A matemática de Kurt Gödel*

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

> I would like to convey to you, most of all, my admiration: You solved this enormous problem with a truly masterful simplicity. (...) Reading your investigation was really a first class aesthetic pleasure.
> – John von Neumann[1]

1 Introdução

A 3 de Março de 1978, cerca de mês e meio depois da morte de Kurt Gödel, teve lugar no Instituto de Estudos Avançados de Princeton (Nova Jérsia, E.U.A.) uma pequena cerimónia pública de homenagem ao grande lógico. A cerimónia, presidida pelo então director do Instituto, Harry Woolf, foi pouco publicitada tendo apenas atraído uma pequena audiência. Hao Wang (lógico, amigo e correspondente de Gödel), Simon Kochen (professor da Universidade de Princeton), André Weil e Hassler Whitney (colegas de Gödel no Instituto) prestaram oralmente um tributo a Gödel e ao seu trabalho. Na sua intervenção, Kochen recordou uma pergunta que Stephen Kleene lhe pôs no seu exame doutoral: "Nomeie cinco teoremas de Gödel". De acordo com Kochen, a questão tinha como objectivo mostrar que "cada um dos

*O Armando Machado e o António Fernandes leram este trabalho e sugeriram-me algumas alterações úteis. Agradeço-lhes os comentários. Um deles também sugeriu que o trabalho fosse mais curto e menos especializado, tendo em vista que se dirige aos matemáticos em geral e não aos lógicos. *Video meliora proboque, deteriora sequor* (vejo a melhor maneira e aprovo-a, mas faço da pior maneira).

[1]Numa carta a Gödel, referindo-se à demonstração da consistência do axioma da escolha e da hipótese do contínuo (cf. [30]).

teoremas (...) iniciou uma área da moderna lógica matemática".[2] Não se pode subestimar a centralidade do trabalho de Gödel na lógica matemática. Esta centralidade reflecte-se, por exemplo, no conteúdo programático das cadeiras da área. A primeira parte duma cadeira de lógica matemática está geralmente organizada para demonstrar o teorema da completude de Gödel e suas principais consequências e, com frequência, o curso culmina com os dois teoremas da incompletude de Gödel. Uma cadeira de teoria dos conjuntos – em que se abordem resultados de consistência e independência – cobre necessariamente o universo construtível de Gödel. Numa cadeira sobre intuicionismo o resultado simples, mas elucidativo, da interpretação de Gödel (e Gentzen) da aritmética clássica na aritmética intuicionista tem lugar garantido e, desde que as aulas tomem um determinado rumo, é mister estudar-se a interpretação *Dialectica* de Gödel. Num plano mais elevado, compartilho com muitos colegas a opinião de que os teoremas da incompletude de Gödel marcam indelevelmente o pensamento humano.

A obra matemática de Gödel não é extensa. Consiste essencialmente em sete artigos de fundo, duas monografias baseadas nas suas aulas e numa série de treze pequenos artigos (ou notas) publicados entre 1932 e 1936 na revista *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* (são escritos de uma ou duas páginas, com a excepção de um artigo de cinco páginas e de um outro com um único parágrafo).[3] O *Ergebnisse* foi criado no final dos anos vinte do século passado pelo geómetra Karl Menger como fórum de publicação das actividades dum seminário de matemática também por ele fundado. Menger foi aluno de doutoramento de Hans Hahn na Universidade de Viena (tal como Gödel) e era mais velho do que Gödel quatro anos (Gödel chegou a ter uma cadeira de teoria da dimensão com Menger). Menger convidou Gödel em 1929 para integrar o seminário, tendo este nele participado activamente e colaborado na edição de sete dos oito volumes do *Ergebnisse*. Das contribuições de Gödel para esta revista ressaltam pelo inesperado cinco pequenos trabalhos sobre geometria, incluindo um de uma página em colaboração com Menger e Abraham Wald (o único trabalho em conjunto de Gödel). Estes pequenos artigos enquadravam-se num programa de Menger para "reformar" a geometria projectiva e diferencial. Dada a minha falta de competência na área, não comentarei os trabalhos de Gödel em geometria, assim como não comentarei

[2]Episódio relatado por John Dawson na p. 266 de [6].

[3]Um dos artigos de 1933 é uma reimpressão dum artigo publicado um ano antes na revista *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*.

os dois artigos de Gödel sobre cosmologia relativista publicados bastante mais tarde em 1949 e 1952 (em *Reviews of Modern Physics* e em *Proceedings of the International Congress of Mathematics; Cambridge, Massachusetts, U.S.A., 1950*, respectivamente). Os restantes artigos de Gödel no *Ergebnisse* debruçam-se sobre resultados de lógica e, no que se segue, comentá-los-ei brevemente. Entre 1931 e 1935, Gödel escreveu inúmeras recensões, principalmente de trabalhos em lógica – trinta e duas ao todo. Depois de 1935, Gödel nunca mais escreveu recensões.

Dos sete artigos atrás mencionados, três publicaram-se na revista da Universidade de Viena *Monatshefte für Mathematik und Physik*, entre os quais os dos célebres teoremas da completude e incompletude. Em 1934, Gödel dá aulas no Instituto de Estudos Avançados sobre os seus resultados, daí resultando uns apontamentos policopiados tirados por Stephen Kleene e J. Barkley Rosser. Estes apontamentos apenas serão publicadas trinta e um anos mais tarde, em 1965, numa colectânea organizada por Martin Davis intitulada *The Undecidable*. Os resultados de Gödel sobre a consistência relativa do axioma da escolha e da hipótese generalizada do contínuo foram publicados nos *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, em 1939 (um anúncio destes resultados fora publicado no ano anterior também nos *Proceedings*). Em 1940, Gödel publica uma monografia na série *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press), baseada em apontamentos tirados por George Brown das suas aulas sobre os resultados de consistência em teoria dos conjuntos. A monografia estuda estes resultados de forma mais detalhada e duma maneira tecnicamente diferente. O último artigo publicado por Gödel viu a luz do dia em 1958 num número especial da revista suiça *Dialectica* por ocasião do septuagésimo aniversário de Paul Bernays, amigo e principal correspondente científico de Gödel. Os dois artigos remanescentes são os estudos, atrás referidos, sobre cosmologia relativista. As publicações que apareceram até 1936 estão escritas em alemão e as subsequentes em inglês, com a excepção do artigo de 1958 de homenagem a Bernays. Kurt Gödel não teve estudantes nem deixou escola.

2 O teorema da completude

Em 1928, David Hilbert e Wilhelm Ackermann publicam o livro "Grundzüge der theoretischen Logik". Nele formulam, como problema em aberto, a completude do cálculo de predicados: dada uma fórmula (fechada) da linguagem do cálculo de predicados, se ela é válida será que então é formalmente dedutível?[4] A resposta é afirmativa, como mostrou Gödel na sua dissertação de doutoramento submetida à Universidade de Viena em Outubro de 1929 e defendida em Fevereiro de 1930 (uma reformulação da tese foi publicada em [10]). John Dawson, biógrafo de Gödel, reporta que – muito provavelmente – Gödel escolheu o tópico de dissertação sozinho e que a completou antes de a mostrar ao seu supervisor, Hans Hahn (cf. [6], p. 54 e também nota 2 de [43]).

As fórmulas do cálculo de predicados obtêm-se formalmente a partir de símbolos relacionais R, Q, etc. e de variáveis individuais x, y, etc. por meio da construção de fórmulas atómicas, do género '$R(x, y)$', e da aplicação de conectivos proposicionais (negação, condicional, etc.) e quantificações universais e existenciais.[5] Quando todas as variáveis duma fórmula ocorrem quantificadas (mudas), diz-se que é uma fórmula fechada. É caso da fórmula $\forall y \exists x R(x, y) \to \exists x \forall y R(x, y)$. Uma interpretação desta fórmula consiste num conjunto não vazio X (o domínio da interpretação) e numa relação binária $U \subseteq X \times X$ (a interpretação do símbolo relacional binário R). Quando X é $\mathbb{N}$ e U é a relação "menor ou igual", a fórmula acima é verdadeira nesta interpretação, enquanto que se se modificar a interpretação mantendo o domínio $\mathbb{N}$ mas tomando U como sendo o conjunto diagonal de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então a fórmula em apreço é falsa. Uma fórmula fechada diz-se *válida* se for verdadeira em *todas* as interpretações.[6] A fórmula acima não é válida, mas já o é a fórmula $\exists x \forall y R(x, y) \to \forall y \exists x R(x, y)$.

