Exercice 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $n \geq 2$.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.
   Montrer que les sous-espaces propres de A sont stables par B.
2. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. Soit $(p_1, \ldots, p_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ des entiers tels que $p_1 + \ldots + p_r = n$.
   Montrer que l'algèbre des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec la matrice diagonale par blocs :
   $$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_r I_{p_r} \end{pmatrix}$$
   est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de la forme :
   $$\begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_r \end{pmatrix}$$
   où $M_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ pour $i \in \{1, \ldots, r\}$
3. Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, on considère la matrice compagnon :
   $$C = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ (0) & & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
   Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
   (a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une liste $(b_0, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ telle que :
   $$Me_1 = \sum_{k=0}^{n-1} b_k C^k e_1.$$
   (b) En déduire que l'algèbre des matrices qui commutent avec C est $\mathbb{K}[C]$ (la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendrée par C).
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non scalaire. En utilisant la question précédente, montrer que l'algèbre des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ qui commutent avec A est $\mathbb{K}[A]$. Préciser sa dimension.

Exercice 2

Soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \neq j$, soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note :

$$T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j},$$

où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.
On rappelle les définitions suivantes :

Définition 0.1 (Transvection) *On appelle transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout élément $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $rang(M - I_n) = 1$ et dont le polynôme caractéristique vaut $(X - 1)^n$.*

Définition 0.2 (Centralisateur) *Soit G un groupe multiplicatif, soit A une partie de G. Le centralisateur de A dans G, noté $\mathcal{Z}_G(A)$, est le sous-groupe de G constitué des éléments x de G vérifiant :*

$$\forall a \in A, \quad xa = ax.$$

Définition 0.3 (Centre) *Le centre d'un groupe G est le centralisateur de G dans G.*

Définition 0.4 (Groupe dérivé) *Le groupe dérivé d'un groupe G, noté $D(G)$, est le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $\{xyx^{-1}y^{-1}, (x,y) \in G^2\}$.*
On admet que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Théorème 0.1 (Admis) *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit G un sous-groupe distingué de $SL_n(\mathbb{K})$ contenant une matrice non scalaire. Si $n \geq 3$ ou si $\mathbb{K}$ possède au moins 5 éléments, alors $G = SL_n(\mathbb{K})$.*

1. (a) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :
   i. M est une transvection ;
   ii. il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que M soit semblable à $T_{1,2}(\lambda)$;
   iii. M est semblable à $T_{1,2}(1)$.

   (b) Montrer que toute transvection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ appartient à $SL_n(\mathbb{K})$.
2. Quels sont les éléments d'ordre 2 du groupe $SL_2(\mathbb{K})$?
3. Montrer que le centralisateur de $SL_n(\mathbb{K})$ dans $GL_n(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}^* I_n$. En déduire le centre de $SL_n(\mathbb{K})$.
4. (a) Montrer que $D(SL_n(\mathbb{K}))$ contient une matrice non scalaire.

   (b) On suppose que $n \geq 3$ ou que $\mathbb{K}$ contient au moins 5 éléments. Déterminer $D(SL_n(\mathbb{K}))$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal q.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension d.
   Montrer que E est fini et déterminer son cardinal.
2. (a) Montrer que :
   $$|GL_n(\mathbb{K})| = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k).$$
   (indication : on pourra dénombrer les bases de $\mathbb{K}^n$).

   (b) Dénombrer $SL_n(\mathbb{K})$.

   (c) Soit $\mathbb{L}$ un corps tel que les groupes $SL_n(\mathbb{K})$ et $SL_n(\mathbb{L})$ sont isomorphes.
   Montrer que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont isomorphes.