Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

Définition 0.1 *On appelle forme sesquilinéaire sur E une forme bi-additive de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall (x,y) \in E \times E, \quad b(\lambda x, y) = \lambda b(x,y) \quad \text{et} \quad b(x, \lambda y) = \overline{\lambda} b(x,y).$$

Définition 0.2 *Une forme sesquilinéaire est dite symétrique si elle vérifie :*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad b(x,y) = \overline{b(y,x)}.$$

Définition 0.3 *Une forme sesquilinéaire symétrique est dite définie positive (respectivement définie négative) sur un sous-espace vectoriel F de E, si pour tout $x \in F$ et $x \neq 0$, on a :*

$$b(x,x) > 0 \quad (\text{respectivement } b(x,x) < 0).$$

Définition 0.4 *On appelle espace sesquilinéaire un couple (E, b) où b est une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{C}$.*
Un espace sesquilinéaire (E, b) est dit symétrique si la forme b est symétrique.

Définition 0.5 *Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit F est un sous-espace vectoriel de E. On définit l'orthogonal de F, noté $F^\perp$, par :*

$$F^\perp = \{x \in E; \quad b(x,y) = 0, \quad \forall y \in F\}.$$

Définition 0.6 *Une base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ d'un espace sesquilinéaire symétrique (E, b) est dite orthogonale si $b(e_i, e_j)$ est nul pour tous $i \neq j$.*
On dit qu'elle est semi-orthonormée si elle est orthogonale et si de plus pour tout i, $b(e_i, e_i)$ vaut 0, 1 ou -1.

Exercice 1

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. On suppose que b est non nulle.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$, tel que $b(x,x) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe un vecteur $y \in E$ tel que $b(y,y)$ soit égal à 1 ou -1.

Exercice 2

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique.
Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée de (E, b).

Exercice 3

On suppose que $E = \mathbb{C}^2$ et que la forme b est définie par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Construire une base semi-orthonormé de (E, b).

Exercice 4

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base semi-orthonormée de (E, b). Soit E_+ (respectivement E_-, E_0) le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs e_i tels que $b(e_i, e_i) = 1$ (respectivement $b(e_i, e_i) = -1$, $b(e_i, e_i) = 0$). Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. (a) Montrer que $F \cap (E_- \oplus E_0)$ est nul si b est définie positive sur F.
   (b) Montrer que $F \cap (E_+ \oplus E_0)$ est nul si b est définie négative sur F.
2. En déduire que le nombre $\sum_i b(e_i, e_i)$ est indépendant de $\mathcal{B}$. On le note dans la suite $\sigma(E, b)$.

Exercice 5

Soit $n > 0$. Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :

$$b(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j = n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer le nombre $\sigma(E, b)$.

Exercice 6

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit x un vecteur non nul de E.

1. On suppose que $x \in E^\perp$. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ telle que $x = e_1$.
2. On suppose que $b(x, x)$ est non nul. Montrer qu'il existe une base semi-orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et un réel $\lambda > 0$ tels que $x = \lambda e_1$.

Exercice 7

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit $F = \mathbb{C}x$ le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur non nul $x \in E$. Soit $G = F^\perp$ son orthogonal.
Déterminer l'espace G selon les cas de l'exercice 6 et montrer que dans tous les cas, on a :

$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(G).$$

Exercice 8

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire symétrique. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $G = F^\perp$. Soit $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ une base semi-orthonormée de (F, b). Pour tout $i \leq p$, on note F_i le sous-espace vectoriel engendré par $\{u_1, \ldots u_i\}$ et $G_i = F_i^\perp$.
Déterminer (en fonction de $\sigma(E)$) les nombres $\sigma(F_i) + \sigma(G_i)$. En déduire la formule :

$$\sigma(E) = \sigma(F) + \sigma(F^\perp).$$

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Définition 0.7 *On appelle orthogonal à droite (respectivement à gauche) de F l'ensemble $F^\perp$ (respectivement $^\perp F$) des vecteurs $x \in E$ vérifiant :*

$$\forall y \in F, \quad b(y, x) = 0 \quad \textit{(respectivement } b(x, y) = 0\textit{)}.$$

Définition 0.8 *On dit que la forme b est non-dégénérée si les espaces $E^\perp$ et $^\perp E$ sont nuls.*

Exercice 9

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Soit M la matrice de b dans cette base.

1. Soient $x, y \in E$ et X, Y les matrices colonnes ayant comme coefficients les coordonnées de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer la formule :

$$b(x, y) = {}^tXM\overline{Y}.$$

2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) b est non-dégénérée ;
   (b) M est inversible ;
   (c) $E^\perp = \{0\}$;
   (d) $^\perp E = \{0\}$.

Exercice 10

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $F^\perp$ et ${}^\perp F$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. (a) Montrer les inégalités :

$$\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E \quad \text{et} \quad \dim F + \dim {}^\perp F \geq \dim E.$$

   (b) Montrer que ces inégalités sont des égalités si b est non-dégénérée sur E.
3. On suppose que b est non-dégénérée sur F. Montrer les égalités :

$$E = F \oplus F^\perp \quad \text{et} \quad F \oplus {}^\perp F = E.$$

Exercice 11

Soit $E = \mathbb{C}^2$ muni de sa base canonique (e_1, e_2). Soit b la forme sesquilinéaire sur E vérifiant :

$$\forall i \in \{1, 2\}, \quad b(e_i, e_1) = 0 \quad \text{et} \quad b(e_i, e_2) = 1.$$

Déterminer un sous-espace vectoriel F de E tel que $F^\perp$ et ${}^\perp F$ n'aient pas la même dimension.

Exercice 12

Soit (E, b) un espace sesquilinéaire. Montrer qu'il existe un endomorphisme bijectif f de E tel que la forme $(x, y) \longmapsto b(f(x), y)$ soit une forme sesquilinéaire symétrique.