Grandes déviations – Théorème de Cramèr

Ophélie Rouby, Kévin Quirin, Arnaud Girand

1 Introduction

Les lois des grands nombres permettent d'étudier les limites de suites de variables aléatoires au niveau de leur espérance commune. Le théorème central limite affine un peu la loi des grands nombres en étudiant ces suites pour des valeurs s'écartant de l'espérance d'au plus la variance. La théorie des grands déviations va chercher à étudier le comportement de ces suites au delà de ces valeurs.

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et, si $n \geq 1$, posons $\mu^n = \underbrace{\mu \otimes \ldots \otimes \mu}_{\text{n fois}}$. On note μ_n la loi de la variable aléatoire $\overline{X}_n : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ pour la probabilité μ^n. Notons que si l'identité est μ–intégrable, alors d'après la loi faible des grands nombres $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers $p = \mathbb{E}(id_{\mathbb{R}}) = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$, donc μ_n converge faiblement vers δ_p.

2 Fonction génératrice du moment logarithmique

2.1 Définition, exemples

Définition 2.1 (Semi–continuité inférieure)
Soit (X, τ) un espace topologique.
Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.
f est dite semi–continue inférieure si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{f > \alpha\} \in \tau$.

☞ Dans le cadre métrique, cette définition est équivalente à la suivante : pour tout $x \in X$ et pour toute suite $(x_n)_n$ de X convergeant vers x, $\liminf_n f(x_n) \geq f(x)$.

Définition 2.2 (Fonction génératrice du moment logarithmique)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\Lambda_\mu(\lambda) = \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu(q)\right)$$

Exemples :

1. Si $\mu = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Lambda_\mu(\lambda) &= \ln\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\lambda x - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx\right) \\
&= \ln\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\left((x-m) - \lambda\sigma^2\right)^2}{2\sigma^2} + \lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right) dx\right) \\
&= \ln\left(\exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right)\right) \\
&= \lambda\left(m + \frac{\lambda\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

2. Si $\mu = \mathcal{B}(n, p)$, $\quad p \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Lambda_\mu(\lambda) &= \ln\left(\sum_{k=0}^n e^{\lambda k} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\right) \\
&= n \ln(1 - p + pe^\lambda)
\end{aligned}$$

3. Si $\mu = \mathcal{E}(1)$:

$$\begin{aligned}
\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \Lambda_\mu(\lambda) &= \ln\left(\int_0^\infty e^{(\lambda-1)x}dx\right)\\
&= \ln\left(\left[\frac{e^{(\lambda-1)x}}{\lambda-1}\right]_0^\infty\right)\\
&= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{(\lambda-1)x}}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda-1}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\Lambda_\mu(\lambda) = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \geq 1 \\ -\ln(1-\lambda) & \text{si } \lambda < 1 \end{cases}$

Proposition 2.1
Λ_μ est une fonction semi–continue inférieure convexe.

PREUVE :
- Pour la semi–continuité, on montre que $\{\Lambda_\mu \leq \alpha\}$ est séquentiellement fermé à l'aide du théorème de convergence dominée et de la continuité du logarithme.
- Soit $\lambda \in [0,1]$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu(\lambda a + (1-\lambda)b) &= \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda a q} e^{(1-\lambda)bq} d\mu(q)\right)\\
&= \ln\left(\left(\int_{\mathbb{R}} e^{aq}d\mu(q)\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} e^{bq}d\mu(q)\right)^{1-\lambda}\right) \text{ par inégalité de Hölder } (p = \frac{1}{\lambda})\\
&= \lambda \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{aq}d\mu(q)\right) + (1-\lambda)\ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{bq}d\mu(q)\right)
\end{aligned}$$

D'où la convexité.

2.2 Transformée de Legendre de Λ_μ, quelques lemmes

Considérons à présent la transformée de Legendre Λ_μ^* de Λ_μ, i.e

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Lambda_\mu^*(x) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} (\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda))$$

☞ Λ_μ^* est semi–continue inférieure convexe.

