbb{P}^{\gamma_\xi} = \mathbb{P}^{\phi_{\gamma_\xi}}$ la transformée de Doob déterminée par la dérivée de Radon-Nikodym $\phi_{\gamma_\xi}(x) = \frac{dx\nu_\xi}{d\nu_\xi}(\gamma_\xi)$.

Proposition 2.3.5 Soit (Γ_ξ, ν_ξ) une μ -frontière, alors on a pour ν_ξ -presque tout $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$:

$$\mathbb{P}^{\gamma_\xi} = \int \mathbb{P}^\gamma d\nu(\gamma|\gamma_\xi)$$

DÉMONSTRATION

Soit (Γ_ξ, ν_ξ) une μ -frontière, alors pour ν_ξ -presque tout $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{\gamma_\xi}(\cdot) &= \mathbb{P}(\cdot)\phi_{\gamma_\xi}(x) \\ &= \mathbb{P}(\cdot)\frac{dx\nu_\xi}{d\nu_\xi}(\gamma_\xi) \\ &= \mathbb{P}(\cdot)\int \frac{dx\nu}{d\nu}(\gamma)d\nu(\gamma|\gamma_\xi) \\ &= \int \mathbb{P}(\cdot)\frac{dx\nu}{d\nu}(\gamma)d\nu(\gamma|\gamma_\xi) \\ &= \int \mathbb{P}(\cdot)\phi_\gamma(x)d\nu(\gamma|\gamma_\xi) \\ &= \int \mathbb{P}^\gamma d\nu(\gamma|\gamma_\xi) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Théorème 2.3.6 La famille de mesures \mathbb{P}^{γ_ξ} pour $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$ est la famille des mesures conditionnelles de la mesure \mathbb{P} par rapport à la μ -frontière (Γ_ξ, ν_ξ) .

DÉMONSTRATION

Ce théorème se déduit directement du théorème (2.3.4) par transitivité des systèmes de mesures conditionnelles, sinon on en trouve une démonstration dans [Roh67].

Bilan

Maintenant que nous avons établi l'existence d'un système de mesures conditionnelles par rapport aux μ -frontières, nous allons pouvoir étudier l'entropie de telles mesures dans le but d'aboutir à une condition de maximalité pour ces μ -frontières.

2.4 Entropie conditionnelle et maximalité des μ -frontières

Dans cette partie, nous allons établir des formules faisant intervenir l'entropie conditionnelle dans le but d'appréhender l'entropie de mesures appartenant au système de mesures conditionnelles par rapport aux μ -frontières et de la sorte trouver un critère de maximalité de ces μ -frontières.

2.4.1 Entropie d'une partition mesurable

Rappelons tout d'abord la définition de l'entropie d'une partition mesurable et établissons une première propriété sur celle-ci.

D'ailleurs désormais, on suppose que la mesure μ a une entropie $H(\mu) = -\sum_g \mu(g) \log \mu(g)$ finie.

Dans ce cas l'entropie de la marche aléatoire (G, μ) définie par $h(G, \mu) = \lim_n \frac{H(\mu_n)}{n}$ existe.

Définition 2.4.1 On pose α_1^k la partition de l'espace des chemins $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$ déterminée par les positions de la marche aléatoire aux temps $1, 2, \dots, k$ (ie deux chemins simples x et x' appartiennent à la même classe α_1^k si et seulement si $x_i = x'_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$).

On pose également $\alpha = \alpha_1^1$.

Définition 2.4.2 Soient ξ et ζ deux partitions mesurables de $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$, on note $H(\xi)$ (respectivement $H(\xi|\zeta)$) l'entropie de ξ (respectivement l'entropie conditionnelle de ξ sachant ζ).

Remarque : On définit ces entropies de la même manière que dans le chapitre précédent et on obtient alors comme dans ce dernier :

Proposition 2.4.1 Soit α_1^k la partition de l'espace des chemins définie ci-dessus.

Soit μ une mesure de probabilité.

Alors, puisque les incréments de la marche aléatoire sont indépendants et μ -distribués, on a :

$$H(\alpha_1^k) = kH(\mu) = kH(\alpha)$$

DÉMONSTRATION

Soit α_1^k la partition de l'espace des chemins définie ci-dessus. Soit μ une mesure de probabilité. Alors on a :

$$\begin{aligned} H(\alpha_1^k) &= - \int \log \mathbb{P}(x, \alpha_1^k) d\mathbb{P}(x) \quad \text{par définition de } H ; \\ &= - \int \log \mathbb{P}(C_x^{0, \dots, k}) d\mathbb{P}(x) \\ &= - \int \log \mu(x_1) \mu(x_2) \dots \mu(x_k) d\mathbb{P}(x) \\ &= -k \int \log \mu(x_1) d\mathbb{P}(x) \\ &= kH(\mu) \end{aligned}$$

De plus, on a également :

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= - \int \log \mathbb{P}(x, \alpha_1^1) d\mathbb{P}(x) \\ &= - \int \log \mu(x_1) d\mathbb{P}(x) \\ &= H(\mu) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.4.2 Entropie conditionnelle

Énonçons maintenant un lemme sur l'entropie conditionnelle de partitions mesurables. Pour ce faire, on considère dans toute la suite ξ une partition G -invariante de la frontière de Poisson et (Γ_ξ, ν_ξ) la μ -frontière correspondante.

Lemme 2.4.1 Pour tout $k \geq 1$, la formule suivante est vérifiée :

$$H(\alpha_1^k | \eta_\xi) = kH(\alpha | \eta_\xi) = k \left(H(\mu) - \int \log \frac{dx_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \right)$$

DÉMONSTRATION

Soit $x = \{x_n\}$ un chemin de $G^{\mathbb{Z}_+}$. L'élément de la partition α_1^k contenant x est le cylindre $C_x^{0, \dots, k}$ et l'image de x dans Γ_ξ est $\text{bnd}_\xi x$, d'où, d'après le théorème (2.3.6), la probabilité conditionnelle correspondante est :

$$\mathbb{P}(C_x^{0, \dots, k} | \text{bnd}_\xi x) = \mathbb{P}(C_x^{0, \dots, k}) \frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x)$$

et

$$\begin{aligned} H(\alpha_1^k | \eta_\xi) &= - \int \log \mathbb{P}(C_x^{0, \dots, k} | \text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \\ &= - \int \log \mathbb{P}(C_x^{0, \dots, k}) \frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \\ &= - \int \log \mathbb{P}(C_x^{0, \dots, k}) d\mathbb{P}(x) - \int \log \frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \\ &= kH(\mu) - \int \log \frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \quad \text{d'après la proposition (2.4.1).} \end{aligned}$$

À présent en passant aux incréments h_n on a :

$$\frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) = \frac{dh_1 \dots h_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x)$$

Or en télescopant on a également :

$$\prod_{i=1}^k \frac{h_i \nu_\xi}{d\nu_\xi}(x_{i-1}^{-1} \text{bnd}_\xi x) = \frac{dh_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) \frac{dh_2 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(x_1^{-1} \text{bnd}_\xi x) \dots \frac{dh_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(x_{k-1}^{-1} \text{bnd}_\xi x)$$

Or $x_{k-1} = h_1 \dots h_{k-1}$, ie $x_{k-1}^{-1} = h_{k-1}^{-1} \dots h_1^{-1}$ donc :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \frac{h_i \nu_\xi}{d\nu_\xi}(x_{i-1}^{-1} \text{bnd}_\xi x) &= \frac{dh_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) \frac{dh_2 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(h_1^{-1} \text{bnd}_\xi x) \dots \frac{dh_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(h_{k-1}^{-1} \dots h_1^{-1} \text{bnd}_\xi x) \\ &= \frac{dh_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) \frac{dh_1 h_2 \nu_\xi}{dh_1 \nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) \dots \frac{dh_1 h_2 \dots h_k \nu_\xi}{dh_1 h_2 \dots h_{k-1} \nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) \\ &= \frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) \end{aligned}$$

Ensuite par définition du décalage U , on sait que $(Ux)_n = x_1^{-1} x_{n+1}$, pour $n \geq 0$, donc on en déduit par récurrence sur $k \geq 1$ que $(U^k x)_n = x_k^{-1} x_{n+k}$, pour $n \geq 0$. Or $x_i = h_1 \dots h_i = x_{i-1} h_i$, d'où $h_i = x_{i-1}^{-1} x_i = (U^{i-1} x)_1$. Donc d'après le lemme (2.1.1) on a $\text{bnd}_\xi(U^{i-1} x) = x_{i-1}^{-1} \text{bnd}_\xi x$. D'où :

$$\frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) = \prod_{i=1}^k \frac{d(U^{i-1} x) \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi U^{i-1} x)$$

Enfin, puisque la mesure \mathbb{P} est U -invariante, alors :

$$\begin{aligned} - \int \log \frac{dx_k \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) &= - \int \log \prod_{i=1}^k \frac{d(U^{i-1} x) \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi U^{i-1} x) d\mathbb{P}(x) \\ &= - \int \log \prod_{i=1}^k \frac{dx_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \\ &= -k \int \log \frac{dx_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.4.3 Comparaison des entropies conditionnelles

Poursuivons avec un théorème de comparaison des entropies conditionnelles dont nous aurons besoin pour démontrer un critère de maximalité des μ -frontières.

Théorème 2.4.2 *Soient $\xi \preceq \xi'$ (ie ξ est une sous-division de ξ') deux partitions mesurables G -invariantes de la frontière de Poisson (Γ, ν) .*

Alors $H(\alpha|\eta_\xi) \leq H(\alpha|\eta_{\xi'})$ et l'égalité a lieu si et seulement si $\xi = \xi'$.

DÉMONSTRATION

Soient $\xi \preceq \xi'$ deux partitions mesurables G -invariantes de la frontière de Poisson (Γ, ν) .

