Exercice 1 (*Extrait du sujet 2014*)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que : $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

Exercice 2 (*Extrait du sujet 2011*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. Pour quels $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
2. Trouver deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non semblables sur $\mathbb{K}$ et ayant le même polynôme caractéristique.
3. Soient $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables sur $\mathbb{K}$ ayant le même polynôme caractéristique. Montrer que M et M' sont semblables sur K.

Exercice 3 (*Extrait du sujet 2011*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soient $r, s \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, soit $A' \in \mathcal{M}_s(\mathbb{K})$. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si A et A' sont diagonalisables sur $\mathbb{K}$.

Exercice 4 (*Extrait du sujet 2009*)

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $u \circ v = v \circ u$.
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u.
   (b) Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
   (c) En déduire l'existence d'une base commune de réduction de E pour les endomorphismes u et v.
2. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux. Montrer l'existence d'une base commune de réduction de E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Exercice 5 (*Extrait du sujet 2009*)

Soit p un nombre premier. Soit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p)$ est diagonalisable si et seulement si $A^p = A$.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_2)$ diagonalisables. Montrer que A et B commutent si et seulement si $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_2$.

Exercice 6 (*Extrait du sujet 2009*)

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Soit $n \geq 1$. Soit G un sous-groupe multiplicatif de $GL_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in G$, $M^2 = I_n$.
   Montrer que G est abélien de cardinal inférieur ou égal à 2^n.
2. En déduire que pour tout $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, les groupes multiplicatifs $GL_n(\mathbb{K})$ et $GL_m(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

Exercice 7 (*Extrait du sujet 2014*)

Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps et admettant une décomposition par blocs de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & F \end{array}\right) \quad \text{ou} \quad A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline D & F \end{array}\right),$$

où B et F sont des matrices carrées. Montrer la formule suivante : $\det A = (\det B)(\det C)$.