Fruto do labor do programa logicista de Gottlob Frege, Bertrand Russell et al., nos anos vinte do passado século a lógica já se encontrava axiomatizada

[4] O problema análogo para o cálculo proposicional (toda a tautologia é formalmente dedutível) fora solucionado afirmativamente por Bernays em 1926. Emil Post já tinha antecipado uma solução em 1921.

[5] Não se incluem nem símbolos constantes, nem símbolos funcionais nem o sinal de igualdade (o cálculo de predicados *puro*). Porém, Gödel também trata o caso com o símbolo de igualdade e a presença de símbolos constantes e funcionais não levanta quaisquer problemas. É fundamental para se ter o resultado de completude que *não* se permitam quantificações de símbolos relacionais (nem funcionais). Gödel é enfático a respeito deste ponto na nota 3 de [10].

[6] A terminologia das interpretações não é de Gödel. Em 1929 Alfred Tarski ainda não tinha publicado o seu tratamento matemático da noção de "fórmula (fechada) verdadeira sob uma dada interpretação". Mas, claramente, a noção de validade era bem compreendida informalmente – o leitor certamente compreende-a – o que é suficiente para se poder enunciar e *demonstrar* o teorema da completude.

de uma maneira precisa e formal. No seu trabalho, Gödel adoptou um sistema dedutivo formal devido a Russell (e usado por Hilbert e Ackermann), o qual se passa a descrever com algumas modificações menores. Os axiomas são todas as fórmulas da forma

1. $A \vee A \to A$	4. $(A \to B) \to (C \vee A \to C \vee B)$
2. $A \to A \vee B$	5. $\forall x F(x) \to F(y)$
3. $A \vee B \to B \vee A$	6. $\forall x(A \vee F(x)) \to A \vee \forall x F(x)$

onde, em 6, a variável x não ocorre livre na fórmula A. As regras de inferência são a regra do *Modus Ponens* e a regra da generalização que permite inferir $\forall x F(x)$ de uma dedução de $F(x)$ (intuitivamente esta regra permite inferir uma asserção universal duma dedução para indivíduos ao arbítrio).[7] Também se permitem substituições de variáveis mudas.

Na demonstração da completude, Gödel mostra a seguinte dicotomia: ou uma fórmula (fechada) é satisfazível numa estrutura cujo domínio é $\mathbb{N}$ ou, alternativamente, a sua negação deduz-se formalmente.[8] O resultado de completude sai facilmente desta disjunção.

A demonstração de Gödel segue linhas já trilhadas ao tempo. Apoiando-se explicitamente num trabalho de Thoralf Skolem de 1920, Gödel reduz o problema a fórmulas da forma $\forall x_1 \ldots \forall x_k \exists y_1 \ldots \exists y_r\, H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_r)$, onde H é uma fórmula sem quantificadores.[9] Assim, Gödel pôde restringir a sua atenção a fórmulas com prefixo quantificacional da forma $\forall \cdots \forall \exists \cdots \exists$.

O próximo passo de Gödel consiste em associar a cada fórmula F uma sucessão de fórmulas sem quantificadores (com variáveis livres) $F_1, F_2, F_3, \ldots$ em que cada uma se deduz das seguintes e que satisfaz duas propriedades: (a) cada condicional $F \to E_n$ é uma fórmula válida, onde E_n é o fecho existencial de F_n;[10] (b) se as fórmulas F_n são simultaneamente satisfazíveis no sentido do cálculo proposicional,[11] então F é satisfazível numa interpretação de domínio

[7] Nesta axiomatização, os símbolos lógicos primitivos são a negação, a disjunção e a quantificação universal. O condicional $A \to B$ abrevia $\neg A \vee B$.

[8] O leitor com estudos de lógica observará que este resultado incorpora o resultado de Leopold Löwenheim de 1915 segundo o qual uma fórmula satisfazível é satisfazível numa estrutura de domínio $\mathbb{N}$. No cálculo de predicados *com igualdade* tem também que se prever o caso da fórmula ser satisfazível somente em domínios finitos.

[9] Skolem mostrou como associar a cada fórmula F uma fórmula S (a sua *forma normal de Skolem*) com a forma acima de tal modo que uma é satisfazível num dado domínio se, e somente se, a outra também o for. Para obter a sua redução, Gödel argumenta que se $\neg S$ se deduz, então $\neg F$ também se deduz.

[10] O fecho existencial duma fórmula obtém-se prefixando-a com quantificadores existenciais de modo a obter uma fórmula fechada. *Mutatis mutandis* para o fecho universal.

[11] Dado que as fórmulas F_n não têm quantificadores, podemo-las considerar fórmulas do

$\mathbb{N}$. Considere-se a alternativa entre

(1) Cada F_n é satisfazível no sentido proposicional; e

(2) Alguma fórmula F_n não é satisfazível no sentido proposicional.

Caso se dê a primeira alternativa, Gödel invoca "argumentos familiares" para concluir que as fórmulas F_n são simultaneamente satisfazíveis no sentido proposicional e, por (b), conclui que F é satisfazível numa interpretação de domínio $\mathbb{N}$. Por outro lado, usando a forma sintáctica especial das fórmulas F_n, Gödel mostra que todos os condicionais $F \to E_n$ se deduzem formalmente. Se se tiver a segunda alternativa para um certo F_n, sai imediatamente que $\neg F_n$ é uma tautologia. Consequentemente, pelo teorema da completude proposicional, $\neg F_n$ deduz-se proposicionalmente. *Ergo*, o seu fecho universal (equivalente a $\neg E_n$) deduz-se e, portanto, $\neg F$ também. Q.E.D.

O leitor com treino em lógica reconhece no estudo da primeira alternativa a propriedade da compacidade do cálculo proposicional. No seu comentário ao artigo de Gödel, Burton Dreben e Jean van Heijenoort interpretam a expressão 'argumentos familiares' como denotando o uso duma forma do axioma da escolha (cf. p. 54 de [27]). Gödel não refere o trabalho recente de Dénes König de 1926 em que este uso é feito explicitamente, mas presumivelmente o tipo de argumento seria "folclore". Trata-se, contudo, duma aplicação do axioma da escolha em circunstâncias muito especiais que, na realidade, a torna supérflua. Ainda assim, o argumento é essencialmente não construtivo. A sucessão de fórmulas F_n, tal como o estudo da primeira alternativa, já eram conhecidos por Skolem em [41] mas – aparentemente – Gödel não sabia deste artigo. Somente o estudo da segunda alternativa é novidade absoluta na demonstração de Gödel, se bem que esta parte do argumento seja simples de alcançar. Em 1967 Gödel, depois duma nota cautelosa chamando a atenção para o facto de se estar a debater acontecimentos dos anos vinte através do prisma da lógica dos anos sessenta, comentou assim a situação numa carta a Hao Wang (cf. p. 397 of [30]):

> Matematicamente, o teorema da completude é de facto uma consequência quase trivial de *Skolem* [41]. Todavia, acontece que, na época ninguém (incluindo o próprio Skolem) fez esta inferência (nem a partir de *Skolem* [41] nem, como eu fiz, a partir de considerações similares suas).

---

cálculo proposicional tomando para letras proposicionais as fórmulas atómicas. A noção de satisfazibilidade no contexto proposicional é a familiar noção que advém das tabelas de verdade.