Alors nécessairement $\eta_\xi \preceq \eta_{\xi'}$. D'où pour tout $x \in \Gamma$, on a :

$$\begin{aligned} m(x, \alpha|\eta_\xi) &\geq m(x, \alpha|\eta_{\xi'}) \\ \log m(x, \alpha|\eta_\xi) &\geq \log m(x, \alpha|\eta_{\xi'}) \\ - \int \log m(x, \alpha|\eta_\xi) d\mu(x) &\leq - \int \log m(x, \alpha|\eta_{\xi'}) d\mu(x) \\ H(\alpha|\eta_\xi) &\leq H(\alpha|\eta_{\xi'}) \end{aligned}$$

À présent, si on suppose toujours que $\xi \preceq \xi'$ sont deux partitions mesurables G -invariantes de la frontière de Poisson (Γ, ν) et que $H(\alpha|\eta_\xi) = H(\alpha|\eta_{\xi'})$. Alors d'après le lemme (2.4.1) :

$$H(\alpha_1^k|\eta_\xi) = H(\alpha_1^k|\eta_{\xi'}), \quad \forall k \geq 1$$

Donc toutes les distributions unidimensionnelles finies des mesures conditionnelles \mathbb{P}^{γ_ξ} et $\mathbb{P}^{\gamma_{\xi'}}$ coïncident pour ν -presque tout point $\gamma \in \Gamma$, ie $\mathbb{P}^{\gamma_\xi} = \mathbb{P}^{\gamma_{\xi'}}$, d'où $\xi = \xi'$.

2.4.4 Entropie asymptotique

Nous allons désormais introduire la notion d'entropie asymptotique et déterminer une formule pour l'entropie asymptotique d'une mesure appartenant au système de mesures conditionnelles par rapport aux μ -frontières.

Définition 2.4.3 Une mesure de probabilité Λ sur $G^{\mathbb{Z}^+}$ a une entropie asymptotique $h(\Lambda)$ si elle a la propriété d'équidistribution de Shannon-Breiman-McMillan :

$$-\frac{1}{n} \log \Lambda(C_x^n) \longrightarrow h(\Lambda)$$

pour Λ -presque tout chemin $x = \{x_n\} \in G^{\mathbb{Z}^+}$ et dans l'espace $L^1(\Lambda)$.

Théorème 2.4.3 Soit ξ une partition mesurable G -invariante de la frontière de Poisson (Γ, ν) . Alors pour ν_ξ -presque tout $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$:

$$h(\mathbb{P}^{\gamma_\xi}) = H(\alpha|\eta_\xi) - H(\alpha|\eta)$$

DÉMONSTRATION

Soit ξ une partition mesurable G -invariante de la frontière de Poisson (Γ, ν) .

Par définition, on sait que :

$$h(\mathbb{P}^{\gamma_\xi}) = \lim -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}^{\gamma_\xi}(C_x^n)$$

Donc on doit vérifier pour ν_ξ -presque tout $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$:

$$-\frac{1}{n} \log \mathbb{P}^{\gamma_\xi}(C_x^n) \longrightarrow H(\alpha|\eta_\xi) - H(\alpha|\eta)$$

pour \mathbb{P}^{γ_ξ} -presque tout chemin $x = \{x_n\}$ et dans l'espace $L^1(\mathbb{P}^{\gamma_\xi})$.

Puisque les \mathbb{P}^{γ_ξ} sont des mesures conditionnelles de la mesure \mathbb{P} par rapport aux Γ_ξ , cela revient à montrer que :

$$-\frac{1}{n} \log \mathbb{P}^{\text{bnd}_\xi x}(C_x^n) \longrightarrow H(\alpha|\eta_\xi) - H(\alpha|\eta)$$

\mathbb{P} -presque sûrement et dans $L^1(\mathbb{P})$.

Or par définition des mesures \mathbb{P}^{γ_ξ} on a :

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}^{\text{bnd}_\xi x}(C_x^n) = \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(C_x^n) + \frac{1}{n} \log \frac{dx_n \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x)$$

Et puisque $h(\mathbb{P}) = h(G, \mu)$ le premier terme du côté droit de l'égalité ci-dessus converge vers $-h(G, \mu)$.

Quant au terme $\frac{1}{n} \log \frac{dx_n \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x)$, on a vu dans la démonstration du lemme (2.4.1) que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \frac{dx_n \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) &= \frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^n \frac{d(U^{i-1}x) \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi U^{i-1}x) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{d(U^{i-1}x) \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi U^{i-1}x) \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème ergodique de Birkhoff (cf théorème (1.3.4) du chapitre 1), on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \frac{d(U^{i-1}x) \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi U^{i-1}x) \longrightarrow \int \log \frac{dx_1 \nu_\xi}{d\nu_\xi}(\text{bnd}_\xi x) d\mathbb{P}(x) = H(\mu) - H(\alpha|\eta_\xi)$$

d'après le lemme (2.4.1). Donc le second membre de l'égalité converge vers $H(\mu) - H(\alpha|\eta_\xi)$.

Or $H(\alpha|\eta) = H(\mu) - h(G, \mu)$ d'après la formule (1.3) du chapitre 1, d'où

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}^{\text{bnd}_\xi x}(C_x^n) \longrightarrow H(\alpha|\eta) - H(\alpha|\eta_\xi)$$

D'où le résultat.

2.4.5 Critère de maximalité d'une μ -frontière

Enfin établissons un critère de maximalité des μ -frontières.

Auparavant, rappelons que l'on a prouvé dans le chapitre précédent que $h(\mathbb{P}) = 0$ si et seulement si la frontière de Poisson est triviale, ici on obtient une généralisation de ce critère :

Théorème 2.4.4 *Une μ -frontière $(B, \lambda) \simeq (\Gamma_\xi, \nu_\xi)$ est la frontière de Poisson si et seulement si $h(\mathbb{P}^{\gamma_\xi}) = 0$ pour presque toute mesure conditionnelle de la mesure \mathbb{P} par rapport à Γ_ξ .*

DÉMONSTRATION

En combinant le théorème (2.4.2) (où on choisit la partition ponctuelle de la frontière de Poisson pour ξ') et le théorème (2.4.3), on obtient la démonstration de ce théorème.

Corollaire 4.4.1 *Une μ -frontière $(B, \lambda) \simeq (\Gamma_\xi, \nu_\xi)$ est la frontière de Poisson si et seulement si pour ν_ξ -presque tout $\gamma_\xi \in \Gamma_\xi$, il existe $\epsilon > 0$ et une suite d'ensembles $A_n = A_n(\gamma_\xi) \subset G$ tels que :*

1. $\log |A_n| = o(n)$,
2. $p_n^{\gamma_\xi}(A_n) > \epsilon$ pour tout n suffisamment grand, où $p_n^{\gamma_\xi}(g) = \mathbb{P}^{\gamma_\xi}(C_g^n)$ sont les distributions unidimensionnelles des mesures \mathbb{P}^{γ_ξ} .

DÉMONSTRATION

La démonstration de ce corollaire se déduit directement du théorème (2.4.4).

Bilan

Nous avons réussi à établir un critère de maximalité des μ -frontières et maintenant ce critère va nous servir de base pour l'élaboration de deux façons d'identifier la frontière de Poisson de marches aléatoires sur des groupes ayant des propriétés hyperboliques.

2.5 Approximation des rayons

Dans cette partie nous allons étudier une première façon de déterminer la frontière de Poisson via ce qu'on appelle l'approximation des rayons.

2.5.1 Jauge

Commençons par introduire la notion de jauge sur un groupe et des propriétés élémentaires sur celle-ci.

Définition 2.5.1 *Une suite croissante $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_k)_{k \geq 1}$ d'ensembles exhaustifs d'un groupe dénombrable G est appelée une jauge sur G .*

Par $|g| = |g|_{\mathcal{G}} = \min\{k, g \in \mathcal{G}_k\}$ on définit la fonction associée à la jauge.

Définition 2.5.2 *Une jauge \mathcal{G} est dite :*

- symétrique, si tous les ensembles de la jauge \mathcal{G}_k sont symétriques, ie $|g| = |g^{-1}|, \forall g \in G$;
- sous-additive, si $|g_1 g_2| \leq |g_1| + |g_2|, \forall g_1, g_2 \in G$;
- finie, si tous les ensembles de la jauge sont finis ;
- tempérée, si elle est finie et les ensembles \mathcal{G}_k ont au plus une croissance exponentielle, ie

$$\sup_k \frac{1}{k} \log \text{card } \mathcal{G}_k < \infty$$

Définition 2.5.3 *Une famille de jauges \mathcal{G}^α est uniformément tempérée si :*

$$\sup_{\alpha, k} \frac{1}{k} \log \text{card } \mathcal{G}_k^\alpha < \infty$$

Proposition 2.5.1 *Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_k)$ une jauge tempérée.*

Alors la famille des translations $g\mathcal{G} = (g\mathcal{G}_k)$, pour $g \in G$, est uniformément tempérée.

DÉMONSTRATION

Soit $g\mathcal{G} = (g\mathcal{G}_k)$, pour $g \in G$, une famille de jauges telle que la jauge (\mathcal{G}_k) soit tempérée, ie

$$\sup_k \frac{1}{k} \log \text{card } \mathcal{G}_k < \infty$$

Montrons que $g\mathcal{G}$ est une jauge uniformément tempérée.

Tout d'abord, comme \mathcal{G} est une jauge, alors \mathcal{G}_k est une suite croissante exhaustive de G , ie

$$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \dots \subset \mathcal{G}_k \subset \dots$$

D'où pour $g \in G$ fixé :

$$g\mathcal{G}_1 \subset g\mathcal{G}_2 \subset \dots \subset g\mathcal{G}_k \subset \dots$$

Et $\cup(g\mathcal{G}_k) = G$, donc $(g\mathcal{G})$ est bien une jauge.

Montrons maintenant qu'elle est uniformément tempérée, ie :

$$\sup_{g \in G, k \geq 1} \frac{1}{k} \log \text{card } g\mathcal{G}_k < \infty$$

Soit $i \geq 1$, alors il va exister un indice $j \geq 1$ tel que $g\mathcal{G}_i \subset \mathcal{G}_j$ (il suffit de prendre \mathcal{G}_j de diamètre supérieur ou égal à la distance $d(e, g)$ multipliée par le diamètre de \mathcal{G}_i).

Ainsi, puisque la jauge \mathcal{G} est tempérée, on obtient le résultat.

