Exercice 1 (*Extrait des sujets 2008 - 2011*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $P = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On note $M_P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice compagnon, *i.e.* :

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $C_M(X) = \det(XI_n - M)$ le polynôme caractéristique (unitaire) de M.

1. Montrer que $C_{M_P} = P$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que le rang de $M_P - \lambda I_n$ est supérieur ou égal à $n-1$.
3. Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes :
   (a) le polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples ;
   (b) toutes les matrices de $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(P) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}); C_M = P\}$ sont diagonalisables sur $\mathbb{K}$;
   (c) M_P est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

Exercice 2 (*Extrait du sujet 2008*)

Soit $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre fini m.

1. Montrer que si z est une racine complexe du polynôme caractéristique $C_M(X) = \det(XI_n - M)$, alors z est racine du polynôme $X^m - 1$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on note $\Phi_m(X)$ le polynôme cyclotomique d'ordre m, *i.e.* :

$$\Phi_m(X) = \prod_{\{k \in \{1,\dots,m\}; k \wedge m = 1\}} (X - e^{2i\pi k/m}).$$

On rappelle que $\Phi_m(X)$ est un polynôme unitaire à coefficients entiers, irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Le degré de $\Phi_m(X)$ est $\phi(m)$ où ϕ est la fonction indicatrice d'Euler. On rappelle également que :

$$X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(X).$$

2. Montrer, en résolvant avec soin l'équation $\phi(k) = 1$, qu'il y a exactement deux polynômes cyclotomiques de degré un.
3. Montrer de même qu'il y a exactement trois polynômes cyclotomiques de degré deux dont on donnera les expressions développées.
4. En déduire que le polynôme $C_M(X)$ appartient à l'ensemble :
$$\{X^2 + X + 1, X^2 + 1, X^2 - X + 1, X^2 - 1, (X-1)^2, (X+1)^2\}.$$
5. En déduire que $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
6. Donner un élément de $GL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 6.

Exercice 3 (*Extrait du sujet 2011*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. Montrer que a est une racine simple de P si et seulement si $P'(a) \neq 0$.
2. Soit P un élément irréductible de $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.
3. Soient P et Q dans $\mathbb{Q}[X]$ unitaires, tels que $P \in \mathbb{Z}[X]$ et que Q divise P dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $Q \in \mathbb{Z}[X]$ (*indication :* on pourra utiliser le lemme de Gauss : Si $U \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, soit $c(U)$ le pgcd des coefficients de U. Alors, pour tout couple (U, V) d'éléments de $\mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, on a $c(UV) = c(U)c(V)$).

Exercice 4 (*Extrait du sujet 2009*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Soient $m, n \geq 1$. Soient :

$$P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k.$$

On définit le résultant de P et Q par le déterminant de taille $n+m$:

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} a_m & 0 & \dots & 0 & b_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{m-1} & \ddots & \ddots & \vdots & b_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_m & \vdots & & \ddots & b_n \\ \vdots & & & a_{m-1} & \vdots & & & b_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0 & & & \vdots & b_0 & & & \vdots \\ 0 & a_0 & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \end{vmatrix}$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant a_n. On définit le discriminant de P par :

$$\Delta(P) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a_n} R(P, P').$$

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Montrer que le discriminant du polynôme $P = -X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ est $-27\gamma^2 - 18\alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3$.
2. On pose dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   avec $s \neq 0, 1$. Montrer que le discriminant du polynôme caractéristique $\chi_{M+\lambda N} = \det(M + \lambda N - XI_3)$ de $M + \lambda N$ est un polynôme de degré 6 en λ dont le coefficient dominant est $(s(1-s))^2$.
3. On pose dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et on note $\chi_P = \det(P - XI_3) = -X^3 + aX^2 + bX + c$.
   (a) Montrer que si $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix} = 0$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_{B+\lambda Q} = -X^3 + (a+\lambda)X^2 + (b - (b_1 + b_5)\lambda)X + c.$$

   (b) Montrer alors que si de plus $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ est un polynôme de degré 4 en λ et déterminer son coefficient dominant.

Exercice 5 (*Extrait du sujet 2012*)

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On fixe $m = (m_1, \dots, m_d) \in (\mathbb{N}^*)^d$. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$, on note $\pi_m(P) = \deg(P(T^{m_1}, \dots, T^{m_d}))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$H_{m,n} = \{P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]; P(T^{m_1}X_1, \dots, T^{m_d}X^d) = T^n P(X_1, \dots, X_d)\}.$$

1. Soit P un monôme de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$. Existe-t-il un $n \in \mathbb{N}$ tel que P appartienne à $H_{m,n}$?
2. Démontrer que $H_{m,n}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont on donnera une base.
3. Démontrer que $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d]$ est la somme directe des sous-espaces $H_{m,n}$ où n décrit $\mathbb{N}$.