Gödel generaliza ainda o resultado da completude a um conjunto numerável de fórmulas: dado um conjunto numerável de fórmulas, ou bem que elas são simultaneamente satisfazíveis ou, então, a negação duma conjunção finita delas já se deduz formalmente. Deste enunciado Gödel retira o seguinte resultado de compacidade: para que um conjunto numerável de fórmulas seja satisfazível é condição necessária e suficiente que todo o seu subconjunto finito seja satisfazível.[12] Mais tarde, em 1936, Anatolii Maltsev generaliza a compacidade para conjuntos não numeráveis. O próprio Gödel estabeleceu em 1932 (cf. [13]) uma espécie de resultado de compacidade para o caso não numerável no âmbito do cálculo proposicional.[13] Na parte final da sua tese, Gödel demonstra ainda a independência da axiomática usada por Hilbert e Ackermann.

3 Como é que Gödel chegou à incompletude?

Noutro artigo deste volume, Reinhard Kahle debruça-se sobre os teoremas da incompletude de Gödel pelo que não os discutirei em detalhe. Convido o leitor a consultar o artigo de Kahle. Porém, é interessante discorrer um pouco sobre a forma como Gödel chegou aos teoremas da incompletude. Estes, ao contrário do teorema da completude, surgiram inesperadamente para a comunidade matemática. O que se sabe sobre este assunto devemo-lo a Hao Wang que, em [43], relata conversas com Gödel sobre este tema.

No verão de 1930, Gödel toma como problema a consistência formal da análise. Isto significa considerar um sistema axiomático totalmente formalizado da análise e mostrar que dele não se deduzem contradições. Adicionalmente, o método de demonstração da consistência deve ser *finitista* – seguindo as normas do Programa de Hilbert. Por exemplo, pode demonstrar-se a consistência da geometria de Lobatchevski por meio duma sua interpretação na geometria euclideana (e.g., através do disco de Klein). Este método fornece tão-somente uma demonstração da consistência da geometria de Lobatchevski *relativa* à geometria euclideana. Hilbert, por outro lado, procurava demonstrações de consistência dum sistema formal que não se baseassem

[12] A compacidade parece ter-lhe ocorrido mais tarde, pois não aparece na dissertação.

[13] Hoje em dia geralmente demonstra-se o teorema da completude usando o *método das testemunhas* de Henkin. Este método é muito flexível e aplica-se directamente ao caso não numerável, ao contrário do argumento de Gödel. Qualquer livro moderno de lógica matemática explica o método (e.g., [40]).

em suposições de consistência de *outro* sistema formal. As demonstrações, por sua vez, apenas se poderiam apoiar em argumentos matemáticos incontroversos – os tais argumentos de carácter finitista.

Gödel optou, prudentemente, por não abordar directamente o problema de consistência antes considerando o problema da consistência da análise em relação à aritmética. Este passo, por si só, já constituiria uma contribuição significativa para o Programa de Hilbert. Em [43], Wang reporta o seguinte:

> (Gödel) representou os números reais por fórmulas ... da teoria dos números e descobriu que tinha que usar o conceito de verdade para fórmulas fechadas da teoria dos números para conseguir verificar os axiomas de compreensão para a análise. Rapidamente se deparou com os paradoxos relacionados com a verdade e a definibilidade (em particular com o paradoxo do mentiroso e o paradoxo de Richard). Apercebeu-se de que a noção de verdade em teoria dos números não pode ser definida em teoria dos números e, por conseguinte, que o seu plano para demonstrar a consistência relativa da análise não funcionava.

O passo chave neste fio de raciocínio foi, certamente, a percepção de que é possível dar na aritmética um sentido preciso às asserções auto-referenciais. Desta forma, se a noção de verdade fosse definível na aritmética então chegar-se-ia a uma contradição (e.g., através da asserção 'esta asserção é falsa'). *Au contraire*, a noção de dedutibilidade formal é definível na aritmética. Logo, verdade e dedutibilidade não são a mesma noção. Este é o cerne do fenómeno da incompletude. Wang prossegue:

> (Gödel) acaba por concluir que em sistemas suficientemente fortes como o *Principia Mathematica* (teoria dos tipos) ou a teoria dos conjuntos ("Zermelo-Fraenkel") existem proposições indecidíveis.[14]

Gödel, porém, era presumivelmente uma personalidade cautelosa (consulte-se o interessante [8]). A noção de verdade era uma noção com demasiadas conotações metafísicas para ser bem acolhida em estudos matemáticos (ou outros) no clima neo-positivista da Viena dos anos trinta. O trabalho seminal

[14] Na nota [14], Gödel dá uma apresentação mais geral dos teoremas da incompletude usando a linguagem da aritmética em vez da linguagem da teoria dos tipos ou da teoria dos conjuntos.

de Tarski sobre este assunto ainda estava um bom par de anos no futuro.[15] Naturalmente, Gödel substitui a noção de verdade por uma noção sintáctica no seu artigo sobre a incompletude [11]. Depois de esboçar a demonstração da incompletude na parte final da primeira secção do seu glorioso artigo, Gödel é elucidativo:

> O método de demonstração que se utilizou pode obviamente ser aplicado a qualquer sistema formal que, em primeiro lugar, possua meios de expressão suficientes para que, quando interpretado intuitivamente, defina os conceitos (em especial o de 'fórmula dedutível') que ocorrem no argumento que desenvolvemos acima; em segundo lugar tem que ser um sistema no qual qualquer fórmula dedutível seja verdadeira. Na execução detalhada da nossa demonstração, que vem a seguir, substituiremos a segunda destas hipóteses por uma mais fraca e puramente formal.

As cautelas de Gödel tiveram a consequência imediata de tornar *mais forte* o enunciado do primeiro teorema da incompletude. Em particular, desde que se suponha que a aritmética seja formalmente consistente, a asserção autoreferencial 'esta asserção não se deduz' não se deduz.[16] Agora, com mais um

[15] É interessante inquirir se Gödel sentiu a necessidade de formalizar matematicamente a noção de verdade para fórmulas (fechadas) duma linguagem formal sob uma dada interpretação. O seguinte é certo. Em primeiro lugar, determinadas afirmações de Gödel necessitam da definição formal de verdade para serem substanciadas rigorosamente. Um exemplo de tal afirmação é a seguinte em [14]:

> Se imaginarmos o sistema Z [da aritmética] a ser sucessivamente alargado pela introdução de variáveis para classes de números, classes de classes de números, etc., juntamente com correspondentes axiomas de compreensão, obtemos uma sequência (prolongável no transfinito) de sistemas formais (...), tendo-se que a consistência (...) de cada um destes sistemas se demonstra em todos os sistemas subsequentes.

Em segundo lugar, Gödel sabia que a noção de verdade aritmética não se define na linguagem formal da aritmética (uma antecipação do teorema da indefinibilidade da verdade de Tarski), como mostra uma carta de Gödel a Ernst Zermelo em 1931 (cf. p. 427 de [30]).

[16] O primeiro teorema da incompletude, tal como enunciado por Gödel no Teorema VI de [11], tem duas partes. Esta é uma das partes e, como é patente, usa apenas como hipótese a noção sintáctica de consistência (formal). Para a outra parte, Gödel utiliza a noção mais forte de ω-consistência. São estas noções que substituem a noção de verdade no enunciado de Gödel.

pouco de reflexão, obtém-se o segundo teorema da incompletude de acordo com o qual a consistência formal duma teoria "suficientemente forte" não se deduz na própria teoria.[17] Há horas felizes.[18]

4 Outros trabalhos lógicos

A publicação [18] é um sumário, sem demonstrações, em que se anuncia (um pouco imprecisamente) o seguinte resultado, destacado em itálico no original:

> (...) ao se passar para a lógica do tipo seguinte, não só certas proposições que não eram dedutíveis se tornam agora dedutíveis como também um número infinito de proposições que já o eram têm agora deduções extraordinariamente mais curtas.[19]

Depois da descoberta dos teoremas da incompletude, Gödel insiste ao longo de toda a sua carreira na tese da *inexauribilidade da matemática*, enunciada da seguinte forma particular: dada uma qualquer formalização da matemática (que contenha um *modicum* de aritmética), pode sempre passar-se para uma extensão formal com variáveis do tipo lógico seguinte na qual

[17] No dia 7 de Setembro de 1930, numa mesa redonda sobre fundamentos de matemática no âmbito duma conferência em Königsberg sobre Epistemologia das Ciências Exactas, Gödel faz uma curta intervenção em que anuncia:

> Podemos mesmo dar exemplos (admitindo a consistência da matemática clássica) de proposições (e mesmo de proposições do género de Goldbach ou Fermat) que, não obstante serem intuitivamente verdadeiras, não se deduzem no sistema formal da matemática clássica.