Définition 2.5.4 Les jauges de mots sont définies par des jauges (\mathcal{G}_k) telles que :

- \mathcal{G}_1 soit un ensemble engendrant \mathcal{G} comme semi-groupe ;
- $\mathcal{G}_k = (\mathcal{G}_1)^k$ pour $k \geq 1$, ie est l'ensemble des mots de longueur inférieure ou égale à k dans l'alphabet \mathcal{G}_1 .

Proposition 2.5.2 Soient \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux jauges de mots. Alors :

1. \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont sous-additives ;
2. \mathcal{G} est symétrique si et seulement si l'ensemble \mathcal{G}_1 est symétrique ;
3. \mathcal{G} est finie si et seulement si l'ensemble \mathcal{G}_1 est fini, dans ce cas elle est aussi tempérée ;
4. si \mathcal{G} et \mathcal{G}' sont finies, elles sont équivalentes (ou quasi-isométriques) sur un groupe finiment engendré G , ie il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{C} |g|_{\mathcal{G}'} \leq |g|_{\mathcal{G}} \leq C |g|_{\mathcal{G}'}, \quad \forall g \in G$$

DÉMONSTRATION

Soit \mathcal{G} une jauge de mots.

(1) Comme \mathcal{G} est une jauge de mots, alors \mathcal{G}_1 est un ensemble engendrant G et pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{G}_k = (\mathcal{G}_1)^k$.

Ainsi, soient $g_1, g_2 \in G$, alors :

$$\begin{aligned} |g_1 g_2| &= \min\{k, g_1 g_2 \in \mathcal{G}_k\} \\ &= \min\{k, g_1 g_2 \in (\mathcal{G}_1)^k\} \\ &\leq |g_1| + |g_2| \end{aligned}$$

En effet, si $g_1 \in (\mathcal{G}_1)^i$ et $g_2 \in (\mathcal{G}_1)^j$ avec $j \geq i$, alors dans le pire des cas, on a $g_1 g_2 \in (\mathcal{G}_1)^{i+j}$, d'où l'inégalité. Donc \mathcal{G} est bien sous-additive.

(2) (\Rightarrow) Si \mathcal{G} est symétrique, alors par définition pour tout $k \geq 1$, \mathcal{G}_k est symétrique, donc en particulier \mathcal{G}_1 est symétrique.

(\Leftarrow) Si \mathcal{G}_1 est symétrique, comme pour tout $k \geq 1$, $\mathcal{G}_k = (\mathcal{G}_1)^k$, alors pour tout $k \geq 1$, \mathcal{G}_k est symétrique, donc \mathcal{G} est symétrique.

(3) Pour la finitude, il suffit d'effectuer la même démonstration que pour la symétrie et puisque si la jauge est finie alors elle est tempérée, on obtient la troisième assertion.

(4) Soient \mathcal{G} et \mathcal{G}' deux jauges de mots.

Soit $g \in G$ tel que $|g|_{\mathcal{G}} \leq |g|_{\mathcal{G}'}$, alors il va exister une constante $C > 0$ telle que $\frac{1}{C} |g|_{\mathcal{G}'} \leq |g|_{\mathcal{G}} \leq C |g|_{\mathcal{G}'}$.

De même si on considère un point $h \in G$ tel que $|h|_{\mathcal{G}'} \leq |h|_{\mathcal{G}}$, il va exister une constante $C' > 0$ telle que $\frac{1}{C'} |h|_{\mathcal{G}'} \leq |h|_{\mathcal{G}} \leq C' |h|_{\mathcal{G}'}$.

Au final, si pour C on considère le maximum des constantes $C > 0$ sur \mathcal{G}_1 qui engendrent G , on obtient le résultat voulu (ce maximum existe puisqu'on le considère sur un ensemble fini).

Remarque : Ainsi, pour une mesure de probabilité μ sur un groupe G finiment engendré, la finitude de son premier moment $|\mu|_{\mathcal{G}} = \sum_g |g|\mu(g)$ et celle de son premier moment logarithmique $\sum_g \log |g|\mu(g)$ sont indépendantes du choix de la jauge de mots $|\cdot|$ considérée sur G .

2.5.2 Lemmes importants sur les jauges

Intéressons-nous maintenant à deux lemmes fondamentaux, pour notre application aux groupes hyperboliques, sur le lien entre les jauges et les mesures de probabilité sur les groupes.

Lemme 2.5.1 *Soit \mathcal{G} une jauge tempérée sur G et soit μ une mesure de probabilité sur G telle que $|\mu|_{\mathcal{G}} < \infty$, alors $H(\mu) < \infty$.*

DÉMONSTRATION

Soit \mathcal{G} une jauge tempérée sur G et soit μ une mesure de probabilité sur G telle que $|\mu|_{\mathcal{G}} < \infty$. On sait que pour tout $g \in G$, $0 \leq \mu(g) \leq 1$ et $|g|_{\mathcal{G}} \geq 1$ par définition de $|\cdot|_{\mathcal{G}}$. D'où $-\mu(g) \leq |g|_{\mathcal{G}}\mu(g)$ pour tout $g \in G$.

De plus, on sait également que pour tout $g \in G$, $\log \mu(g) \leq \mu(g)$.

Donc en combinant les deux inégalités, on trouve que pour tout $g \in G$, $-\mu(g) \log \mu(g) \leq |g|_{\mathcal{G}}\mu(g)$. Ainsi en sommant sur $g \in \text{supp } \mu$, on obtient que $H(\mu) \leq |\mu|_{\mathcal{G}}$ et $|\mu|_{\mathcal{G}} < \infty$ par hypothèse, d'où le résultat.

Pour des jauges sous-additives, le théorème ergodique sous-additif de Kingman s'applique immédiatement, ie :

Lemme 2.5.2 *Soit \mathcal{G} une jauge sous-additive sur un groupe G et μ une mesure de probabilité sur G telle que $|\mu|_{\mathcal{G}} < \infty$, alors la limite (le taux d'échappement) :*

$$l(G, \mu, \mathcal{G}) = \lim_n \frac{|x_n|_{\mathcal{G}}}{n}$$

existe pour \mathbb{P} -presque tout chemin simple $x = \{x_n\}$ et dans $L^1(\mathbb{P})$.

DÉMONSTRATION

Soit \mathcal{G} une jauge sous-additive, ie pour tous $g_1, g_2 \in G$, $|g_1 g_2| \leq |g_1| + |g_2|$ et supposons que $|\mu|_{\mathcal{G}} < \infty$.

Soit $x = \{x_n\}$ un chemin, on considère la suite $\{|x_n|\}_n$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} |x_{n+m}| &= |h_1 \dots h_{n+m}| \\ &\leq |h_1 \dots h_n| + |h_{n+1} \dots h_{n+m}| \\ &= |x_n| + |T^n x_m| \end{aligned}$$

où T est le décalage de l'espace des chemins.

Alors d'après le théorème sous-additif ergodique de Kingman (cf théorème 2.5.3), on a l'existence de la limite $\lim_n \frac{|x_n|}{n}$ pour \mathbb{P} -presque tout chemin.

Remarque : Dans la démonstration précédente, on a utilisé le théorème sous-additif ergodique de Kingman (que nous ne démontrerons pas ici) et qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.5.3 *Soit T une transformation préservant la mesure de l'espace de probabilités (Ω, F, μ) . Soit $\{g_n, 1 \leq n < \infty\}$ une suite de fonctions intégrables telle que $g_{n+m}(x) \leq g_n(x) + g_m(T^n x)$. Alors avec probabilité 1, on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)}{n} = g(x) \geq -\infty$$

2.5.3 Maximalité de la μ -frontière

Établissons maintenant un nouveau critère de maximalité des μ -frontières faisant intervenir une suite de jauges sur le groupe.

Théorème 2.5.4 Soit μ une mesure de probabilité d'entropie $H(\mu)$ finie sur un groupe dénombrable G .

Soit $(B, \lambda) \simeq (\Gamma_\xi, \nu_\xi)$ une μ -frontière.

On note par $\Pi = \text{bnd}_\xi$ la projection de $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$ sur (B, λ) .

Si pour λ -presque tout point $b \in B$, il existe une suite de jauges uniformément tempérée $\mathcal{G}^n = \mathcal{G}^n(b)$ telle que :

$$\frac{1}{n} |x_n|_{\mathcal{G}^n(\Pi x)} \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

pour \mathbb{P} -presque tout chemin simple $x = \{x_n\}$.

Alors (B, λ) est la frontière de Poisson de la paire (G, μ) .

DÉMONSTRATION

La condition (2.3), $\frac{1}{n} |x_n|_{\mathcal{G}^n(\Pi x)} \longrightarrow 0$ est équivalente à dire que :

$$\frac{|x_n|_{\mathcal{G}^n(b)}}{n} \longrightarrow 0$$

pour λ -presque tout $b \in B$ et \mathbb{P} -presque tout chemin de la marche aléatoire conditionnée par b .

D'où (B, λ) est la frontière de Poisson d'après le théorème (2.4.4).

En effet, puisque $|x_n|_{\mathcal{G}^n(b)} \geq 1$ par définition de $|\cdot|$, on a :

$$\frac{1}{n} \log |x_n|_{\mathcal{G}^n(b)} \leq \frac{1}{n} |x_n|_{\mathcal{G}^n(b)}$$

D'où le fait que $-\frac{1}{n} \log |x_n|_{\mathcal{G}^n(b)} \longrightarrow 0$.

2.5.4 Maximalité de la μ -frontière via l'approximation des rayons

Enfin concluons cette partie avec son résultat principal identifiant la frontière de Poisson via l'approximation des rayons.

Pour ce faire, donnons-nous $\pi_n : B \longrightarrow G$ une suite d'applications mesurables d'une μ -frontière B dans un groupe G . Géométriquement, on peut penser les suites $\pi_n(b)$, pour $b \in B$, comme des "rayons" dans G correspondant à des points de B . En prenant dans le théorème (2.5.4), $\mathcal{G}^n(b) = \pi_n(b)\mathcal{G}$, où \mathcal{G} est une jauge tempérée fixée sur G , on obtient :

Théorème 2.5.5 Soit μ une mesure de probabilité d'entropie $H(\mu)$ finie sur un groupe dénombrable G .

