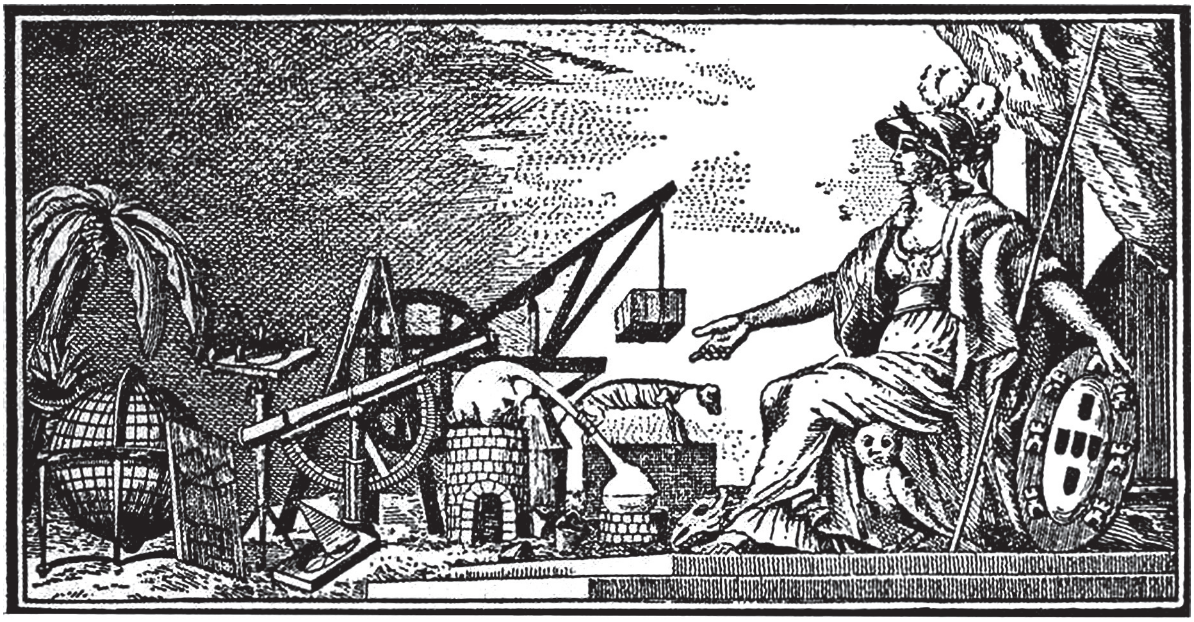

A lógica matemática como empreendimento fundamentador[1]

FERNANDO FERREIRA
(UNIVERSIDADE DE LISBOA)

À memória do meu pai
Um homem bom (1926-2018)

I

Pode dizer-se que a lógica matemática nasceu com Gottlob Frege no final do século XIX fruto de preocupações ostensivamente filosóficas.[2] Atualmente é uma disciplina madura, vasta e munida de técnicas próprias altamente sofisticadas. Quem consultar o *The Journal of Symbolic Logic*, prestigiada revista da área, depara-se com artigos de natureza muito especializada, a maior parte dos quais debruçando-se sobre

[1] O escrito que o leitor tem entre mãos baseia-se numa comunicação à Sessão da Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa que se realizou a 15 de janeiro de 2009. Nesse mesmo ano, a 13 de novembro, tive a oportunidade de apresentar uma versão da mesma comunicação no Philosophy Colloquium da Universidade de Stanford (E.U.A.). Voltei a apresentá-la, anos mais tarde, a 17 de junho de 2013, no Séminaire PHILMATH do Institut d'histoire et philosophie des sciences et des techniques (CNRS/Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne/École normale supérieure), no Seminário de Lógica Matemática da Universidade de Lisboa, a 4 de julho e, ainda no mesmo ano (a 23 de outubro), no âmbito das Conferências de História e Filosofia das Ciências da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Naturalmente, a presente versão incorporou reflexões baseadas nas reações de membros das audiências, a quem agradeço o interesse e comentários. Neste aspeto, quero mencionar especialmente Fernando Dias Agudo, Bruno Dinis, Augusto Franco de Oliveira, Solomon Feferman, António Fernandes, Gilda Ferreira, Michael Friedman, Rui Vilela Mendes, Marcello Mamino, Luís Pereira, Christopher Porter, Reinhard Kahle, Sergei Tupailo e Mark van Atten.