Este é o primeiro anúncio público dos resultados de incompletude (uma transcrição da discussão foi publicada na revista *Erkenntnis* em 1931, encontrando-se disponível em [5] uma tradução em inglês). O anúncio de Gödel passou relativamente despercebido. Sabe-se que von Neumann se mostrou muito interessado na intervenção de Gödel e que conversou com ele depois de terminada a sessão. Na altura, Gödel ainda não tinha obtido o segundo teorema da incompletude (cf. [43]). A 20 de Novembro, von Neumann escreve a Gödel a dizer que "(...) obtive um resultado admirável. Consegui mostrar que a consistência da matemática não é demonstrável." (cf. p. 337 de [30]). A 23 de Outubro Hans Hahn tinha entretanto já apresentado um sumário dos resultados de Gödel à Academia das Ciências de Viena, com o segundo teorema da incompletude incluído. O artigo [11], com as demonstrações completas, chega à revista *Monatshefte* a 17 de Novembro ...

[18] No início da secção 4 de [11], Gödel classifica o segundo teorema da incompletude de "surprising consequence" dos resultados que levaram ao primeiro teorema da incompletude.

[19] Se se interpretam as variáveis como tomando valores num determinado domínio, as variáveis do tipo lógico seguinte tomam valores nos subconjuntos desse domínio.

se deduzem proposições intuitivamente verdadeiras mas não dedutíveis no sistema original.[20] O conteúdo de [18] é uma variante interessante do tema da inexauribilidade, observando-se que a passagem ao tipo seguinte não só permite novas deduções como também permite obter deduções muito mais curtas de teoremas originais. Mais detalhadamente, se ϕ é uma função recursiva (por exemplo, $\phi(n) = 10^6 n$), então há um número infinito de teoremas do sistema original cujas demonstrações mais curtas são 10^6 mais longas que certas demonstrações correspondentes do sistema de tipo superior. Em 1952, Andrzej Mostowski demonstra em [38] um teorema deste género com a noção de comprimento de dedução definida pelo número de símbolos que nela ocorrem (Gödel, na sua nota, refere-se antes ao número de *linhas* da dedução mas esta noção de comprimento levanta certos problemas visto que há um número infinito de deduções com um dado número de linhas, mas apenas um números finito de deduções com um dado número de símbolos). O leitor interessado nestes assuntos de "speed-up" de deduções pode consultar a introdução ao artigo de Gödel por Rohit Parikh em [27] e a exposição de Pavel Pudlák em [39] (em especial a secção 7).

O último artigo de Gödel na revista *Monatshefte* [20], assim como o artigo [12], dedica-se a problemas de decisão no âmbito do cálculo de predicados puro (ver a nota 5). Este género de problemas estava muito em voga ao tempo e a ele se dedicaram autores como Bernays, Ackermann, Skolem, Moses Schönfinkel, László Kalmár, Kurt Schütte, etc. Uma classe de fórmulas do cálculo de predicados puro diz-se *decidível* se existir um método algorítmico que permita determinar se uma dada fórmula da classe é, ou não, satisfazível. Em [12] Gödel mostra que a classe das fórmulas cujo prefixo quantificacional é da forma $\exists \cdots \exists \forall\forall \exists \cdots \exists$ é decidível, melhorando assim um resultado semelhante de Ackermann de 1928 sobre a decidibilidade desta classe com apenas um quantificador universal intercalar. O artigo do *Monatshefte* refina o resultado de [12] e corrige uma lacuna da sua demonstração. O refinamento consiste no seguinte: toda a fórmula satisfazível da forma $\exists \cdots \exists \forall\forall \exists \cdots \exists$ é necessariamente satisfazível numa interpretação de domínio finito. Esta condição é suficiente para garantir a decidibilidade da classe em questão pois implica imediatamente que as suas fórmulas satisfazíveis formam um conjunto recursivamente enumerável (e, consequentemente, decidível porque o teorema da completude garante que a classe complementar também é recursivamente enumerável). A demonstração de Gödel baseia-se num engenhoso

[20]E.g., a consistência formal do sistema original. Veja-se também a nota 15.

e complicado argumento combinatorial. O artigo do *Monatshefte* termina com a demonstração, relativamente simples, de que o problema da decisão para o cálculo de predicados puro se reduz ao problema de decisão para a classe $\forall\forall\exists\cdots\exists$ (refinando a forma normal de Skolem). Uns anos mais tarde, Alonzo Church resolve o *Entscheidungsproblem* para o cálculo de predicados – mostrando a indecidibilidade do cálculo de predicados. O resultado de Gödel garante agora que já a classe prenexa $\forall\forall\exists\cdots\exists$ é indecidível.[21] Gödel afirma ainda, sem substanciar, que a decidibilidade da classe $\exists\cdots\exists\forall\forall\exists\cdots\exists$ para o cálculo de predicados *com igualdade* se pode argumentar de modo semelhante à do cálculo puro. Mais de sessenta anos depois, Warren Golbfarb mostra em [32] que Gödel se enganara a este respeito.

Em [19] Gödel mostra que nem toda a demonstração de independência no âmbito do cálculo proposicional se pode obter por meio de tabelas finitas de valores de verdade. O contra-exemplo de Gödel é o seguinte: a tautologia $P \to \neg\neg P$ é independente dos três axiomas $P \to P$, $(P \to \neg\neg Q) \to (P \to Q)$ e $(\neg\neg P \to \neg\neg Q) \to (P \to Q)$ munidos da regra de inferência do *Modus Ponens*. A tabela infinita formada pelos naturais e definida por $\neg P = P + 1$; $P \to Q = 0$ para $P \geq Q$; e $P \to Q = 1$ caso contrário; mostra o resultado de independência. Gödel avança um argumento combinatório para mostrar que este resultado não se pode obter com tabelas finitas.

Resta discutir os artigos [21], [17] e [16]. Estes três artigos debruçam-se, duma forma ou doutra, sobre a lógica intuicionista. No primeiro dos artigos Gödel mostra que a lógica proposicional intuicionista não pode ser considerada uma lógica a um número finito de valores de verdade. O argumento baseia-se numa aplicação muito simples do princípio dos cacifos. O segundo dos artigos dá (sem apresentar demonstrações) uma interpretação da lógica proposicional intuicionista no sistema modal hoje conhecido por S_4 e conjectura que a interpretação é fiel (o que foi quinze anos mais tarde demonstrado por J. C. C. McKinsey e Alfred Tarski). Retrospectivamente, a interpretação de Gödel explica por que razão se pode obter uma semântica para a lógica intuicionista a partir da semântica de Kripke para a lógica modal. Logo no início do artigo, Gödel interpreta informalmente a modalidade como demonstrabilidade (na nossa notação, $\Box P$ querendo dizer que P é demonstrável). Porém, no último parágrafo faz notar que a modalidade em S_4 não pode ser interpretada pela noção de *dedutibilidade formal* numa teoria aritmética, pois o axioma $\Box P \to P$ de S_4 pode refutar-se sob esta interpretação. Com

[21]Para mais informações sobre estes assuntos deve consultar-se [7].

efeito, se se tomar para P a fórmula '$0 = 1$' tem-se $\Box(0 = 1) \to 0 = 1$ e, consequentemente, $\neg\Box(0 = 1)$. Ora, isto é a asserção da consistência formal, contradizendo o segundo teorema da incompletude. Para se interpretar a modalidade como dedutibilidade formal tem que se substituir em S_4 o axioma problemático pelo axioma de Löb: $\Box(\Box P \to P) \to \Box P$. No contexto da aritmética este axioma é um refinamento do segundo teorema da incompletude de Gödel. O estudo destes assuntos deu origem ao tema vasto e sofisticado da lógica da demonstrabilidade (consulte-se [33]).