Soit $(B, \lambda) = \Pi(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$ une μ -frontière.

Si il existe une jauge tempérée \mathcal{G} et une suite d'applications mesurables $\pi_n : B \longrightarrow G$ telles que :

$$\frac{1}{n} |(\pi_n(\Pi x))^{-1} x_n|_{\mathcal{G}} \longrightarrow 0$$

pour \mathbb{P} -presque tout chemin simple $x = \{x_n\}$.

Alors (B, λ) est la frontière de Poisson de la paire (G, μ) .

DÉMONSTRATION

On considère μ une mesure de probabilité d'entropie $H(\mu) < \infty$. On a $(B, \lambda) \simeq (\Gamma_\xi, \nu_\xi) \simeq \Pi(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$ est une μ -frontière, où $\Pi = \text{bnd}_\xi$.

On suppose qu'il existe une jauge tempérée \mathcal{G} et des applications $\pi_n : B \longrightarrow G$ telles que :

$$\frac{1}{n} |(\pi_n(\Pi x))^{-1} x_n|_{\mathcal{G}} \longrightarrow 0$$

pour \mathbb{P} -presque tout x .

On souhaite alors montrer que cette dernière condition est équivalente à celle du théorème (2.5.4).

On considère pour cela la suite de jauges $\mathcal{G}^n(b) = \pi_n(b)\mathcal{G}$. Comme \mathcal{G} est une jauge tempérée, alors d'après la proposition (2.5.1), les translations $\pi_n(b)\mathcal{G}$ forment une famille de jauges uniformément tempérée, et :

$$\frac{1}{n} |(\pi_n(\Pi x))^{-1} x_n|_{\mathcal{G}} = \frac{1}{n} |x_n|_{\pi_n(\Pi x)\mathcal{G}} = \frac{1}{n} |x_n|_{\mathcal{G}^n(\Pi x)} \longrightarrow 0$$

d'après une des hypothèses du théorème (2.5.5).

Ainsi on retrouve toutes les hypothèses du théorème (2.5.4), ce qui conclut la démonstration.

Bilan

Ainsi dans cette partie, nous avons établi un nouveau critère déterminant la frontière de Poisson grâce à l'approximation des rayons et aux μ -frontières. Ce théorème sera appliqué aux groupes hyperboliques dans la suite.

2.6 Approximation des bandes

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à un second critère déterminant la frontière de Poisson via l'approximation des bandes, ainsi qu'à un critère de μ -maximalité de la compactification d'un groupe.

2.6.1 Espace des chemins bilatéraux

Définissons dans un premier temps l'espace des chemins bilatéraux.

Définition 2.6.1 On a défini précédemment l'espace des chemins simples $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$ comme étant l'image de l'espace des incréments μ -distribués indépendants $\{h_n\}$, pour $n \geq 1$ sous l'application :

$$x_n = \begin{cases} e & \text{si } n = 0 \\ x_{n-1}h_n & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

En étendant la relation $x_n = x_{n-1}h_n$ à tous les indices $n \in \mathbb{Z}$ (et en supposant toujours que $x_0 = e$) on obtient l'espace mesurable $(G^{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathbb{P}})$ des chemins bilatéraux $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ correspondant aux suites bilatérales d'incrémentés indépendants μ -distribués $\{h_n\}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

Pour des indices n négatifs la formule (2.4) se réécrit :

$$\begin{aligned} x_{-n} &= x_{-n+1}h_{-n+1}^{-1} \quad \text{pour } n \geq 0 \\ \text{ie } \widehat{x}_n &= x_{-n} = h_0^{-1}h_1^{-1} \dots h_{-n+1}^{-1} \quad \text{pour } n \geq 0 \end{aligned}$$

est le chemin simple de la marche aléatoire sur G gouvernée par la mesure réflexive $\widehat{\mu}$.

Proposition 2.6.1 Les chemins unilatéraux $x = \{x_n\}$, pour $n \geq 0$ et $\widehat{x} = \{\widehat{x}_n\} = \{x_{-n}\}$, pour $n \geq 0$, sont indépendants, ie l'application :

$$\begin{aligned} (G^{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathbb{P}}) &\longrightarrow (G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P}) \times (G^{\mathbb{Z}^+}, \widehat{\mathbb{P}}) \\ \bar{x} &\longmapsto (x, \widehat{x}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces mesurables, où $\widehat{\mathbb{P}}$ est la mesure de l'espace des chemins simples unilatéraux de la marche aléatoire $(G, \widehat{\mu})$.

2.6.2 Décalage de Bernouilli

Définissons également le décalage de Bernouilli sur l'espace des chemins bilatéraux.

Définition 2.6.2 On pose \overline{U} la mesure préservant la transformation de l'espace des chemins bilatéraux $(G^{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathbb{P}})$ induite par le décalage de Bernouilli bilatéral de l'espace des incréments. C'est l'extension naturelle de la transformation U de l'espace des chemins unilatéraux $(G^{\mathbb{Z}^+}, \mathbb{P})$ définie précédemment et elle agit par la formule, étendue aux indices $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\overline{U}^k \bar{x})_n = x_k^{-1} x_{n+k}, \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

ie le chemin $\overline{U}^k \bar{x}$ est obtenu du chemin \bar{x} en le translatant à la fois en temps (via k) et en espace (en le multipliant par x_k^{-1} à gauche dans le but de satisfaire la condition $(\overline{U}^k \bar{x})_0 = e$).

Remarque : En termes de chemins unilatéraux x et \widehat{x} , appliquer \overline{U}^k consiste (pour $k > 0$) à annuler les k premiers facteurs $x_k = h_1 h_2 \dots h_k$ des produits $x_n = h_1 h_2 \dots h_k \dots h_n$, pour $n > 0$ (ie en appliquant à x la transformation U^k) et à ajouter à gauche k facteurs $x_k^{-1} = h_k^{-1} \dots h_2^{-1} h_1^{-1}$ au produit $\widehat{x}_n = x_{-n} = h_0^{-1} h_1^{-1} \dots h_{n-1}^{-1}$.

2.6.3 Frontière de Poisson de la mesure réflexive

On pose $\widehat{\Gamma}$ la frontière de Poisson de la mesure $\widehat{\mu}$ et $\widehat{\nu}$ la mesure harmonique correspondante.

Théorème 2.6.2 *L'action du groupe G sur le produit $(\widehat{\Gamma} \times \Gamma, \widehat{\nu} \otimes \nu)$ est ergodique.*

DÉMONSTRATION

Soit π la projection préservant la mesure : $\overline{x} \mapsto (\widehat{x}, x) \mapsto (\text{bnd } \widehat{x}, \text{bnd } x)$ de l'espace des chemins bilatéraux $(G^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{P}})$ dans l'espace produit $(\widehat{\Gamma} \times \Gamma, \widehat{\nu} \otimes \nu)$.

Montrons tout d'abord que $\forall k \in \mathbb{Z}$:

$$\pi(\overline{U}^k \overline{x}) = x_k^{-1} \pi(\overline{x}) \quad (2.6)$$

On sait d'après la formule (2.5) que pour tous $k, n \in \mathbb{Z}$, $(\overline{U}^k \overline{x})_n = x_k^{-1} x_{n+k}$.

Ensuite d'après le lemme (2.1.1), on sait également que $\text{bnd } (x) = x_1 \text{bnd } (Ux)$.

Considérons maintenant successivement les deux membres de l'égalité que l'on souhaite démontrer. Soit $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} x_k^{-1} \pi(\overline{x}) &= x_k^{-1} (\text{bnd } \widehat{x}, \text{bnd } x) \quad \text{par définition de } \pi; \\ &= (x_k^{-1} \text{bnd } \widehat{x}, x_k^{-1} \text{bnd } x) \end{aligned}$$

Et on a pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \pi(\overline{U}^k \overline{x}) &= (\text{bnd } \widehat{U}^k \widehat{x}, \text{bnd } U^k x) \\ &= (\text{bnd } \widehat{U}^k \widehat{x}, x_k^{-1} \text{bnd } x) \end{aligned}$$

Or par définition $(\widehat{U}x)_n = \widehat{x}_1^{-1} \widehat{x}_{n+1}$, d'où $(\widehat{U}^k \widehat{x})_n = x_k^{-1} \widehat{x}_{n+k}$. Donc $\text{bnd } \widehat{U}^k \widehat{x} = x_k^{-1} \text{bnd } \widehat{x}$ et de la sorte notre égalité est démontrée.

À présent nous allons montrer que l'action est bien ergodique par l'absurde.

Soit alors $A \subset \widehat{\Gamma} \times \Gamma$ un sous-ensemble G -invariant de $\widehat{\Gamma} \times \Gamma$ tel que $0 < \widehat{\nu} \otimes \nu(A) < 1$.

Alors d'après la relation (2.6) l'image réciproque $\pi^{-1}(A)$ est \overline{U} -invariante et

$$0 < \widehat{\nu} \otimes \nu(A) = \overline{\mathbb{P}}(\pi^{-1}(A)) = \overline{\mathbb{P}}(\overline{U}(\pi^{-1}(A))) < 1$$

ce qui est impossible par ergodicité du décalage bilatéral de Bernouilli \overline{U} .

2.6.4 Maximalité des μ -frontières via l'approximation des bandes

À présent, après ces quelques définitions préliminaires, nous sommes en mesure d'énoncer le théorème nous donnant la maximalité de deux μ -frontières via l'approximation des bandes.

Théorème 2.6.3 *Soit μ une mesure de probabilité d'entropie $H(\mu)$ finie sur un groupe dénombrable G .*

Soient (B_-, λ_-) et (B_+, λ_+) les $\widehat{\mu}$ et μ -frontières.

Si il existe une jauge $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_k)$ sur G de fonction $|\cdot| = |\cdot|_{\mathcal{G}}$ et une application S mesurable G -équivariante qui à une paire de points $(b_-, b_+) \in B_- \times B_+$ associe une "bande" (non vide) $S(b_-, b_+) \subset G$ telles que $\forall g \in G$ et $\lambda_- \otimes \lambda_+$ -presque tout $(b_-, b_+) \in B_- \times B_+$:

$$\frac{1}{n} \log \text{card} \{S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|}\} \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

en probabilité par rapport à \mathbb{P} dans l'espace des chemins simples $x = \{x_n\}$, avec $n \geq 0$.