[2] Gottlob Frege (1848-1925) redesenhou para sempre a disciplina da lógica com a construção de um cálculo formal de quantificadores. Também esteve na origem do programa logicista dos fundamentos da matemática e é hoje tido como o percursor da tradição analítica em filosofia.

problemas internos à própria lógica. De quando em quando surgem resultados que se aplicam a outras áreas da matemática. Ao contrário do que se poderia supor, dada a génese da disciplina, poucos são os artigos que abordam (pelo menos explicitamente) os fundamentos da matemática. Apesar dos seus resultados indubitavelmente profundos e da normal especialização da matemática, é justo dizer que a lógica matemática é uma disciplina cuja interação com o resto da matemática não tem sido caracterizada pela facilidade. Em contraponto, certas realizações da lógica matemática penetraram na esfera da alta cultura e, hoje, uma familiaridade superficial com elas faz parte da bagagem intelectual do homem culto: são exemplos disso os teoremas da incompletude de Gödel ou a noção de máquina de Turing. As técnicas da lógica matemática têm influenciado tremendamente outras áreas do saber, tendo encontrado campo fértil de aplicação não só nas ciências da computação como também na linguística e, naturalmente, na filosofia. A grande maioiria dos lógicos em universidades trabalha, hoje em dia, em departamentos de informática.

II

Na viragem do século XIX para o século XX deu-se uma notável confluência de ideias que desencadeou uma transformação da matemática só comparável ao aparecimento da axiomática na Grécia Antiga e à descoberta do cálculo infinitesimal no século XVII. Bernard Bolzano, Karl Weierstrass, Richard Dedekind, Georg Cantor, Gottlob Frege *et al.* contribuíram importantemente para esta confluência. Em 1902, Bertrand Russell descobre o célebre paradoxo que tem o seu nome e espoleta uma crise nos fundamentos da matemática.[3] Será, porém, talvez mais correto dizer que a descoberta do paradoxo dramatizou um debate vigoroso em torno de uma divisão, já existente ao tempo, entre tradicionalistas – aqueles que eram relutantes à mudança – e modernos – adeptos da nova matemática, com as suas grandes abstrações e a aceitação sem pejo do infinito atual. A lógica vai, naturalmente, estar no centro deste debate. Henri Poincaré, um notável matemático de pendor tradicionalista, comentou da seguinte forma mordaz o aparecimento do paradoxo: "*La logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie!*".[4] Os modernos afanaram-se em consertar os paradoxos.

A crise dos fundamentos da matemática vai prolongar-se até ao início dos anos trinta. Os modernos, por intermédio de Ernst Zermelo e outros, criam a teoria axiomática dos conjuntos **ZFC**, debaixo da qual se pode desenvolver praticamente toda a matemática. Foi-nos legada uma visão unificadora em torno da noção de conjunto, assim como o instrumento muitíssimo potente que é a própria teoria dos conjuntos. No âmbito deste enquadramento podem estudar-se, sob a mesma linguagem, os vários campos da matemática (álgebra, análise, geometria) facilitando, por isso, relações e inter-fecundações. Nesse inteirim, a posição tradicionalista radicalizou-se com o programa intuicionista e construtivista do matemático holandês L. E. J. Brouwer. O intuicionismo rejeita a lei do terceiro excluído e, na sua fase madura, aceita mesmo princípios que a contradizem.