Exemples :

1. Si $\mu = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$:
   Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $f : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda x - \Lambda_\mu(\lambda) = \lambda\left(x - m - \frac{\lambda\sigma^2}{2}\right)$. Une brève étude de f nous apprend qu'elle atteint son maximum en son unique point critique $\frac{x-m}{\sigma^2}$ et donc que $\Lambda_\mu^*(x) = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$.
2. Si $\mu = \mathcal{B}(n,p), \quad p \in (0,1)$:

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup\{\lambda x - n\ln(1 - p + pe^\lambda)\}$$

   Soit $\phi(\lambda) = \lambda x - n\ln(1 - p + pe^\lambda)$
   Alors

$$\phi'(\lambda) = \frac{x - px + pxe^\lambda - npe^\lambda}{1 - p + pe^\lambda}$$

   Plusieurs cas se présentent :

- $x > 0$ et $x < n$
  Alors $\phi'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \ln\left(\frac{x-px}{p(n-x)}\right)$
  ϕ étant croissante puis décroissante au voisinage de ce point, elle y atteint bien son maximum.
  Donc
$$\Lambda_\mu^*(x) = \ln\left(\frac{x-px}{p(n-x)}\right) - n\ln\left(1-p+\frac{x-px}{n-x}\right)$$
- $x > 0$ et $x > n$
  Alors ϕ' ne s'annule pas, et $\phi' > 0$, donc
$$\Lambda_\mu^*(x) = +\infty$$
- $x > 0$ et $x = n$
  Alors ϕ' ne s'annule pas, et $\phi' > 0$ donc
$$\Lambda_\mu^*(x) = -n\ln(p)$$
- $x \leq 0$
  Alors ϕ' ne s'annule pas, et $\phi' < 0$ donc
$$\Lambda_\mu^*(x) = +\infty$$

Finalement,
$$\Lambda_\mu^*(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \leq 0 \\ \ln\left(\frac{x-px}{p(n-x)}\right) - n\ln\left(1-p+\frac{x-px}{n-x}\right) & \text{si } x \in (0,n) \\ -n\ln(p) & \text{si } x = n \\ +\infty & \text{si } x > n \end{cases}$$

3. Si $\mu = \mathcal{E}(1)$:
   De la même façon que précedemment, si on pose, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f : \lambda \mapsto \lambda x + \ln(1-\lambda)$ on remarque que si $x \leq 0$ alors $\sup f = \infty$ et que sinon f atteint son maximum en son seul point critique $\dfrac{1}{x} + 1$ d'où $\Lambda_\mu^*(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x - \ln(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Remarque : Soit $p \in \mathbb{R}$. On pose $\mu_p = \delta_p * \mu$. Alors $\Lambda_{\mu_p}^* = \Lambda_\mu^*(.-p)$.
Preuve : Commençons par remarquer que si $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu_p}(\lambda) &= \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu_p(q)\right) \\
&= \ln\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q_1} e^{\lambda q_2} d\mu(q_1) d\delta_p(q_2)\right) \\
&= \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q_1}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q_2} d\delta_p(q_2)\right) d\mu(q_1)\right) \qquad \text{par théorème de Fubini} \\
&= \ln\left(e^{\lambda p}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q_1} d\mu(q_1)\right) \\
&= \lambda_p + \Lambda_\mu(\lambda)
\end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu^*(x-p) &= \sup\{\lambda(x-p) - \Lambda_\mu(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \sup\{\lambda x - \Lambda_{\mu_p}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Lemme 2.1
Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Alors :
(i) $\Lambda_\mu^* \geq 0$
(ii) Si $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < \infty$ et si on pose $p = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$ alors :

– $\Lambda_\mu^*(p) = 0$
– *Λ_μ^* est croissante sur $[p, \infty)$ et décroissante sur $(-\infty, p]$*
– *$\forall q \geq p$, $\Lambda_\mu^*(q) = \sup\{\lambda q - \Lambda_\mu(\lambda) \mid \lambda \geq 0\}$ et $\mu([q,\infty)) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(q))$*
– *$\forall q \leq p$, $\Lambda_\mu^*(q) = \sup\{\lambda q - \Lambda_\mu(\lambda) \mid \lambda \leq 0\}$ et $\mu((-\infty, q]) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(q))$*

(iii) Si $\Lambda_\mu < \infty$ au voisinage de 0 alors $\Lambda_\mu^*(x) \longrightarrow \infty$ quand $|x| \to \infty$.