Alors la frontière (B_+, λ_+) est maximale.

DÉMONSTRATION

Soient :

$$\begin{aligned} \Pi_- : (G^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{P}}) &\longrightarrow (B_-, \lambda_-) \simeq (\widehat{\Gamma}_{\widehat{\xi}}, \widehat{\nu}_{\widehat{\xi}}) & \Pi_+ : (G^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{P}}) &\longrightarrow (B_+, \lambda_+) \simeq (\Gamma_{\xi}, \nu_{\xi}) \\ \overline{x} &\longmapsto \text{bnd } \widehat{\xi} \widehat{x} & \overline{x} &\longmapsto \text{bnd } \xi x \end{aligned}$$

les projections surjectives de l'espace des chemins bilatéraux $(G^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{P}})$ sur les frontières $(B_-, \lambda_-) \simeq (\widehat{\Gamma}_{\widehat{\xi}}, \widehat{\nu}_{\widehat{\xi}})$ et $(B_+, \lambda_+) \simeq (\Gamma_{\xi}, \nu_{\xi})$ respectivement.

En remplaçant si nécessaire l'application S par une translation à droite appropriée $((b_-, b_+) \mapsto S(b_-, b_+)g)$, on peut supposer, sans perte de généralité, que :

$$\lambda_- \otimes \lambda_+ \{(b_-, b_+), e \in S(b_-, b_+)\} = \overline{\mathbb{P}}(e \in S(\Pi_- \bar{x}, \Pi_+ \bar{x})) = p > 0$$

En utilisant la formule (2.6) combinée avec le fait que la mesure $\overline{\mathbb{P}}$ est \overline{U} -invariante, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}(x_n \in S(\Pi_- \bar{x}, \Pi_+ \bar{x})) &= \overline{\mathbb{P}}(e \in x_n^{-1} S(\Pi_- \bar{x}, \Pi_+ \bar{x})) \\ &= \overline{\mathbb{P}}(e \in S(x_n^{-1} \Pi_- \bar{x}, x_n^{-1} \Pi_+ \bar{x})) \\ &= \overline{\mathbb{P}}(e \in S(x_n^{-1} \text{bnd}_{\widehat{\xi}} \bar{x}, x_n^{-1} \text{bnd}_{\xi} x)) \\ &= \overline{\mathbb{P}}(e \in S(\Pi_- \overline{U}^n \bar{x}, \Pi_+ \overline{U}^n \bar{x})) \quad \text{d'après (2.6)}; \\ &= \overline{\mathbb{P}}(e \in S(\Pi_- \bar{x}, \Pi_+ \bar{x})) \quad \text{car } \overline{P} \text{ est } \overline{U}\text{-invariante}; \\ &= p \quad \text{d'après ce qu'on vient de supposer.} \end{aligned}$$

À présent, puisque l'image de la mesure $\overline{\mathbb{P}}$ sous l'application $\bar{x} \mapsto (\Pi_- \bar{x}, \Pi_+ \bar{x})$ est $\lambda_- \otimes \lambda_+$, on peut réécrire la formule précédente comme :

$$p = \int \int p_n^{b_+}(S(b_-, b_+)) d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) \quad (2.8)$$

où $p_n^{b_+}$ sont les distributions unidimensionnelles de la mesure conditionnelle \mathbb{P}^{b_+} (avec \mathbb{P}^{b_+} défini comme dans la partie 3 de ce chapitre).

Soit $K_n = \min\{k \geq 1, \mu_n(\mathcal{G}_k) \geq 1 - \frac{p}{2}\}$, alors en particulier :

$$\mathbb{P}(|x_n| \leq K_n) = \mathbb{P}(\min\{k \geq 1, x_n \in \mathcal{G}_k\} \leq K_n) = \mu_n(\mathcal{G}_{K_n}) \geq 1 - \frac{p}{2}$$

par définition de K_n .

Ainsi si on conditionne par $\Pi_+ \bar{x} = b_+$, on a :

$$\int p_n^{b_+}(\mathcal{G}_{K_n}) d\lambda_+(b_+) \geq 1 - \frac{p}{2} \quad (2.9)$$

Puisque de plus $\forall (b_-, b_+) \in B_- \times B_+$, on a :

$$p_n^{b_+}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) \geq p_n^{b_+}(S(b_-, b_+)) + p_n^{b_+}(\mathcal{G}_{K_n}) - 1$$

(cette relation se déduit du fait que pour tous événements A et B , on sait que : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, d'où $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$, or $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, d'où l'inégalité).

Ainsi grâce aux relations (2.8) et (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} &\int \int p_n^{b_+}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) \\ &\geq \int \int p_n^{b_+}(S(b_-, b_+)) d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) + \int \int p_n^{b_+}(\mathcal{G}_{K_n}) d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) - \int \int d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) \\ &\geq \int \int p_n^{b_+}(S(b_-, b_+)) d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) + \int \int p_n^{b_+}(\mathcal{G}_{K_n}) d\lambda_-(b_-) d\lambda_+(b_+) - 1 \\ &\geq 1 - \frac{p}{2} + p - 1 \quad \text{d'après (2.8) et (2.9)}; \\ &\geq \frac{p}{2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\lambda_- \otimes \lambda_+ \{(b_-, b_+), p_n^{b_+}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) \geq \frac{p}{4}\} \geq \frac{p}{4} \quad (2.10)$$

D'un autre côté, la condition (2.7) nous donne :

$$\frac{1}{n} \log \text{card}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|}) \longrightarrow 0$$

Alors en particulier :

$$\frac{1}{n} \log \text{card}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) \longrightarrow 0$$

pour $\lambda_- \otimes \lambda_+$ -presque tout $(b_-, b_+) \in B_- \times B_+$.

D'où l'existence d'un sous-ensemble $Z \subset B_- \times B_+$ et d'une suite ϕ_n telle que $\frac{\log \phi_n}{n} \rightarrow 0$, tels que :

$$\lambda_- \otimes \lambda_+(Z) \geq 1 - \frac{p}{8} \quad (2.11)$$

et

$$\text{card}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) \leq \phi_n, \quad \forall (b_-, b_+) \in Z \quad (2.12)$$

Ainsi en combinant (2.10), (2.11) et (2.12) cela montre qu'il existe une suite d'ensembles $X_n \subset B_- \times B_+$ telle que :

$$\begin{aligned} \lambda_- \otimes \lambda_+(X_n) &\geq \frac{p}{8} \\ p_n^{b_+}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) &\geq \frac{p}{4}, \quad \forall (b_-, b_+) \in X_n \\ \text{card}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{K_n}) &\leq \phi_n, \quad \forall (b_-, b_+) \in X_n \end{aligned}$$

Donc, en considérant Y_n , la projection surjective de X_n sur B_+ , on obtient que $\lambda_+(Y_n) \geq \frac{p}{8}$ et pour presque tout $b_+ \in Y_n$, il existe un ensemble $A = A(b_+, n)$ tel que $p_n^{b_+}(A) \geq \frac{p}{4}$ et $\text{card}(A) \leq \phi_n$. D'où la maximalité de la frontière (B_+, λ_+) d'après le corollaire (4.4.1).

2.6.5 Corollaires du critère de maximalité

Étudions maintenant deux variantes du théorème que nous venons de démontrer. Mais remarquons tout d'abord que la sous-exponentialité des intersections $S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|}$ est la condition clé du théorème (2.6.3). Ainsi plus les bandes $S(b_-, b_+)$ sont fines, plus la classe de mesures satisfaisant la condition (2.7) du théorème (2.6.3) est grande. Nous allons illustrer cela, en donnant deux corollaires du théorème (2.6.3).

Théorème 2.6.4 *Soit \mathcal{G} une jauge sous-additive tempérée sur un groupe dénombrable G de fonction $|\cdot| = |\cdot|_{\mathcal{G}}$ (cas particulier : G est finiment engendré et \mathcal{G} est une jauge de mots finie).*

Soit μ une mesure de probabilité sur G .

Soient (B_-, λ_-) et (B_+, λ_+) les $\hat{\mu}$ et μ -frontières.

On suppose qu'il existe une application mesurable G -équivariante : $B_- \times B_+ \ni (b_-, b_+) \mapsto S(b_-, b_+) \subset G$. Si, de plus :

(a) *soit la mesure μ a un premier moment fini et pour $\lambda_- \otimes \lambda_+$ -presque tout $(b_-, b_+) :$*

$$\frac{1}{k} \log \text{card}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_k) \rightarrow 0$$

(ie les bandes $S(b_-, b_+)$ croissent sous-exponentiellement par rapport à \mathcal{G});

(b) *soit la mesure μ a un premier moment logarithmique fini et une entropie finie et pour $\lambda_- \otimes \lambda_+$ -presque tout $(b_-, b_+) :$*

$$\sup_k \frac{1}{\log k} \log \text{card}(S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_k) \rightarrow 0$$

(ie les bandes $S(b_-, b_+)$ croissent de façon polynomiale).

Alors (B_-, λ_-) et (B_+, λ_+) sont maximales.

DÉMONSTRATION

(a) On cherche à se ramener aux conditions du théorème (2.6.3).

On a μ une mesure de probabilité sur un groupe G dénombrable, \mathcal{G} une jauge et on a l'existence d'une fonction mesurable G -équivariante S .

À présent d'après le lemme (2.5.1), comme \mathcal{G} est une jauge tempérée et μ a un premier moment fini, alors l'entropie $H(\mu)$ de la mesure μ est finie, ce qui est une des conditions du théorème (2.6.3).

De plus, d'après le lemme (2.5.2), comme \mathcal{G} est sous-additive et $|\mu|_{\mathcal{G}} < \infty$, alors il existe un taux d'échappement $l(G, \mu, \mathcal{G}) = \lim \frac{|x_n|_{\mathcal{G}}}{n}$.