Finalmente, o artigo [16] é uma pequena jóia. É muito simples, mas as coisas não têm que ser complicadas para ser interessantes. Gödel apresenta uma interpretação da aritmética clássica na aritmética intuicionista.[22] A interpretação, denotada pelo índice g, define-se assim: $P^g = P$ (P atómico), $(\neg F)^g = \neg F^g$, $(F \wedge G)^g = F^g \wedge G^g$, $(F \vee G)^g = \neg(\neg F^g \wedge \neg G^g)$, $(F \to G)^g = \neg(F^g \wedge \neg G^g)$, $(\forall x F(x))^g = \forall x F(x)^g$ e $(\exists x F(x))^g = \neg \forall x \neg F(x)^g$. Mostra-se que se uma fórmula (fechada) F se deduz na aritmética clássica então F^g deduz-se na aritmética intuicionista. O argumento de Gödel trata primeiro o caso proposicional à parte, apoiando-se num resultado de Valerii Glivenko de 1929 segundo o qual uma negação proposicional deduz-se classicamente se e somente se deduz intuicionisticamente. O caso proposicional é depois generalizado ao caso quantificacional.

A interpretação, dita de *negativa*, de Gödel mostra que – num certo sentido – a aritmética clássica é parte da aritmética intuicionista e, portanto, que a primeira não pode ser inconsistente sem a segunda o ser. De acordo com o relatado por Bernays em [3], o resultado mostrou aos membros da escola de Hilbert que os princípios intuicionistas vão bem para além dos princípios finitistas e (dado o segundo teorema da incompletude) abriu uma alternativa ao Programa de Hilbert, podendo-se tomar o raciocínio intuicionista – ao invés do finitista – como base para a metamatemática.[23]

[22] No original, Gödel considera sistemas semi-formais porque inclue na axiomática todas as asserções universais finitisticamente demonstráveis. Isto não é essencial para a interpretação.

[23] A interpretação de Gödel foi parcialmente antecipada por Andrei Kolmogorov em 1925 num artigo escrito em russo e desconhecido de Gödel. O resultado também foi demonstrado independentemente por Gerhard Gentzen que, ao tomar conhecimento do trabalho de Gödel, num acto de grande elegância retirou o seu artigo quando este já estava na fase das provas tipográficas.

5 O universo construtível

A hipótese do contínuo diz que qualquer subconjunto infinito de $\mathbb{R}$, não numerável, está em bijecção com $\mathbb{R}$. Este era o primeiro problema da célebre lista de problemas de David Hilbert na sua comunicação ao Congresso Internacional de Matemática em Paris em 1900. Na publicação [22] de 1938, Gödel anuncia que o axioma da escolha e a hipótese do contínuo são consistentes com os restantes axiomas da teoria dos conjuntos e, no ano seguinte, publica em [23] uma demonstração densa, directa e concisa deste resutado. Hilbert não teria tido em mente este género de solução. A solução de Gödel só é possível dado os avanços da lógica entretanto realizados, em que evidentemente se inclui a formalização precisa da axiomática da teoria dos conjuntos no cálculo de predicados com igualdade. Gödel baseia-se na axiomática de Ernst Zermelo de 1908, complementada pelo axioma da substituição.[24] Esta axiomatização ficou conhecida pela sigla ZF ("Zermelo-Fraenkel").[25] A teoria ZFC obtém-se de ZF adicionando-lhe o axioma da escolha. Tanto a linguagem de ZF como a de ZFC têm apenas um único símbolo relacional primitivo: o símbolo '$\in$' de pertença. Não há espaço neste trabalho para fazer a exposição da axiomática. Chamo apenas a atenção para o axioma da substituição,[26] proposto por Abraham Fraenkel em 1922. Sem este axioma não é possível, por exemplo, formar o conjunto $\{\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \ldots\}$. Em geral, não é possível efectuar definições por recursão transfinita.

O resultado de Gödel é um teorema de *consistência relativa*. Gödel mostra que se a teoria ZF for consistente então a teoria ZFC juntamente com a hipótese generalizada[27] do contínuo também é consistente. O método de

[24] A axiomática de Zermelo usa lógica de *segunda-ordem*, ao invés da lógica de primeira-ordem (ou cálculo de predicados) usada hoje em dia. A lógica de segunda-ordem não é formal sendo por isso inadequada para estudos lógico-matemáticos.

[25] ZF também inclui o axioma da fundação que, e.g., impede a existência de conjuntos "patológicos" que satisfaçam a equação $x = \{x\}$. Importantemente, este axioma garante que todos os conjuntos estejam no universo cumulativo (ver nota 30 adiante e discussão precedente). Gödel não faz uso deste axioma em [23].

[26] Recomendo o manual de Kenneth Kunen [37] como referência para a axiomática de ZFC e outrossim para o resultado de consistência de Gödel. O segundo capítulo do manual, sobre combinatória infinita, não é necessário para os resultados de consistência.

[27] Georg Cantor, o criador da teoria dos conjuntos, mostrou que a cardinalidade dum conjunto x é sempre estritamente inferior à cardinalidade do conjunto $\mathcal{P}(x)$ dos subconjuntos de x. A *hipótese generalizada do contínuo* diz que, para todo o conjunto infinito x, não existe nenhum conjunto cuja cardinalidade se situa estritamente entre x e $\mathcal{P}(x)$.

demonstração é o método dos *modelos internos*: Gödel define em ZF um modelo de ZFC que satisfaz a hipótese generalizada do contínuo. Trata-se do mesmo método que permite mostrar a consistência relativa da geometria de Lobatchevski em relação à geometria euclideana: neste caso o "modelo interno" é o disco de Klein.

O modelo interno de Gödel, conhecido por *universo construtível*, emana duma visão dos conjuntos diferente da visão logicista. De acordo com esta última, os conjuntos são algo de derivado das propriedades, viz. as colecções que se obtêm dividindo a totalidade de todas as coisas em duas categorias, conforme satisfaçam ou não uma determinada propriedade. Ainda hoje compensa fazer uma leitura do único artigo expositório de Gödel [25] onde se explica esta visão, conhecida por universo *cumulativo* dos conjuntos:[28]

> Os paradoxos são um problema muito sério, mas não para a matemática (...). Os conjuntos que ocorrem na matemática (pelo menos na matemática actual, incluindo toda a teoria dos conjuntos de Cantor) são conjuntos de inteiros ou de números racionais (i.e., pares de inteiros) ou de números reais (i.e., conjuntos de números racionais) ou de funções reais de variável real (i.e., conjuntos de pares de números reais), etc. Quando se enunciam teoremas acerca de todos os conjuntos (ou a existência de conjuntos em geral), estes teoremas podem ser sempre interpretados sem qualquer dificuldade como significando que são satisfeitos para conjuntos dos inteiros assim como para conjuntos de conjuntos de inteiros, etc. (respectivamente, que existe um conjunto de inteiros, ou um conjunto de conjuntos de inteiros, ou . . . etc., que têm a propriedade afirmada no teorema). Contudo, este conceito de conjunto segundo o qual um conjunto é algo que se pode obter a partir dos inteiros (ou quaisquer outros objectos bem definidos) por iteração da operação "conjunto de", e não como algo que se obtém dividindo a totalidade das coisas existentes em duas categorias, nunca levou a nenhuma antinomia (...)

Há uma nota nesta citação a esclarecer que a iteração da operação "conjunto de" inclui a iteração transfinita.[29] Por motivos de elegância técnica (e nada

[28] Zermelo introduziu a visão cumulativa em 1930. A ideia fundamental desta visão foi antecipada por Dmitry Mirimanoff em 1917.