(iv) Si $\Lambda_\mu < \infty$ sur $\mathbb{R}$ alors $\Lambda_\mu \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\dfrac{\Lambda_\mu^*(x)}{|x|} \longrightarrow \infty$ quand $|x| \to \infty$.

Preuve :

(i) Comme $\lambda x - \Lambda_\mu(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\Lambda_\mu^* \geq 0$.

(ii) Supposons que $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < \infty$. Par inégalité de Jensen, on obtient que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Lambda_\mu(\lambda) = \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu(q)\right) \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \ln(e^{\lambda q}) d\mu(q)\right) = \lambda\left(\int_{\mathbb{R}} q d\mu(q)\right)$$

D'où :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Lambda_\mu(\lambda) \geq \lambda p \tag{1}$$

En particulier, ceci montre que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda p - \Lambda_\mu(\lambda) \leq 0$ et donc que $\Lambda_\mu^*(p) \leq 0$. Or, Λ_μ^* étant positive et convexe, ceci prouve donc que $\Lambda_\mu^*(p) = 0$ et que Λ_μ^* est croissante sur $[p, \infty)$ et décroissante sur $(-\infty, p]$.

Pour terminer la preuve du (ii), remarquons que, par 1, si $q \geq p$, $\Lambda_\mu^*(q) = \sup\{\lambda q - \Lambda_\mu(\lambda) \mid \lambda \geq 0\}$ et si $q \leq p$, $\Lambda_\mu^*(q) = \sup\{\lambda q - \Lambda_\mu(\lambda) \mid \lambda \leq 0\}$. Si $q \geq p$, on définit la variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}_X = \mu$. Alors,si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu(q) = e^{\Lambda_\mu(\lambda)}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mu([q,\infty)) &= \mu(X \geq q) \\
&= \mu(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda q})\ \forall \lambda > 0 \\
&\leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda q}} \quad \text{par inégalité de Markov} \\
&= e^{-\lambda q + \Lambda_\mu(\lambda)}
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $\Lambda_\mu^*(q) = \sup\{\lambda q - \Lambda_\mu(\lambda) \mid \lambda \geq 0\}$, on a que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda_\varepsilon > 0$ tel que $\Lambda_\mu^*(q) - \varepsilon \leq \lambda_\varepsilon q \Lambda_\mu(\lambda_\varepsilon)$. En appliquant le résultat précédent à $\lambda = \lambda_\varepsilon$ on obtient en faisant tendre ε vers 0 que $\mu([q,\infty)) \leq \exp(-\Lambda_\mu^*(q))$. On procède de même pour $q \leq p$.

(iii) et (iv) Notons tout d'abord que si $\lambda > 0$ (resp. $\lambda < 0$) alors $\limsup_\infty \dfrac{\Lambda_\mu^*(x)}{x} \geq \lambda$ (resp. $\liminf_\infty \dfrac{\Lambda_\mu^*(x)}{x} \leq -\lambda$).
Supposons ensuite que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Lambda_\mu(\lambda) < \infty$. Soit $\delta > 0$. On pose :

$$\begin{aligned}
f : (-\delta, \delta) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\lambda &\mapsto \Lambda_\mu(\lambda)
\end{aligned}$$

Alors, comme sur $(-\delta, \delta)$,

$$\forall q \in \mathbb{R},\ \exp(\lambda q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda q)^n}{n!} \quad \text{avec convergence uniforme,}$$

on a, par convergence dominée que :

$$\forall \lambda \in (-\delta, \delta),\ \Lambda_\mu(\lambda) = \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} q^n d\mu(q)\right)$$

Or, par hypothèse, le membre de droite de cette inégalité est fini et donc $\int_{\mathbb{R}} q^n d\mu(q) < \infty$ donc, par développement en série entière du logarithme, Λ_μ est développable en série entière sur $(-\delta, \delta)$. Ainsi, Λ_μ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Lemme 2.2
Si $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < \infty$*, alors pour tout fermé* $F \subset \mathbb{R}$*,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(F)) \leq -\inf_F \Lambda_\mu^*$$

Preuve : Soit $p = \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x)$.
On remarque tout d'abord que $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 + \cdots + x_n| \frac{1}{n} d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_n) \leq \int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < \infty$ et que pour tout $n \geq 1$, $p = \int_{\mathbb{R}} x d\mu_n(x)$.

