Exercice 1

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.
2. Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
3. En déduire l'existence d'une base commune de réduction de E pour les endomorphismes u et v.

Exercice 2

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux.
Montrer l'existence d'une base commune de réduction de E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables.
Montrer que si A et B commutent alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable.

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$ est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ diagonalisables tels que $A + B$ soit diagonalisable.
   Montrer que A et B commutent.

Exercice 5

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Soit $n \geq 1$. Soit G un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in G$, $M^2 = I_n$.
   Montrer que G est abélien de cardinal inférieur ou égal à 2^n.
2. En déduire que pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_m(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Exercice 6

Soit $n \geq 1$. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'endomorphisme :

$$\begin{aligned} \Phi_{A,B} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \\ M &\longmapsto AM + MB. \end{aligned}$$

1. En supposant que A est diagonalisable et que $B = 0$, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
2. En supposant que A et B sont diagonalisables, établir que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
3. Démontrer la réciproque, ie si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, alors A et B le sont (on pourra utiliser la décomposition de Dunford de A et B).
4. Lorsque A et B sont diagonalisables, déterminer les éléments propres de $\Phi_{A,B}$ en fonction de ceux de A et de ${}^tB$.

Exercice 7

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.

Définition 0.1 *Soient $m, n \geq 1$. Soient :*

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \quad et \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k.$$

On définit le résultant de P et Q par le déterminant de taille $n+m$:

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} a_m & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots & b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_m & \vdots & & \ddots & b_n \\ \vdots & & & a_{m-1} & \vdots & & & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0 & & & \vdots & b_0 & & & \vdots \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

Définition 0.2 *Soit $p \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant a_n. On définit le discriminant de P par :*

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_n} R(P, P').$$

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Montrer que le discriminant du polynôme $P = -X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ est $-27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3$.
2. On pose dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   avec $s \neq 0, 1$. Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique de $M + \lambda N$ est un polynôme de degré 6 en λ dont le coefficient dominant est $(s(1-s))^2$.
3. On pose dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et on note $P_B = -X^3 + aX^2 + bX + c$.
   (a) Montrer que si $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad P_{B+\lambda Q} = -X^3 + (a+\lambda)X^2 + (b - (b_1 + b_5)\lambda)X + c.$$

   (b) Montrer alors que si de plus $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ est un polynôme de degré 4 en λ et déterminer son coefficient dominant.