[29] A iteração transfinita pressupõe uma teoria dos números ordinais que inclua a pos-

se perde com esta escolha), costuma partir-se da colecção vazia de objectos. O universo dos conjuntos obtém-se através de etapas, denotadas pela letra 'V' e indexadas nos ordinais:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \cup_{\alpha<\lambda} V_\alpha, \quad \text{para ordinais limite } \lambda. \end{aligned}$$

A teoria ZF mostra que as etapas acumulam, i.e. $\alpha \leq \beta \rightarrow V_\alpha \subseteq V_\beta$, e que todo o conjunto está nalgum V_α, i.e. $\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$.[30] O modelo interno de Gödel, denotado pela letra 'L' é uma variante de V:

$$\begin{aligned} L_0 &= \emptyset \\ L_{\alpha+1} &= \mathrm{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda &= \cup_{\alpha<\lambda} L_\alpha, \quad \text{para ordinais limite } \lambda. \end{aligned}$$

A diferença com V está nas etapas sucessor, em que em vez da passagem ao conjunto potência apenas se consideram os subconjuntos de L_α que são *definíveis* (com parâmetros) na estrutura $(L_\alpha, \in)$ por meio duma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos. Assim, $L_{\alpha+1}$ não tem todos os subconjuntos de L_α, mas apenas alguns. As etapas de L também acumulam e $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, para todo o ordinal α. O *axioma da construtibilidade*, de sigla '$V = L$', diz que todos os conjuntos são construtíveis, i.e., $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$.[31]

São necessárias três coisas para demonstrar os resultados de consistência. Em primeiro lugar, tem que se mostrar que o universo (classe) de todos os conjuntos construtíveis satisfaz os axiomas da teoria dos conjuntos ZF. Em segundo lugar, que também satisfaz o axioma da construtibilidade $V = L$.

---

sibilidade de efectuar definições por recursão transfinita (aqui é necessário o axioma da substituição). Os números ordinais generalizam os números naturais e estão associados a *boas-ordens*, i.e., ordens totais em que todo o subconjunto não vazio tem elemento mínimo. Na teoria dos conjuntos, os números cardinais são precisamente os números ordinais que não estão em correspondência biunívoca com nenhum número ordinal inferior. No caso finito, os números ordinais e cardinais coincidem. Isto já não se passa no caso infinito. O axioma da escolha garante que todo o conjunto tem um número cardinal.

[30] Este último facto é, na presença dos restantes axiomas, equivalente ao axioma da fundação (ver nota 25).

[31] Gödel usa a letra 'L' para o universo construtível em [24], inicial da palavra "lawlike" (cf. Georg Kreisel em p. 158 de [36]). Talvez levado pelos seus resultados, Gödel termina o anúncio de [22] com a ideia que o axioma da construtibilidade possa ser uma "completação natural" dos axiomas da teoria dos conjuntos. Como é claro pelos seus escritos posteriores (e.g., [25]), Gödel mais tarde abandona esta ideia.

Finalmente, tem que se mostrar que $ZF + V = L$ implica o axioma da escolha e a hipótese generalizada do contínuo.

Para estabelecer rigorosamente o primeiro facto há que ter algum cuidado com a verificação do axioma da separação. O argumento de Gödel baseia-se no seu fundamental Teorema II, segundo o qual cada subconjunto de L_α (α infinito) em L está em L_κ, onde k é o menor cardinal depois de α.[32] Este teorema também é essencial para verificar que a hipótese generalizada do contínuo vale no universo construtível. O tipo de considerações necessário para obter este resultado é, na minha opinião, um *tour de force* para a lógica da época.[33] O segundo facto é um tudo-nada subtil porque certas noções da teoria dos conjuntos dependem crucialmente do universo onde se está. Por exemplo, pode existir em V uma bijecção entre dois conjuntos de L sem que uma tal bijecção exista em L. Por isso, a noção de cardinalidade depende do universo de trabalho.[34] As noções que não dependem do universo de trabalho dizem-se *absolutas*. Gödel mostra que a noção de ser conjunto construtível é absoluta. Consequentemente, em ZF deduz-se que L é um modelo interno de $ZF + V = L$.

Já comentei acima a verificação da hipótese generalizada do contínuo em $ZFC + V = L$. A verificação do axioma da escolha é, realmente, a parte mais fácil da demonstração. O argumento é tão intuitivo que pode ser esboçado aqui. Sob a suposição de que $V = L$ é possível dar uma boa-ordenação (ver nota 29) do universo dos conjuntos – o que implica o axioma da escolha. Dados conjuntos x e y quando é que se diz que $x \prec y$? Tanto

[32] Modernamente, a verificação do axioma da separação usa um princípio de reflexão. Veja-se [37] para terminologia e detalhes. Gödel segue um caminho diferente que parece exigir a presença dum cardinal inacessível. Contudo, no final do artigo, Gödel menciona "slight modifications". O argumento do Teorema II usa técnicas baseadas em resultados de Löwenheim e Skolem e antecipa o teorema do colapso de Mostowski. Na sua monografia de [24], Gödel apresenta todos os detalhes mas trabalha com uma teoria com variáveis para conjuntos e para *classes* (a teoria dos conjuntos BG de Bernays-Gödel). Ao contrário da primeira demonstração, a nova demonstração é pouco conceptual e a definição do universo construtível é *ad hoc*. De acordo com o relatado por Kleene em [34], o próprio Gödel considerava a sua primeira demonstração como a mais sugestiva.

[33] Li pela primeira vez as cinco páginas do artigo [23] de Gödel há pouco tempo para preparar o presente trabalho. Se bem que já conhecesse a demonstração de consistência desde os meus tempos de estudante de pós-graduação, a concisão e direiteza do artigo de Gödel constituiram para mim *também* "um prazer estético de primeira classe" (cf. citação de von Neumann no início do artigo).

[34] Os universos V e L têm os mesmos ordinais, mas certos ordinais podem ser cardinais em L sem o ser em V (ver nota 29).

x como y aparecem algures nas etapas que formam L. Se x aparecer antes de y, põe-se $x \prec y$. Admita-se que x e y aparecem pela primeira vez na mesma etapa $\alpha + 1$. Este é o caso crucial, que não se pode efectuar em V. Neste caso, x e y aparecem porque têm definições (com parâmetros) na estrutura $(L_\alpha, \in)$. Ora, estas definições são dadas por fórmulas. Como as fórmulas são em número numerável (e, por isso, podem ser bem-ordenadas) e se pode supor (por indução transfinita) que os parâmetros de L_α já estão bem-ordenados, conclui-se que as definições sobre $(L_\alpha, \in)$ se podem bem-ordenar. Naturalmente, põe-se $x \prec y$ caso x se defina primeiro do que y.[35]

Ainda que a teoria dos conjuntos não seja uma teoria dos tipos, a visão cumulativa é tipada "em espírito", com os tipos a prosseguir pelo transfinito a fora.[36] Esta visão encaixa-se com a forma particular da tese da inexauribilidade da matemática subscrita por Gödel (ver Secção 4). Na teoria dos conjuntos, a consideração de novos tipos transforma-se em postulados de existência de ordinais cada vez maiores, tecnicamente denominados de cardinais inacessíveis. Gödel exprime em [25] a convicção de que a hipótese do contínuo se possa vir a decidir por meio destes postulados de cardinalidade ou através de outro tipo de axiomas.[37] Esta ideia tem sido motor de desenvolvimento da teoria dos conjuntos desde o final da década de sessenta, ainda que os estudos contemporâneos não pareçam sustentar a convicção de Gödel.[38]

6 A interpretação *Dialectica*

De acordo com Georg Kreisel (p. 104 de [36]), as origens do artigo de Gödel da revista *Dialectica* em 1958 remontam ao início da década de quarenta quando Gödel se debruçava sobre a forma de tornar explícito o carácter construtivo

[35] No seu anúncio em [22], Gödel também enuncia a consistência de duas asserções sobre a estrutura de certas classes de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Este resultado é consequência das asserções serem verdadeiras no universo construtível e apoia-se no facto de existir uma boa-ordem definível (o que origina uma boa-ordem definível em $\mathbb{R}$). Para mais informações sobre este assunto, consulte-se a introdução de Robert Solovay aos artigos de Gödel em [28].

