Définition 0.1 *Soit $n \geq 2$. L'algèbre des polynômes en n indéterminées à coefficients dans $\mathbb{R}$, notée $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, est l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ qui s'écrivent de manière unique sous la forme :*

$$P = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n},$$

avec a_α des réels nuls sauf pour un nombre fini d'entre eux.

Définition 0.2 *Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On considère le monôme $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$. On appelle degré de ce monôme la quantité :*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Définition 0.3 *Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ non nul est dit homogène de degré d, si il est combinaison linéaire non nulle de monômes de degré d. On note alors $\deg(P)$ son degré.*

On considère le polynôme homogène de degré n :

$$\Delta = \prod_{1\leq i<j\leq n} (X_j - X_i).$$

On rappelle qu'il existe une action à gauche, notée ρ, du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ donnée, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et pour $P = \sum_\alpha a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, par :

$$\rho(\sigma)(P) = \sum_\alpha a_\alpha X_{\sigma(1)}^{\alpha_1} \ldots X_{\sigma(n)}^{\alpha_n}.$$

`Notation:` Pour simplifier les notations, on note ${}^\sigma P := \rho(\sigma)(P)$.

Définition 0.4 *On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est antisymétrique si pour toute transposition $\theta \in \mathfrak{S}_n$, on a :*

$${}^\theta P = -P.$$

Exercice 1

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Soit $P = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$. On note, pour $1 \leq i < j \leq n$, $\theta_{i,j}$ la transposition (i, j).

1. Calculer :
$$\frac{P - {}^{\theta_{i,j}}P}{X_i - X_j}.$$
2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et pour toute transposition $\theta_{i,j}$ (avec $1 \leq i < j \leq n$), $P - {}^{\theta_{i,j}}P$ est divisible par $X_i - X_j$.

Exercice 2

1. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note $\epsilon(\sigma)$ sa signature. Montrer que tout polynôme antisymétrique vérifie :
$${}^\sigma P = \epsilon(\sigma)P.$$
2. Montrer que le polynôme Δ est antisymétrique.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme antisymétrique. Montrer qu'il est divisible par Δ dans l'anneau $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

`Notation:` Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on note $P(\partial)$ l'opérateur différentiel obtenu en remplaçant les X_i par les opérateurs différentiels $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$, ie si $P = \sum_\alpha a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$, on a :

$$P(\partial) = \sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial X_1^{\alpha_1} \ldots \partial X_n^{\alpha_n}} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Proposition 0.1 (Admise) *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. On note $P.Q$ leur produit. Alors, on a :*

$$(P.Q)(\partial) = P(\partial) \circ Q(\partial).$$

Définition 0.5 *Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, on définit une forme bilinéaire $\langle ., . \rangle$ sur $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ par :*

$$\langle P, Q \rangle = P(\partial)(Q)(0, \dots, 0).$$

Exercice 3

1. Soient P, Q deux polynômes homogènes non nuls tels que $\deg(P) \neq \deg(Q)$. Montrer que :
$$\langle P, Q \rangle = 0.$$
2. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que :
$$\langle P.Q, R \rangle = \langle Q, P(\partial)(R) \rangle.$$
3. Montrer que la forme bilinéaire $\langle ., . \rangle$ détermine un produit scalaire défini positif sur $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ *(on pourra travailler dans une base adaptée).*
4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que :
$$\langle {}^{\sigma}P, {}^{\sigma}Q \rangle = \langle P, Q \rangle.$$
5. Montrer que :
$$\langle \Delta, \Delta \rangle = 1!2! \dots n!.$$
(on pourra utiliser le développement du déterminant de Vandermonde
$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \ddots & \ddots & \vdots & \ddots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
dont on admettra l'expression factorisée).

`Notations:` Soit k un paramètre réel.

- $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$;
- R^+ désigne le sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$$R^+ = \{e_i - e_j ; 1 \leq i < j \leq n\}.$$
- pour $\beta = e_i - e_j \in R^+$ (avec $i < j$), on note abusivement $X_\beta = X_i - X_j$, $\theta_\beta = \theta_{i,j}$ la transposition (i, j) de $\mathfrak{S}_n$ et Δ_β l'application linéaire donnée, pour $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, par :
$$\Delta_\beta(Q) = \frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \frac{Q - {}^{\beta}Q}{X_\beta}.$$

Définition 0.6 *Soit $l \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq l \leq n$. L'opérateur de Dunkel d'indice l, noté $T_l(k)$, est défini, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ par :*

$$T_l(k)(Q) = \frac{\partial Q}{\partial X_l} + k \sum_{1 \leq i < j \leq n} (e_l, e_i - e_j) \frac{Q - {}^{\theta_{i,j}}Q}{X_i - X_j} = \frac{\partial Q}{\partial X_l} + k \sum_{\beta \in R^+} (e_l, \beta) \Delta_\beta(Q).$$

Exercice 4

1. Soit Q un polynôme homogène non nul. Montrer que pour tout entier l tel que $1 \leq l \leq n$, le polynôme $T_l(k)(Q)$ est nul ou homogène de degré $\deg(Q) - 1$.
2. Montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et pour tout entier l tel que $1 \leq l \leq n$, on a :
$${}^{\sigma}\left(T_l(k)(Q)\right) = T_{\sigma(l)}(k)({}^{\sigma}Q).$$

`Notations:`

- Pour tout entier l tel que $1 \leq l \leq n$, on note M_l l'opérateur de multiplication par X_l, autrement dit, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on a :

$$M_l(Q) = X_l.Q.$$

- On note $D(k)$ l'opérateur défini par :

$$D(k) = \sum_{l=1}^{n} T_l(k)^2.$$

Exercice 5

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Soit $\beta \in R^+$. Montrer que :

$$\Delta_\beta(P.Q) = P.\Delta_\beta(Q) + \Delta_\beta(P).\left({}^{\theta_\beta}Q\right).$$

2. En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i < j \leq n$, on a, entre opérateurs de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, l'égalité :

$$[T_j(k), M_i] = (e_i, e_j)Id + k \sum_{\beta \in R^+} (\beta, e_i)(\beta, e_j)\rho(\theta_\beta).$$

3. Soit l un entier tel que $1 \leq l \leq n$. Déduire des questions précédentes que, entre opérateurs de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, on a l'égalité :

$$[D(k), M_l] = 2T_l(k)$$

(on pourra utiliser la formule sur le commutateur donnée au début).