De plus $\forall g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \text{card}\{S(b_-, b_+)g \cap \mathcal{G}_{|x_n|}\} &= \text{card}\{S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|}g^{-1}\} \\ &\leq \text{card}\{S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|+|g^{-1}|}\} \quad \text{car la jauge est croissante;} \end{aligned}$$

donc la condition (2.7) est également satisfaite.

Ainsi toutes les conditions du théorèmes (2.6.3) sont satisfaites, d'où le résultat.

(b) La démonstration est analogue à celle de la partie (a).

On sait que la mesure μ a une entropie finie, il reste donc à montrer la condition (2.7).

Pour ce faire, montrons tout d'abord que $\frac{\log |x_n|}{n} \rightarrow 0$.

Comme \mathcal{G} est sous-additive, on sait que :

$$|x_n| = |h_1 h_2 \dots h_n| \leq |h_1| + |h_2| + \dots + |h_n|$$

où les h_n sont les incréments indépendants μ -distribués de la marche aléatoire.

Et puisque la mesure μ a son premier moment logarithmique fini, alors presque sûrement $\frac{\log |h_n|}{n} \rightarrow 0$,

il s'ensuit donc que presque sûrement $\frac{\log |x_n|}{n} \rightarrow 0$.

D'où pour $\lambda_- \otimes \lambda_+$ -presque tout (b_-, b_+) et \mathbb{P} -presque tout chemin $\{x_n\}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \text{card} \{S(b_-, b_+)g \cap \mathcal{G}_{|x_n|}\} &\leq \frac{1}{n} \log \text{card} \{S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|+|g^{-1}|}\} \quad \text{d'après la partie (a) de cette preuve;} \\ &= \frac{\log(|x_n| + |g^{-1}|)}{n} \frac{\log \text{card} \{S(b_-, b_+) \cap \mathcal{G}_{|x_n|+|g^{-1}|}\}}{\log(|x_n| + |g^{-1}|)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\frac{\log |x_n|}{n} \rightarrow 0$ et d'après l'hypothèse (b) du théorème.

Donc toutes les conditions du théorèmes (2.6.3) sont bien vérifiées, d'où le résultat.

2.6.6 μ -maximalité de la compactification

Enfin terminons cette partie en introduisant une nouvelle condition sur la compactification hyperbolique d'un groupe et en énonçant un critère de μ -maximalité de cette compactification.

Condition 3 *Il existe une distance d invariante à gauche sur G telle que la jauge correspondante de fonction $|\cdot|_d$ sur G soit tempérée et que pour tous points distincts $b_- \neq b_+ \in \partial G$, on a :*

1. *le crayon $P(b_-, b_+)$, de toutes les d -géodésiques α dans G telles que b_- (respectivement b_+) soit un point limite du rayon négatif (respectivement positif) de α , est non vide ;*
2. *il existe un ensemble fini $A = A(b_-, b_+)$ tel que toutes les géodésiques du crayon $P(b_-, b_+)$ intersectent $A(b_-, b_+)$.*

Ainsi en combinant les théorèmes (2.2.1) et (2.6.4) on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.6.5 *Soit $\overline{G} = G \cup \partial G$ une compactification séparable d'un groupe dénombrable G satisfaisant les conditions (1), (2) et (3).*

Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que :

1. *le sous-groupe $gr(\mu)$ engendré par son support soit non-élémentaire par rapport à sa compactification ;*
2. *son entropie $H(\mu)$ soit finie ;*
3. *elle admette un premier moment logarithmique fini par rapport à la jauge déterminée par la distance d de la condition (3).*

Alors la compactification \overline{G} est μ -maximale dans le sens de la définition (2.1.16).

DÉMONSTRATION

On sait que $\overline{G} = G \cup \partial G$ est une compactification séparable d'un groupe dénombrable G satisfaisant les conditions (1) et (2). On sait que μ est une mesure de probabilité telle que $gr(\mu)$ soit non-élémentaire par rapport à la compactification.

Par conséquent, on peut appliquer le théorème (2.2.1) qui nous dit que \mathbb{P} -presque tout $x \in G^{\mathbb{Z}^+}$ converge vers $\Pi x \in \partial G$, que la mesure $\lambda = \Pi * \mathbb{P}$ est purement non-atomique, que $(\partial G, \lambda)$ est une μ -frontière et que λ est l'unique mesure de probabilité μ -stationnaire sur ∂G .

Ainsi $(\partial G, \lambda_+)$ est une μ -frontière (où $\lambda_+ = \lambda$).

Montrons maintenant la maximalité de \overline{G} via le théorème (2.6.4).

Auparavant, on remarque que la mesure réflexive $\widehat{\mu}$ satisfait les conditions du théorème (2.2.1) simultanément avec la mesure μ . Notons alors λ_- l'unique mesure $\widehat{\mu}$ -stationnaire sur ∂G .

À présent d'après le théorème (2.2.1) on sait que les mesures λ_- et λ_+ sont purement non-atomiques, par conséquent la diagonale $\partial G \times \partial G$ est de mesure nulle pour $\lambda_- \otimes \lambda_+$.

Ainsi d'après la condition (3) pour $\lambda_- \otimes \lambda_+$ -presque tout $(b_-, b_+) \in \partial G \times \partial G$, il existe un minimum $M = M(b_-, b_+)$ tel que toutes les géodésiques du crayon $P(b_-, b_+)$ intersectent une M -boule dans G (ce minimum existe bien car les ensembles $A(b_-, b_+)$ intersectant toutes les géodésiques de $P(b_-, b_+)$ sont dénombrables, puisque G l'est, donc ces ensembles sont en bijections avec \mathbb{N} . D'où l'existence d'un nombre minimum).

On considère maintenant l'application :

$$\begin{aligned} B_- \times B_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (b_-, b_+) &\longmapsto M(b_-, b_+) \end{aligned}$$

Elle est nécessairement G -équivariante d'après la condition (2), donc elle doit prendre presque sûrement une valeur constante M_0 d'après le théorème (2.6.2).

Définissons maintenant la bande $S(b_-, b_+) \subset G$ comme l'union de toutes les boules B de diamètre M_0 telles que toutes les géodésiques du crayon $P(b_-, b_+)$ passent à travers B .

Alors l'application :

$$\begin{aligned} B_- \times B_+ &\longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ (b_-, b_+) &\longmapsto S(b_-, b_+) \end{aligned}$$

est aussi G -équivariante par définition de $S(b_-, b_+)$ et pour toute géodésique α de $S(b_-, b_+)$, la bande $S(b_-, b_+)$ est contenue dans un M_0 -voisinage de α .

Ainsi les bandes $S(b_-, b_+)$ ont une croissance linéaire (dans le sens de la condition (b) du théorème (2.6.4)). Donc toutes les conditions de ce théorème sont satisfaites, ce qui signifie que \overline{G} est μ -maximale.

Bilan

Nous avons, dans cette partie, établi un nouveau critère de maximalité des μ -frontières via l'approximation des bandes et un critère de μ -maximalité de la compactification. Nous sommes maintenant en mesure de les appliquer.

2.7 Groupes hyperboliques

Dans cette dernière partie, nous allons détailler l'exemple des groupes hyperboliques et c'est sur ces groupes que nous allons appliquer tout ce que nous venons de voir dans ce chapitre. Et ceci dans le but d'arriver à montrer que la frontière de Poisson de marches aléatoires sur les groupes hyperboliques n'est pas triviale. Afin de les comparer, nous allons utiliser les deux approximations celle des rayons et celle des bandes pour démontrer notre résultat (ie appliquer les théorèmes (2.5.5) et (2.6.4)).

2.7.1 Groupe hyperbolique, espace hyperbolique

Définissons tout d'abord les groupes hyperboliques et les espaces hyperboliques.

Définition 2.7.1 *On appelle graphe une paire ordonnée d'ensembles $G = (V(G), E(G))$ où $E(g) \subset V(G) \times V(G)$. Les éléments de $E(G)$ sont les chemins du graphe G et ceux de $V(G)$ sont ses sommets.*

Définition 2.7.2 *Soit G un groupe. Soit $S \subset G$ (pas nécessairement un sous-groupe de G).*

On appelle graphe de Cayley de S sur G , le graphe $C(G, S) = (V, E)$ où :

- l'ensemble des sommets V est égal à G ;
- $(g, h) \in E$ si et seulement si $\exists s \in S, g.s = h$.

Définition 2.7.3 *Soit $\delta \geq 0$. Un espace métrique (X, d) est dit δ -hyperbolique si :*

$$(x|y)_w \geq \min\{(x|z)_w, (y|z)_w\} - \delta$$

où $(x|y)_w$ désigne le produit de Gromov et est défini par :

$$(x|y)_w = \frac{1}{2}(d(x, w) + d(y, w) - d(x, y))$$

et hyperbolique si la valeur de δ n'importe pas.

Définition 2.7.4 Un groupe finiment engendré est dit hyperbolique (selon Gromov) si son graphe de Cayley est un espace métrique δ -hyperbolique pour un certain $\delta > 0$.

On peut également définir d'autres objets qui s'avèreront importants pour la suite :

Définition 2.7.5 Soit X un espace métrique hyperbolique. On définit son bord ∂X comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des suites tendant vers l'infini, dans le sens où une suite $(x_i)_{i \geq 1}$ de points de X tend vers l'infini si $\lim_{i,j} (x_i|x_j) = \infty$.

Ainsi, si $a \in \partial X$, on écrit $x_i \rightarrow a$, si a est la classe de la suite $(x_i)_i$.

De plus, deux suites $(x_i)_i$ et $(y_j)_j$ tendant vers l'infini sont dites équivalentes si et seulement si $(x_i|x_j) \rightarrow \infty$.

Définition 2.7.6 La compactification hyperbolique d'un groupe hyperbolique Γ , notée $\bar{\Gamma}$ est définie par l'égalité :

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$$

où $\partial\Gamma$ est le bord à l'infini (ou la frontière) de Γ .

On munit $\bar{\Gamma}$ d'une structure ultramétrique naturelle définie par : pour $x \in \partial\Gamma$ et $(y_n)_n$ une suite à valeurs dans Γ , on a $\lim_n y_n = x$ si :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, y_n \in x_m\Gamma$$

Définition 2.7.7 Une suite de points $(x_n)_n$ dans un espace hyperbolique de Gromov X muni de la distance d est dite régulière s'il existe un rayon géodésique α et un nombre $l \geq 0$ (le taux d'échappement) tels que $d(x_n, \alpha(nl)) = o(n)$, ie si la suite $(x_n)_n$ suit asymptotiquement la rayon α .