David Hilbert, um dos matemáticos mais respeitados da época, entra na contenda em força nos anos vinte com um programa arrojado de fundamentação da matemática. Hilbert é um moderno que

[3] Em 1902, nas vésperas da publicação do segundo volume do *Grundgesetze der Arithmetik* de Frege, Bertrand Russell deteta uma contradição no sistema logicista de Frege. A contradição advém do facto de Frege permitir passar irrestritamente de um conceito para a sua extensão. O paradoxo também foi descoberto independentemente por Zermelo.

[4] Este comentário de Poincaré aparece num escrito de 1906, traduzido para português por A. J. Franco de Oliveira com o título "Matemática e lógica III" (in *Filosofia da Matemática. Breve Antologia de Textos de Filosofia da Matemática de Henri Poincaré*, Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, 2010).

pretende fundamentar a nova matemática por meios tradicionais. No fundo, propunha uma síntese de posições opostas. O programa é bastante subtil mas, para efeitos deste escrito, basta mencionar dois aspectos. A componente técnica do programa concentrava-se num ponto fulcral: a demonstração da consistência dos sistemas axiomáticos da matemática abstrata e infinitista por meio de argumentos tradicionais – de facto, por meio de argumentos ainda mais exigentes epistemologicamente: argumentos finitistas. A nova disciplina da *teoria da demonstração* (ou *metamatemática*), inventada por Hilbert, tinha como objetivo obter essas demonstrações de consistência. O outro aspecto do programa de Hilbert que tem que ser aqui mencionado é o seguinte: o seu sucesso permitiria mostrar que o uso da matemática infinitista na demonstração de uma asserção finitista seria, em princípio, dispensável. Num certo sentido, o papel dos sistemas axiomáticos infinitistas resumir-se-ia à simplificação e organização dos raciocínios, pelo menos no que concerne a resultados finitistas. Hilbert depositava uma confiança ilimitada na sua proposta fundamentadora e, pode mesmo dizer-se, defendia-a com uma certa húbris. No Congresso Internacional de Matemática de Bolonha em 1928, desafia as melhores mentes matemáticas da nova geração a dedicar-se ao problema da consistência.[5]

III

O *dénouement* deu-se em 1931 com os célebres teoremas de incompletude de Kurt Gödel: o programa de Hilbert, tal como concebido originariamente, é impossível de levar a cabo. Deve ter-se em atenção que o trabalho fundamentador dos anos vinte do século passado era feito sob a liderança de alguns dos mais destacados matemáticos do tempo. Hilbert, como já se mencionou, era uma figura de primeira água (se não mesmo o matemático mais influente do seu tempo) e Brouwer era também um matemático muito respeitado. O matemático "normal", mesmo que não estivesse envolvido diretamente em questões de fundamentação, conhecia as disputas e seguia-as com interesse, senão mesmo com paixão. Com os teoremas de Gödel, abateu-se sobre a comunidade uma espécie de exaustão. Desde essa altura, as questões dos fundamentos deixaram de mobilizar a atenção da comunidade matemática como até então. Saunders MacLane, um conhecido matemático, disse nos anos oitenta que a filosofia da matemática tem estado adormecida desde 1931.[6] Não é tanto que a filosofia da matemática tenha deixada de ser cultivada. Ela continua a ser estudada nos departamentos de filosofia, onde possui um certo estatuto de prestígio. O problema é que as novas propostas têm atraído escassa atenção.

Ainda assim, a investigação em lógica matemática nunca se afastou completamente dos fundamentos. A partir dos anos trinta, a teoria da demonstração adotou bases epistemológicas mais gerais do que o finitismo, fossem elas de cariz construtivo ou – na sequência de trabalho seminal de Gerhard Gentzen nos finais dos ano trinta – hipóteses de boa-ordenação. A redução de sistemas clássicos a estas bases mais gerais tem sido objeto de atenção por parte dos lógicos e, depois de alguns sucessos inquestionáveis como a análise da predicatividade nos anos sessenta (Solomon Feferman, Kurt Schütte) e as primeiras análises de sistemas impredicativos (Gaisi Takeuti, William Howard, Wolfram Pohlers, Wilfried Buchholz), chega-se ao novo milénio com estudos cada vez mais exigentes tecnicamente e, nas palavras