Posons $\Lambda_n(\lambda) = \Lambda_{\mu_n}(\lambda)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu_n(q)\right) &= \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\lambda \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{n}\right) d\mu(q_1)\ldots d\mu(q_n)\right) \\
&= \ln\left(\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda \frac{q}{n}} d\mu(q)\right)^n\right) \quad \text{par théorème de Fubini} \\
&= n \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda \frac{q}{n}} d\mu(q)\right) \\
&= n\Lambda_\mu\left(\frac{\lambda}{n}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\Lambda_n(\lambda) = n\Lambda_\mu(\frac{\lambda}{n})$.
Dans ce cas, on a aussi :

$$\begin{aligned}
\Lambda_n^* &= \sup(\lambda x - \Lambda_n(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}) \\
&= \sup(\lambda x - n\Lambda_\mu(\frac{\lambda}{n}), \lambda \in \mathbb{R}) \\
&= \sup(n(\frac{\lambda x}{n} - \Lambda_\mu(\frac{\lambda}{n})), \lambda \in \mathbb{R}) \\
&= n \sup(\frac{\lambda x}{n} - \Lambda_\mu(\frac{\lambda}{n}), \lambda \in \mathbb{R}) \\
&= n\Lambda_\mu^* \\
&= \Lambda_{\mu_n}^*
\end{aligned}$$

Donc $\Lambda_n^* = n\Lambda_\mu^*$.
Supposons maintenant que q $\geq$ p.
Alors si on applique le (ii) du lemme 2.1 à la mesure de probabilité μ_n, on a :

$$\mu_n([q, +\infty[) \leq \exp(-\Lambda_n^*(q)) = \exp(-n\Lambda_\mu^*(q))$$

Ainsi, comme Λ_μ^* est croissante sur $[p, +\infty[$ (resp. décroissante sur $]-\infty, p]$), alors si $F \subset [p, +\infty[$, on a :

$$\mu_n(F) \leq \mu_n([q, +\infty[) \leq \exp(-n\Lambda_\mu^*)$$

ie

$$\ln(\mu_n(F)) \leq -n\Lambda_\mu^*$$

Donc

$$\frac{1}{n} \ln(\mu_n(F)) \leq -\Lambda_\mu^*$$

D'où

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(F)) \leq -\inf_F \Lambda_\mu^*$$

Si q $\leq$ p, on obtient un résultat analogue.
Supposons maintenant, que $F \cap [p, +\infty[\neq \emptyset$ et que $F \cap]-\infty, p] \neq \emptyset$.

On pose : $q^+ = \inf(x \geq p, x \in F)$ et $q^- = \inf(x \leq p, x \in F)$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\mu_n(F) &\leq \mu_n\left([q^+,\infty)\right) + \mu_n\left((-\infty, q^-]\right) \quad \text{car } F = F \cap [p,\infty) \bigcup F \cap (-\infty, p] = [q^+,\infty) \cup (-\infty, q^-] \\
&\leq \exp(-n\Lambda_\mu^*(q^-)) + \exp(-n\Lambda_\mu^*(q^+)) \\
&\leq 2\exp(-n \inf_F \Lambda_\mu^*)
\end{aligned}$$

Ainsi, par croissance du logarithme

$$\frac{1}{n}\left(\ln\left(\mu_n(F)\right)\right) \leq \frac{1}{n}\left(\ln(2) - n \inf_F \Lambda_\mu^*\right)$$

Ici encore, on obtient le résultat voulu.
Donc, on a bien pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(F)) \leq -\inf_F \Lambda_\mu^*$$

3 Théorème de Cramèr

3.1 Énoncé du théorème

Théorème 3.1 (Cramèr)
Si $\Lambda_\mu(\lambda) < \infty$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout ensemble mesurable $\Gamma \subset \mathbb{R}$, on a :

$$-\inf_{\mathring{\Gamma}} \Lambda_\mu^* \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(\Gamma)) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(\Gamma)) \leq -\inf_{\overline{\Gamma}} \Lambda_\mu^*$$

3.2 Démonstration du théorème de Cramèr

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}$ un ensemble mesurable.
Alors, on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\mu_n(\Gamma)\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\mu_n(\Gamma)\right)$$