Si $l > 0$, on dit que $(x_n)_n$ est une suite régulière non-triviale.

2.7.2 Critère de régularité des suites

Établissons maintenant un critère de régularité des suites sur un espace hyperbolique.

Pour ce faire, on fixe un point de référence $\omega \in X$ et on pose $|x| = d(\omega, x)$.

Et notons désormais le produit de Gromov par rapport à ω par :

$$(x|y) = \frac{1}{2}(|x| + |y| - d(x, y))$$

Théorème 2.7.1 Une suite $(x_n)_n$ d'un espace hyperbolique de Gromov X est régulière si et seulement si :

1. $d(x_n, x_{n+1}) = o(n)$;
2. $\frac{|x_n|}{n} \rightarrow l \geq 0$.

DÉMONSTRATION

(\Rightarrow) On suppose que la suite $(x_n)_n$ est régulière, alors il existe un rayon géodésique α et une constante $l \geq 0$ tels que $d(x_n, \alpha(nl)) = o(n)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leq d(x_n, \alpha(nl)) + d(\alpha(nl), x_{n+1}) \\ &\leq o(n) \end{aligned}$$

D'où $d(x_n, x_{n+1}) = o(n)$.

De plus on aura bien le fait que $\frac{|x_n|}{n} \rightarrow l \geq 0$.

(\Leftarrow) Montrons que (1) et (2) impliquent la régularité sous l'hypothèse $l > 0$.
On suppose que la suite $(x_n)_n$ vérifie (1) et (2), alors on sait que :

$$\begin{aligned} (x_{n-1}|x_n) &= \frac{1}{2}(|x_n| + |x_{n-1}| - d(x_n, x_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2}(nl + o(n) + (n-1)l + o(n-1) - o(n-1)) \\ &= \frac{1}{2}(2nl - l + o(n)) \\ &= nl + o(n) \end{aligned}$$

ie $(x_{n-1}|x_n) \longrightarrow \infty$.

On en déduit donc que $(x_n|x_m) \longrightarrow \infty$, ie la suite $(x_n)_n$ converge vers un point $x_\infty \in \partial X$ dans la compactification (par définition de ∂X).

À présent, on pose α_n (respectivement α_∞) la géodésique joignant ω à x_n (respectivement à x_∞). On note aussi les points des géodésiques à une distance t de ω par $[x_n]_t = \alpha_n(t)$ (respectivement $[x_\infty]_t = \alpha_\infty(t)$).

Soit $\epsilon \geq 0$ tel que $\epsilon < \frac{l}{2}$ et soit :

$$N = N(\epsilon) = \min\{n > 0, \quad (x_{n-1}|x_n) \geq (l - \epsilon)n\}$$

En particulier, étant donné que :

$$\begin{aligned} (x_{n-1}|x_n) &= \frac{1}{2}(|x_n| + |x_{n-1}| - d(x_n, x_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2}(d(x_n, \omega) + d(x_{n-1}, \omega) - d(x_n, x_{n-1})) \\ &\leq \frac{1}{2}(d(x_n, \omega) + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, \omega) - d(x_n, x_{n-1})) \\ &= d(x_n, \omega) \end{aligned}$$

De même, on montre que : $(x_{n-1}|x_n) \leq d(x_{n-1}, \omega)$.

D'où $(x_n|x_{n-1}) \leq \min\{|x_n|, |x_{n-1}|\}$. Donc on a $|x_n| \geq (n - \epsilon)l$ pour $n \geq N$ et de la sorte les troncatures $x_n^\epsilon = [x_n]_{(l-\epsilon)n}$ sont bien définies.

De plus, les points x_{n-1}^ϵ et x_n^ϵ appartiennent aux côtés du triangle de géodésiques de sommets ω , x_{n-1} et x_n , d'où :

$$\begin{aligned} d(x_{n-1}^\epsilon, x_n^\epsilon) &\leq ||x_{n-1}^\epsilon| - |x_n^\epsilon|| + 4\delta \\ &= |(n-1)(l-\epsilon) - n(l-\epsilon)| + 4\delta \\ &= l - \epsilon + 4\delta \quad \forall n \geq N \end{aligned}$$

car les triangles géodésiques de X sont 4δ -fins (d'après [GdlH90] p.38 à 41) et $l - \epsilon > 0$.

D'où pour tous indices $n, m \geq N$:

$$\begin{aligned} d(x_n^\epsilon, x_m^\epsilon) &\leq ||x_n^\epsilon| - |x_m^\epsilon|| + 4\delta \\ &\leq |n(l-\epsilon) - m(l-\epsilon)| + 4\delta \\ &\leq |n - m|(l - \epsilon + 4\delta) \\ &\leq |n - m|(l + 4\delta) \quad \text{car } \epsilon \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_n^\epsilon, x_m^\epsilon) &\geq ||x_n^\epsilon| - |x_m^\epsilon|| \\ &= |n - m|(l - \epsilon) \\ &\geq (n - m)\frac{l}{2} \end{aligned}$$

car comme $\epsilon < \frac{l}{2}$, alors $-\epsilon > -\frac{l}{2}$, d'où $l - \epsilon > \frac{l}{2} > 0$.

Il s'ensuit alors que la suite $(x_n^\epsilon)_{n \geq N}$ est une quasi-géodésique et d'après [GdlH90] p.101, on sait qu'il va exister un rayon géodésique β partant du point x_N^ϵ tel que $d(x_n^\epsilon, \beta) \leq H$, $\forall n \geq N$ et pour une constante $H = H(\delta, l)$.

De plus, puisque $(x_n | x_n^\epsilon) = n(l - \epsilon) \rightarrow \infty$, alors la suite (x_n^ϵ) converge aussi vers le point x_∞ par définition de ∂X , donc les rayons géodésiques β et α_∞ sont asymptotiques.

D'où $d(x_n^\epsilon, \alpha_\infty) \leq H + 8\delta$ et :

$$\begin{aligned} d(x_n, \alpha_\infty) &\leq d(x_n, x_n^\epsilon) + d(x_n^\epsilon, \alpha_\infty) \\ &\leq d(x_n, x_n^\epsilon) + H + 8\delta \\ &= (|x_n| - n(l - \epsilon)) + H + 8\delta \end{aligned}$$

pour tout n suffisamment grand (cf [GdlH90] p.117).

Enfin puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit, on a $d(x_n, \alpha_\infty) \leq H + 8\delta + o(n)$. D'où le fait que $(x_n)_n$ suit asymptotiquement α_∞ , ie $(x_n)_n$ est régulière.

Remarque : Les inégalités

$$\begin{aligned} d(x_n^\epsilon, x_m^\epsilon) &\geq ||x_n^\epsilon - x_m^\epsilon|| \\ d(x_n^\epsilon, x_m^\epsilon) &\leq ||x_n^\epsilon - x_m^\epsilon|| + 4\delta \end{aligned}$$

découlent du fait qu'on a l'égalité seulement dans le cas où les points sont alignés.

2.7.3 Résultats préliminaires

Nous allons énoncer maintenant quelques résultats préliminaires qui nous permettront de faciliter les démonstrations des théorèmes qui vont suivre.

Proposition 2.7.2 *Un sous-groupe d'un groupe hyperbolique G est élémentaire par rapport à la compactification hyperbolique dans le sens de la définition (2.2.5) si et seulement si il est soit fini, soit une extension finie de \mathbb{Z} , sinon il n'est pas moyennable.*

DÉMONSTRATION

(\Rightarrow) Soit Γ un sous-groupe élémentaire de G , ie Γ fixe un sous-ensemble de ∂G .

D'après [Gro87], comme Γ est un sous-groupe d'un groupe hyperbolique, alors $\partial\Gamma$ est vide ou admet exactement deux points, ce qui signifie toujours d'après [Gro87] que Γ est soit fini, soit une extension finie de \mathbb{Z} .

(\Leftarrow) Soit Γ un sous-groupe d'un groupe hyperbolique.

Si Γ est fini, alors d'après la Proposition 15 de [GdlH90], on sait que $\partial\Gamma$ sera vide.

Si Γ est une extension finie de \mathbb{Z} , alors toujours d'après [GdlH90], on sait que $\partial\Gamma$ admet exactement deux points.

Et d'après [Gro87] dans ces deux cas, cela signifie que Γ est élémentaire par rapport à la compactification hyperbolique.

Proposition 2.7.3 *La frontière de Poisson d'une mesure μ sur G est non-triviale si et seulement si $gr(\mu)$ est non-élémentaire.*

DÉMONSTRATION

La démonstration se déduit de la proposition (2.7.2) et du théorème (1.5.2) du premier chapitre.

À présent, énonçons un premier résultat intermédiaire important dans l'application de l'approximation des rayons :

Théorème 2.7.4 *Soit μ une mesure de probabilité ayant son premier moment fini sur un groupe hyperbolique G telle que $gr(\mu)$ soit non-élémentaire.*

Alors presque tout chemin simple de la marche aléatoire (G, μ) est une suite régulière non-triviale dans G .

DÉMONSTRATION

D'après le lemme (2.5.2), on sait qu'il va exister un taux d'échappement l correspondant à une certaine jauge de mots fixée.

Comme $gr(\mu)$ est non-élémentaire, alors d'après la proposition (2.7.3), la frontière de Poisson de μ est non-triviale, d'où d'après le théorème (2.5.5) le fait que l soit strictement positif.

De plus puisque μ a un premier moment logarithmique fini (car elle a un premier moment fini), alors :

$$d(x_{n-1}, x_n) = |h_n| = o(n)$$

car $\frac{|h_n|}{n} \rightarrow 0$ d'après ce qu'on a vu précédemment dans une démonstration et par définition de la distance d .

Donc la suite $(x_n)_n$ vérifie :

$$\frac{|x_n|}{n} \rightarrow l > 0 \quad \text{et} \quad d(x_n, x_{n-1}) = o(n)$$

ie d'après le théorème (2.7.1) que $(x_n)_n$ est régulière non-triviale.