[36] Porém, os tipos – os ordinais, neste caso – são objectos da própria teoria dos conjuntos ...

[37] Em 1963, Paul Cohen mostra que a negação da hipótese do contínuo é consistente com ZFC. Gödel, porém, já tinha admitido esta possibilidade em [25] e defendido que, a dar-se, ela não encerraria a questão do contínuo.

[38] Para o início duma recolha de informação sobre os mais recentes desenvolvimentos em teoria dos conjuntos aflorados acima, recomendo os artigos [9] e [44].

da lógica intuicionista. O projecto foi abandonado porque, pouco depois em 1945, Stephen Kleene publica os seus resultados sobre realizabilidade recursiva. O artigo [26] aparece finalmente em 1958 como uma contribuição para uma extensão do Programa de Hilbert da consistência da aritmética. O artigo é de leitura algo agreste porque tem uma introdução muito densa filosoficamente (em que muito pouco parece ter sido conseguido), não tem demonstrações e é formalmente um pouco impreciso. Contudo, teve um grande impacto na actividade fundacional dos anos seguintes ([1] tem informações sobre este assunto) e, hoje em dia, está no centro dum programa extremamente bem sucedido de extracção de informação computacional de demonstrações clássicas da análise (ver adiante).

Se é verdade que a metodologia finitista é construtiva, ela também enforma do elemento especificamente finitista que exige que as construções sejam construções *de* e *sobre* objectos "concretos" (paradigmaticamente, configurações combinatorias finitas de símbolos). Segundo Gödel, esta componente específica tem que ser abandonada se se quiser obter uma extensão bem sucedida do Programa de Hilbert. Duas extensões deste tipo estavam a ser consideradas desde os anos trinta: a adição da lógica intuicionista (ver o final da Secção 4) ou duma teoria construtiva de ordinais (devida a Gerhard Gentzen). Gödel propõe uma terceira via: a adição da noção (primitiva) de *funcional computável de tipo finito sobre os números naturais*. É, do ponto de vista matemático, uma novidade mas Gödel pretende ir mais longe. Nas páginas iniciais do artigo, Gödel tenta dolorosamente persuadir o leitor de que a nova noção não pressupõe – em termos de evidência epistemológica – a noção de demonstração intuicionista, ainda que acabe por afirmar que "ambos os conceitos [funcionais e demonstrações intuicionistas] são, dentro de certas fronteiras, como conceitos fundamentais, mutuamente substituíveis".[39]

Gödel dá uma interpretação, dita *funcional*, da teoria da aritmética intuicionista numa teoria (essencialmente) equacional T de termos de vários tipos. A teoria é muito semelhante a uma teoria finitista,[40] excepto pelo facto da linguagem não ter apenas variáveis sobre objectos "concretos" (números naturais) mas também sobre entidades abstractas, viz. funções de natu-

[39]Usei o adjectivo 'dolorosamente' porque mais tarde Gödel concorda em deixar traduzir o seu artigo para o inglês mas a versão acaba por sofrer inúmeras vicissitudes (por causa das hesitações intelectuais de Gödel), acabando por não ter a sua permissão para publicação. No seu espólio literário foram encontradas provas tipográficas corrigidas da versão inglesa, hoje disponíveis em [28].

[40]O especialista deve ter em mente a teoria da aritmética primitiva recursiva.

rais para naturais, funcionais de funções de naturais para naturais *para* os números naturais, etc. Há pois, para além dos termos do tipo básico dos números naturais, termos de tipo funcional.

Os termos de tipo funcional correspondem precisamente a funcionais computáveis de tipo finito. Um caso paradigmático é o seguinte. Se $P : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $h : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ são funções computáveis e $n \in \mathbb{N}$, então o funcional Q dado por $Q(P, h, n) = P^n(h)$ também é computável (onde P^n denota a operação P iterada n vezes). A interpretação de Gödel associa a cada fórmula $F(w)$ do cálculo de predicados da aritmética uma combinação proposicional $F_D(\overline{Z}, \overline{X}, w)$ de equações entre termos de T, onde $\overline{Z}$ e $\overline{X}$ são sequências finitas de variáveis cujo número e tipos dependem da estrutura de $F(w)$. Para definir a interpretação é conveniente e intuitivo associar às fórmulas $F(w)$ uma fórmula $F^D(w)$ da forma $F^D(w) = \exists \overline{Z} \forall \overline{X} F_D(\overline{Z}, \overline{X}, w)$. Caso $F(w)$ seja uma fórmula atómica então $F^D(w)$ e $F_D(w)$ são $F(w)$, i.e., $\overline{Z}$ e $\overline{X}$ são as sequências vazias. Nos restantes casos define-se a transformação de acordo com a tabela:

$(F \wedge G)^D$	$\exists \overline{Z}, \overline{U}\, \forall \overline{X}, \overline{V} (F_D(\overline{Z}, \overline{X}, w) \wedge G_D(\overline{U}, \overline{V}, s))$
$(\forall y F(y))^D$	$\exists \overline{Y}\, \forall y, \overline{X} F_D(\overline{Y}(y), \overline{X}, w, y)$
$(\exists y F(y))^D$	$\exists y, \overline{Z}\, \forall \overline{X} F_D(\overline{Z}, \overline{X}, w, y)$
$(F \to G)^D$	$\exists \overline{Y}, \overline{R} \forall \overline{Z}, \overline{V} (F_D(\overline{Z}, \overline{Y}(\overline{Z}, \overline{V}), w) \to G_D(\overline{R}(\overline{Z}), \overline{V}, s))$

onde se supõe que $G^D(s)$ é $\exists \overline{U} \forall \overline{V} G_D(\overline{U}, \overline{V}, s)$ (omiti os casos da disjunção e da negação). O teorema fundamental diz que se a fórmula fechada F se deduz na aritmética intuicionista então existem termos $\overline{t}$ da linguagem de T tais que $F_D(\overline{t}, \overline{X})$ se deduz em T. Observe-se que se F é a fórmula '$0 = 1$' então F_D é também '$0 = 1$'. Dado que a demonstração do teorema fundamental é construtiva, conclui-se que duma dedução de '$0 = 1$' na aritmética intuicionista se obtém uma dedução de '$0 = 1$' em T. Isto mostra a consistência da aritmética intuicionista em relação à teoria "equacional" T. Em virtude da interpretação negativa de Gödel-Gentzen (cf. final da Secção 4), obtém-se mesmo a consistência da aritmética *clássica* em relação a T.

Os termos cuja existência o teorema fundamental garante encerram, por assim dizer, informação computacional sobre a dedução do teorema F. Por exemplo, o termo cuja existência é garantida pelo teorema fundamental para uma dedução intuicionista de $\forall w \exists x F(w, x)$, onde F é uma fórmula sem quantificadores, é essencialmente um "programa" duma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfaz $F(n, f(n))$ para todo o número natural n. Este facto é especialmente relevante devido a uma propriedade importante da interpretação *Dialectica*:

desde que F seja uma fórmula sem quantificadores, as fórmulas $\exists x F(w,x)$ e $\neg\forall x \neg F(w,x)$ têm a mesma interpretação. Admita-se que se tem uma dedução de $\forall w \exists x F(w,x)$ na aritmética *clássica*. Ora, pela interpretação negativa, $\forall w \neg\forall x \neg F(w,x)$ é um teorema da aritmética intuicionista. Como esta fórmula tem a mesma interpretação *Dialectica* do que $\forall w \exists x F(w,x)$, é possível extrair um termo t (um "programa") que computa uma função f que satisfaz $F(n, f(n))$ para todo n. Esta é uma das propriedades da interpretação *Dialectica* que está na origem dum recente e bem sucedido método para extrair informação computacional de demonstrações *clássicas* da análise matemática (cf. [35]).