Comme $\Gamma \subset \mathbb{R}$, alors $\overline{\Gamma}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
De plus, on sait que :

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{\lambda q} d\mu(q) \leq \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu(q)$$

D'où $\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda|q|} d\mu(q) < \infty$.
Ainsi, par inégalité de Jensen, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda|q| d\mu(q) \leq \ln\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda|q|} d\mu(q)\right)$$

Donc, comme $\Lambda_\mu(\lambda) < \infty, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_{\mathbb{R}} |q| d\mu(q) < \infty$.
On peut alors appliquer le lemme précédent à $\overline{\Gamma}$ et sachant que $\mu_n(\Gamma) \leq \mu_n(\overline{\Gamma})$, alors :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(\Gamma) \leq -\inf_{\overline{\Gamma}} \Lambda_\mu^*$$

Il nous reste alors à montrer que :

$$-\inf_{\mathring{\Gamma}} \Lambda_\mu^* \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(\Gamma))$$

Pour ce faire, montrons le résultat suivant :
Si $q \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right)\right) \geq -\Lambda_\mu^*(q) \tag{2}$$

Supposons tout d'abord qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\Lambda_\mu^*(q) = \lambda q - \Lambda_\mu(\lambda)$.
On pose : $d\widehat{\mu}(x) = \dfrac{e^{\lambda x}}{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}} d\mu(x)$.
Comme $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu(x) < \infty$, alors $\int_{\mathbb{R}} |x| d\widehat{\mu}(x) < \infty$ et :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x d\widehat{\mu}(x) &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{e^{\lambda x}}{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}} d\mu(x) \\ &= \frac{1}{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}} \int_{\mathbb{R}} x e^{\lambda x} d\mu(x)\end{aligned}$$

Par théorème de dérivation sous le signe intégral, on a :

$$\frac{d}{dt}\Lambda_\mu(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} q e^{tq} d\mu(q)}{\int_{\mathbb{R}} e^{tq} d\mu(q)}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\Lambda_\mu(t)\right|_{t=\lambda} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} q e^{\lambda q} d\mu(q)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda q} d\mu(q)} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}} q e^{\lambda q} d\mu(q)}{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}}\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\Lambda_\mu(t)\right|_{t=\lambda} &= \frac{1}{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}} \int_{\mathbb{R}} x e^{\lambda x} d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x d\widehat{\mu}(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\left.\frac{d}{dt}\Lambda_\mu(t)\right|_{t=\lambda} = \int_{\mathbb{R}} x d\widehat{\mu}(x) \tag{3}$$

Soit $f : t \longmapsto tq - \Lambda_\mu(t)$. On a supposé que cette fonction atteignait son maximum en λ. Ainsi, on a :

$$\left.\frac{d}{dt}\left(tq - \Lambda_\mu(t)\right)\right|_{t=\lambda} = 0 \tag{4}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} x d\widehat{\mu}(x) &= \left.\frac{d}{dt}\Lambda_\mu(t)\right|_{t=\lambda} \quad \text{par (3)} \\ &= \left.\frac{d}{dt}(tq)\right|_{t=\lambda} \quad \text{par (4)} \\ &= q\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} x d\widehat{\mu}(x) = q$$

De plus, on sait que $\widehat{\mu_n}$ est la loi de $x \longmapsto \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ sous $\widehat{\mu}^n$, donc d'après la loi faible des grands nombres $\widehat{\mu_n} \Longrightarrow \delta_q$ (convergence faible), d'où :

$$\widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_q\left((q-\delta, q+\delta)\right) = 1$$

De plus,

$$\mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right) = \frac{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}}{e^{\lambda x}} \widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right)$$

Par décroissance de l'exponentielle pour $\lambda \geq 0$ et $x \in (q-\delta, q+\delta)$, on a :

$$\begin{aligned}\mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right) &\geq \frac{e^{\Lambda_\mu(\lambda)}}{e^{\lambda(q+\delta)}} \widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right) \\ &\geq e^{-(\lambda(q+\delta) - \Lambda_\mu(\lambda))} \widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right)\end{aligned}$$