2.7.4 Détermination de la frontière de Poisson via l'approximation des rayons

Appliquons maintenant le théorème faisant intervenir l'approximation des rayons au cas particulier des groupes hyperboliques.

Théorème 2.7.5 *Soit μ une mesure de probabilité ayant un premier moment fini sur un groupe hyperbolique G telle que le groupe $gr(\mu)$ soit non-élémentaire.*

Alors presque tous les chemins simples de la marche aléatoire (G, μ) convergent dans la compactification hyperbolique et la frontière hyperbolique ∂G munie de la mesure limite résultante est isomorphe à la frontière de Poisson de (G, μ) .

DÉMONSTRATION

Soit $\xi \in \partial G$, on pose α_ξ le rayon géodésique tel que l'application : $\xi \mapsto \alpha_\xi$ soit mesurable (prendre par exemple pour α_ξ le rayon minimal pour l'ordre lexicographique le long de tous les rayons joignant e et ξ).

Soit l'application :

$$\begin{aligned} \pi_n : \partial G &\longrightarrow G \\ \xi &\longmapsto \pi_n(\xi) = \alpha_\xi([nl]) \end{aligned}$$

où l est le taux d'échappement et $[t]$ la partie entière de t .

Alors d'après le théorème (2.7.4), on sait que tout chemin $x = \{x_n\}$ sera une suite régulière non-triviale, ie $d(x_n, \pi_n(x_\infty)) = d(x_n, \alpha_\infty([nl])) = o(n)$ pour \mathbb{P} -presque tout x par définition de la régularité.

On peut alors appliquer le théorème (2.5.5) à la suite π_n , qui vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |(\pi_n(\Pi x))^{-1} x_n|_{\mathcal{G}} &= \frac{1}{n} d(\pi_n(\Pi x), x_n) \\ &= \frac{1}{n} d(\pi_n(x_\infty), x_n) \\ &= \frac{1}{n} d(\alpha_\infty([nl]), x_n) \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

D'où le fait que ∂G muni de la mesure limite soit isomorphe à la frontière de Poisson.

2.7.5 Détermination de la frontière de Poisson via l'approximation des bandes

Faisons de même que dans le paragraphe précédent, mais cette fois-ci utilisons le théorème faisant intervenir l'approximation des bandes.

D'ailleurs, en utilisant l'approximation des bandes à la place de celle des rayons, on obtient un résultat plus fort d'une façon plus simple et c'est ce que nous allons constater.

Proposition 2.7.6 *La compactification hyperbolique d'un groupe hyperbolique non-élémentaire satisfait les conditions (1), (2) et (3).*

DÉMONSTRATION

Montrons que \overline{G} satisfait la condition (1).

En fait cette condition est immédiatement vérifiée par définition de la compactification hyperbolique. En effet, si la suite $(g_n)_n \in G$ converge vers un point $y \in \partial G$, alors cela signifie que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, g_n \in y_m G$$

Mais alors dans ce cas pour tout $x \in G$, on a aussi :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, g_n x \in y_m G$$

(car G est un groupe). D'où la convergence de $(g_n x)_n$ vers y pour tout $x \in G$.

Montrons maintenant que la condition (2) est également vérifiée.

Comme \overline{G} est la compactification hyperbolique d'un groupe hyperbolique non-élémentaire, alors d'après la Proposition-Définition 15 de [GdlH90] se trouvant dans le chapitre 7, au paragraphe 5, on sait que ∂G admet au moins trois points.

À présent, soient $\xi_- \neq \xi_+ \in \partial G$, on pose $S(\xi_-, \xi_+)$ l'union des points de toutes les géodésiques dans G joignant ξ_- à ξ_+ . Et on considère l'application :

$$\begin{aligned} S : \partial G \times \partial G &\longrightarrow \mathcal{P}(G) \\ (\xi_-, \xi_+) &\longmapsto S(\xi_-, \xi_+) \end{aligned}$$

En fait S vérifie les conditions voulues d'après les paragraphes 7.3 et 7.5.A de [GdlH90], car dans ceux-ci on apprend que l'enveloppe $S(\xi_-, \xi_+)$ est quasi-convexe (ou ϵ -convexe).

Montrons pour finir que la compactification vérifie la condition (3).

Comme on considère depuis le début une mesure μ sur G , alors cette dernière induit une distance d définie par la longueur des incréments, $|h_n|_d = |x_{n-1}^{-1} x_n| = d(x_{n-1}, x_n)$.

Cette distance est invariante à gauche par G car pour tout $g \in G$:

$$d(gx, gy) = |(gx)^{-1} gy| = |x^{-1} g^{-1} gy| = |x^{-1} y| = d(x, y)$$

De plus si on considère la jauge de mots \mathcal{G} associée à cette distance, alors elle sera bien tempérée (puisque \mathcal{G} est fini car G est un groupe hyperbolique finiment engendré).

Ensuite comme \overline{G} vérifie les conditions (1) et (2), alors pour tous $b_- \neq b_+ \in \partial G$, on sait que $S(b_-, b_+) \neq \emptyset$, d'où $P(b_-, b_+) \neq \emptyset$.

De plus quelles que soient deux géodésiques de $P(b_-, b_+)$ comme elles sont dans un groupe hyperbolique, alors elles sont à une distance uniformément bornée l'une de l'autre d'où la condition (3) (en effet car $\forall a, b, c \in \partial G$ formant un triangle de géodésiques, on sait que $\forall v \in [a, b]$, $d(v, [a, c] \cup [c, b]) \leq \delta$).

Théorème 2.7.7 *Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe hyperbolique G telle que le sous-groupe $gr(\mu)$ engendré par son support soit non-élémentaire.*

Alors presque tous les chemins simples $\{x_n\}$ convergent vers un point (aléatoire) $x_\infty \in \partial G$, ie ∂G muni de la mesure limite résultante λ est une μ -frontière et la mesure λ est l'unique mesure de probabilité μ -stationnaire sur ∂G .

DÉMONSTRATION

La démonstration découle du théorème (2.2.1) et de la proposition (2.7.6).

Théorème 2.7.8 *Sous les conditions du théorème (2.7.7), si la mesure μ a une entropie $H(\mu)$ finie et son premier moment logarithmique fini (cas particulier : μ a son premier moment fini), alors $(\partial G, \lambda)$ est isomorphe à la frontière de Poisson de (G, μ) .*

DÉMONSTRATION

La démonstration découle du théorème (2.6.5) et de la proposition (2.7.6).

Remarque : Les méthodes que nous venons de voir peuvent s'appliquer dans d'autres situations comme par exemple : pour les sous-groupes discrets des groupes semi-simples de Lie (dans le cas où les bandes A_{γ_-, γ_+} sont plates dans l'espace symétrique correspondant), pour des produits libres, pour des groupes résolubles (en particulier polycycliques), etc.

Bilan

Grâce à l'étude que nous avons menée dans ce chapitre, nous avons été en mesure de montrer que la frontière de Poisson de marches aléatoires sur les groupes hyperboliques s'identifie à la frontière hyperbolique, qui elle n'est pas triviale. Ainsi, nous avons pu exemplifier le fait que la frontière de marches aléatoires sur les groupes n'est pas toujours triviale, même s'il existe une multitude de façons de montrer qu'elle l'est.

Conclusion

Grâce à l'étude que nous avons menée, nous avons pu exemplifier l'existence de groupes pour lesquels les marches aléatoires sur ceux-ci admettent une frontière non triviale. De plus, cette étude s'applique à d'autres types de groupes que nous n'avons pas étudié ici mais dont on peut trouver le détail par exemple dans [Fur71] ou encore [Kai00].

Conclusion

Ce travail réalisé au sein du Mathematical Institute d'Oxford m'a permis de découvrir un domaine de recherche actif de nos jours en algèbre et en aléatoire. En effet mon stage ayant consisté en la découverte de la théorie des marches aléatoires sur les groupes discrets, qui s'avère être intéressante dans le sens où elle permet d'effectuer une classification des groupes selon la trivialité ou non de la frontière d'une marche aléatoire ayant certaines propriétés sur ces groupes. Pour finir, je remercie le Mathematical Institute d'avoir bien voulu m'accueillir et plus particulièrement les étudiants du laboratoire pour leur accueil et leur aide, ainsi que Cornelia Drutu qui m'a permis d'effectuer ce stage et m'a suivi pendant toute la durée de celui-ci.

Bibliographie

- [BdlHV08] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's property (T)*. Cambridge University Press, 2008.
- [BL94] Werner Ballmann and François Ledrappier. The poisson boundary for rank one manifolds and their cocompact lattices. *Forum Mathematicum*, 6, 1994.
- [CD60] Gustave Choquet and Jacques Deny. Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 250A, 1960.
- [Fur71] Harry Furstenberg. Random walks and discrete subgroups of lie groups. *Advances in probability and Related Topics*, 1, 1971.
- [GdlH90] Etienne Ghys and Pierre de la Harpe. *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhail Gromov*. Birkhäuser, 1990.
- [Gro87] Mikhail Gromov. *Hyperbolic Groups*. Springer-Verlag, 1987.
- [Kai83] Vadim A. Kaimanovich. The differential entropy of the boundary of a random walk on a group. *Russian Mathematical Surveys*, 38 :5, 1983.
- [Kai94] Vadim A. Kaimanovich. The poisson boundary of hyperbolic groups. *C.R. Académie des Sciences de Paris*, 318, 1994.
- [Kai00] Vadim A. Kaimanovich. The poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Annals of Mathematics*, 152, 2000.
- [KV83] Vadim A. Kaimanovich and Anatoly Moiseevich Vershik. Random walks on discrete groups : Boundary and entropy. *The Annals of Probability*, 11, 1983.
- [Par67] Kalyanapuram Rangachari Parthasarathy. *Probability Measures on Metric Spaces*. Academic Press, 1967.
- [Roh67] Vladimir Abramovich Rohlin. Lectures on the entropy theory of measure preserving transformations. *Russian Mathematical Surveys*, 22, 1967.
- [Ste98] John Michael Steele. Kingman's subadditive ergodic theorem. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1998.