7 Notas finais

As publicações de Gödel em vida são essencialmente as que discutimos. Gödel também tem um artigo de fundo (de cariz filosófico) sobre a lógica matemática de Bertrand Russell, uma publicação duma palestra por ocasião da conferência sobre problemas da matemática no âmbito das comemorações do bicentenário da Universidade de Princeton em 1946 (apenas publicada em 1965 na colectânea *The Undecidable* [4]) e duas pequenas notas a propósito do trabalho dos lógicos Clifford Spector e Abraham Robinson.[41] Do ponto de vista matemático, destaca-se a palestra de Princeton pois nela Gödel define informalmente um novo modelo interno da teoria dos conjuntos: o modelo HOD dos conjuntos hereditariamente definidos por meio de ordinais.[42] Na sua última carta a von Neumman a 20 de Março de 1956 (cf. p. 373-377 de [30]), quando este já se encontrava muito doente, Gödel antecipa a formulação do problema $P = NP$. Wilfried Sieg comenta[43] que "face à mortalidade humana, Gödel preferiu levantar e discutir questões matemáticas eternas".

References

[1] J. Avigad e S. Feferman. Gödel's functional ("Dialectica") interpretation. In S. R. Buss, organizador, *Handbook of proof theory*, volume 137, pages 337–405. North Holland, Amsterdam, 1998.

[41] Esta última nota está traduzida para português na contribuição de A. J. Franco de Oliveira neste número do *Boletim*.

[42] Consulte-se [37] para terminologia e explicações.

[43] Na sua introdução à correspondência entre Gödel e von Neumann em [30].

[2] Paul Benacerraf e Hilary Putnam, organizadores. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Prentice-Hall, 1964. Segunda edição em 1983.

[3] Paul Bernays. Hilbert, David. In Paul Edwards, organizador, *The Encyclopedia of Philosophy*. Macmillan and the Free Press, 1967.

[4] Martin Davis, organizador. *The Undecidable*. Raven Press, New York, 1965.

[5] John Dawson Jr. Discussion of the foundations of mathematics. *History and Philosophy of Logic*, 5:111–129, 1984.

[6] John Dawson Jr. *Logical Dilemmas: the Life and Work of Kurt Gödel*. A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997.

[7] Burton Dreben e Warren Goldfarb. *The Decision Problem: Solvable Classes of Quantificational Formulas*. Addison-Wesley, 1979.

[8] Solomon Feferman. Kurt Gödel: conviction and caution. In S. G. Shanker, organizador, *Gödel's Theorem in Focus*, pages 96–114. Routledge, 1988. Primeiramente publicado em 1984 na revista *Philosophia Naturalis*.

[9] Fernando Ferreira. Teoria dos conjuntos: uma vista. *Boletim da Sociedade Portuguesa da Matemática*, 38:29–47, 1998. Versão corrigida em `http://www.ciul.ul.pt/~ferferr/vistacorr.pdf`.

[10] Kurt Gödel. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37:349–360, 1930. Traduzido para inglês com o título "On the completeness of the calculus of logic" em [27].

[11] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37:349–360, 1931. Traduzido para inglês com o título "On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I" em [27] e para português com o título "Acerca de proposições formalmente indecidíveis nos *Principia Mathematica* e sistemas relacionados" em [31].

[12] Kurt Gödel. Ein Spezialfall des Entscheidungsproblems der theoretischen Logik. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 2:27–28, 1932. Traduzido para inglês com o título “A special case of the decision problem for theoretical logic” em [27].

[13] Kurt Gödel. Eine Eigenschaft der Realisierungen des Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 3:20–21, 1932. Traduzido para inglês com o título “A property of the realizations of the propositional calculus” em [27].

[14] Kurt Gödel. Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 3:12–13, 1932. Traduzido para inglês com o título “On completeness and consistency” em [27].

[15] Kurt Gödel. Zum intuitionistishen Aussagenkalkül. *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien*, 69:65–66, 1932. Traduzido para inglês com o título “On the intuitionistic propositional calculus” em [27].

[16] Kurt Gödel. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4:34–38, 1932. Traduzido para inglês com o título “On intuitionistic arithmetic and number theory” em [27] e para português com o título “Acerca da aritmética e da teoria intuicionista dos números” em [31].

[17] Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4:39–40, 1933. Traduzido para inglês com o título “An interpretation of the intuitionistic propositional calculus” em [27].

[18] Kurt Gödel. Über die Länge von Beweisen. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 7:23–24, 1933. Traduzido para inglês com o título “On the length of proofs” em [27] e para português com o título “Acerca do comprimento das demonstrações” em [31].

[19] Kurt Gödel. Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4:9–10, 1933. Traduzido para inglês com o título “On independence proofs in the propositional calculus” em [27].

[20] Kurt Gödel. Zum Eitscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 40:433–443, 1933.

Traduzido para inglês com o título "On the decision problem for the functional calculus of logic" em [27].

[21] Kurt Gödel. Zum intuitionistishen Aussagenkalkül. *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, 4:40, 1933. Reimpressão de [15] com comentário adicional.

[22] Kurt Gödel. The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, 24:556–557, 1938. Também em [28].

[23] Kurt Gödel. Consistency proof for the generalized continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, 25:220–224, 1939. Também em [28].

[24] Kurt Gödel. *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, volume 3 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1940. Também em [28].

[25] Kurt Gödel. What is Cantor's continuum problem? *American Mathematical Monthly*, 54:515–525, 1947. Errata, 55, 151. Uma versão revista e alargada foi publicada em [2]. Esta versão encontra-se traduzida para português com o título "O que é o problema do contínuo de Cantor?" em [31]. Também publicado em [28].

[26] Kurt Gödel. Über eine bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes. *Dialectica*, 12:80–87, 1958. Traduzido para inglês com o título "On a hitherto unutilized extension of the finitary standpoint" em [28] e para português, neste volume do *Boletim*, com o título "Acerca duma extensão até agora não utilizada do ponto de vista finitista".

[27] Kurt Gödel. *Collected Works*, volume I. Organizado por Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 1986.

[28] Kurt Gödel. *Collected Works*, volume II. Organizado por Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 1990.

[29] Kurt Gödel. *Collected Works*, volume IV. Organizado por Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 2003.

[30] Kurt Gödel. *Collected Works*, volume V. Organizado por Solomon Feferman et al., Oxford University Press, 2003.

[31] Kurt Gödel et al. *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Organizado por Manuel Lourenço, Fundação Calouste Gulbenkian, 1979.

[32] Warren Goldfarb. The Gödel class with identity is unsolvable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 10:113–115, 1984.

[33] Giorgi Japaridze e Dick de Jongh. The logic of provability. In S. R. Buss, organizador, *Handbook of Proof Theory*, volume 137, pages 475–546. North-Holland, Amsterdam, 1998.

[34] Stephen Kleene. An addendum to "The work of Kürt Gödel". *The Journal of Symbolic Logic*, 41:613, 1978.

[35] U. Kohlenbach e P. Oliva. Proof mining: a systematic way of analysing proofs in mathematics. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 242:136–164, 2003.

[36] Georg Kreisel. Gödel's excursions into intuitionistic logic. In *Gödel Remembered*, pages 65–186. Bibliopolis, Nápoles, 1987.

[37] Kenneth Kunen. *Set Theory*. North-Holland, 1980.

[38] Andrzej Mostowski. *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic: an Exposition of the Theory of Kurt Gödel*. North-Holland, 1952.

[39] Pavel Pudlák. The lengths of proofs. In S. R. Buss, organizador, *Handbook of Proof Theory*, volume 137, pages 547–637. North-Holland, Amsterdam, 1998.

[40] Wolfgang Rautenberg. *A Concise Introduction to Mathematical Logic*. Springer-Verlag, 2005. Segunda edição.

[41] Thoralf Skolem. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In *Matematikerkongressen i Helsingfors, 4-7 Juli 1922*, pages 217–232. Akademiska Bokhandeln, Helsínquia, 1923. Traduzido para inglês em [42].

[42] Jean van Heijenoort, organizador. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Harvard University Press, 1967.

[43] Hao Wang. Some facts about Kurt Gödel. *The Journal of Symbolic Logic*, 46:653–659, 1981.

[44] W. Hugh Woodin. The continuum hypothesis, Part I. *Notices of the American Mathematical Society*, 41:567–576, 2001.