D'où $\forall n \geq 1$, on a :

$$\mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right) \geq e^{-n(\lambda(q+\delta)-\Lambda_\mu(\lambda))}\widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right)$$

ie

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln \mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right) &\geq -(\lambda(q+\delta)-\Lambda_\mu(\lambda)) + \frac{1}{n}\ln \widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right)\\ &\geq -(\Lambda_\mu^*(q)+\lambda\delta) + \frac{1}{n}\ln \widehat{\mu_n}\left((q-\delta, q+\delta)\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln \mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right) \geq -\Lambda_\mu^*(q) - \lambda\delta \geq -\Lambda_\mu^*(q)$$

On a donc ainsi démontré la propriété (2) , dans le cas où $\lambda \geq 0$ et $\Lambda_\mu^*(q) = \lambda q - \Lambda_\mu(\lambda)$.
On procède de la même façon pour démontrer cette propriété dans le cas où $\lambda \leq 0$ et $\Lambda_\mu^*(q) = \lambda q - \Lambda_\mu(\lambda)$.

Montrons-la maintenant, dans le cas où $\Lambda_\mu^*(q) > \lambda q - \Lambda_\mu(\lambda)$.
Si $q \geq p$, alors d'après le lemme 2.1 , (ii), on sait que Λ_μ^* est une fonction croissante sur $[p, \infty)$.
Par conséquent, il va exister une suite $(\lambda_\ell)_\ell$ croissant vers $+\infty$ et telle que $(\lambda_\ell q - \Lambda_\mu(\lambda_\ell))_\ell$ croisse vers $\Lambda_\mu^*(q)$.
On peut remarquer, par théorème de convergence dominée, que :

$$\int_{-\infty}^{q} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_{q}^{+\infty} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) - \int_{-\infty}^{q} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x)\\ &= e^{\Lambda_\mu(\lambda_\ell)-\lambda_\ell q} - \int_{-\infty}^{q} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x)\\ &= e^{-(\lambda_\ell q-\Lambda_\mu(\lambda_\ell))} - \int_{-\infty}^{q} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{q}^{+\infty} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} e^{-\Lambda_\mu^*(q)}$$

Or ceci est possible seulement si $\mu((q,\infty)) = 0$. En effet, si on suppose $\mu((q,\infty)) > 0$ alors $\forall \ell \in \mathbb{N}$, si $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}\int_{q}^{+\infty} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) &= \int_{q}^{q+\varepsilon} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) + \int_{q+\varepsilon}^{\infty} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x)\\ &\geq \int_{q}^{q+\varepsilon} e^{\lambda_\ell(x-q)}d\mu(x) + e^{\varepsilon\lambda_\ell}\mu((q,\infty)) \xrightarrow[\ell\to\infty]{} \infty\end{aligned}$$

Ce qui est absurde. On a donc de plus que $\mu(\{q\}) = e^{-\Lambda_\mu^*(q)}$.
D'où $\mu^n(\{(q,q,...q)\}) = \mu(\{q\}) \times \mu(\{q\}) \times ...\mu(\{q\}) = e^{-n\Lambda_\mu^*(q)}$.
Ainsi $\mu_n(\{q\}) \geq e^{-n\Lambda_\mu^*(q)}$. On retrouve alors la propriété (2).
On procède de la même façon, si $q \leq p$.
Finalement, on a montré que :
Si $q \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\mu_n\left((q-\delta, q+\delta)\right)\right) \geq -\Lambda_\mu^*(q)$$

Ce qui signifie que pour tout ensemble ouvert, on a cette inégalité.
Or $\Gamma \subset \mathbb{R}$, donc $\mathring{\Gamma}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et comme $\mu_n(\mathring{\Gamma}) \leq \mu_n(\Gamma)$, alors :

$$-\inf_{\mathring{\Gamma}} \Lambda_\mu^* \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(\mu_n(\Gamma))$$

Ce qui termine la démonstration !

4 Conclusion

L'introduction de la probabilité $\tilde{\mu}$ a permis d'avoir une probabilité d'espérance q, et donc de transformer le comportement "déviant" en comportement "normal", *i.e.* on a pu lui appliquer la loi des grands nombres. Dans la théorie des grandes déviations, on utilise souvent ce type de démonstration pour encadrer une expression :

- on la minore à l'aide de ce facteur de Radon-Nikodym.
- on la majore à l'aide de l'inégalité de Markov.