[5] Esta comunicação encontra-se traduzida para português num apêndice de *Fundamentos da Geometria*, de David Hilbert. Edição revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira. Publicações Gradiva, 2003.
[6] In "Mathematical models: A sketch for the philosophy of mathematics", The American Mathematical Monthly, vol. 88(7), pp. 462-472, 1981.

de Michael Rathjen "a tender para o limite da tolerância humana". Per Martin-Löf, um mentor destes estudos fala, inclusivamente, dum segundo falhanço do programa de Hilbert.[7]

Há, porém, investigações de cariz fundamentador que não têm o carácter globalizador dos grandes sistemas tradicionais mas que, ainda assim, endereçam problemas problemas profundos e de interesse filosófico. No que se segue, vou discutir brevemente três exemplos. Os dois primeiros são relativamente recentes. O último reporta uma linha de investigação já com décadas de trabalho. Estas discussões não pretendem avançar teses. Têm como objetivo chamar a atenção para algumas perplexidades que me têm incomodado e que, na minha opinião, clamam por reflexão filosófica. O leitor observará certamente o carácter pontilhista das discussões.

IV

O programa da matemática reversa foi lançado em meados dos anos setenta por Harvey Friedman e, subsequentemente, desenvolvido por Stephen Simpson e os seus estudantes.[8] O objetivo do programa é encontrar, para cada teorema da matemática "usual", a axiomática mais fraca em que ele se pode deduzir. Trabalhando sobre uma certa teoria base, o que se mostra é que o teorema em causa permite deduzir os axiomas de que é consequência. Em termos pitorescos, mostra-se que o teorema implica os axiomas (o que explica a designação "reversa"). A restrição à matemática "usual" é uma delimitação operacional com vista a excluir áreas muito abstratas da matemática que emergiram com a teoria dos conjuntos: topologia geral, análise funcional abstrata, estruturas puramente algébricas de cardinalidade superior à numerável e, é claro, de modo a excluir a própria teoria dos conjuntos. Trata-se de uma restrição razoável numa primeira tentativa de classificar os teoremas da matemática em termos de "força dedutiva" e, como veremos, uma restrição que – num certo sentido – deixa muito pouco de fora.

Os estudos no âmbito do programa da matemática reversa têm vindo a revelar que grande parte da matemática, incluindo a matemática cientificamente aplicável, se pode desenvolver em sistemas relativamente fracos da aritmética de segunda-ordem – sistemas estes muito mais fracos do que a teoria dos conjuntos **ZFC**. Solomon Feferman tem defendido que apenas sistemas predicativos de segunda-ordem são necessários para as aplicações à ciência e as investigações em matemática reversa têm vindo a dar-lhe razão. O predicativismo é uma posição importante nos fundamentos de matemática, cuja tese central é a de que os conjuntos não têm uma existência autónoma, antes são dados através de definições (i.e., através de condições de pertença). Esta tese tem óbvio impacto na filosofia da matemática, em particular no que diz respeito aos chamados argumentos de indispensabilidade de Quine-Putnam.[9]

A matemática reversa tornou manifesto o facto de que a teoria dos conjuntos **ZFC** tem um poder dedutivo que largamente extravasa aquilo que tem sido necessário para desenvolver grande parte da matemática e, *a*

---

[7] Para a história recente da análise de sistemas impredicativos, consulte-se o soberbo "The proof-theory of classical and constructive inductive definitions. A forty-year saga, 1968-2008", de Solomon Feferman (in *Ways of Proof Theory*, pp. 7-30, organizado por R. Schindler, Ontos Verlag, Frankfurt, 2010). A citação de Rathjen encontra-se no seu "The realm of ordinal analysis", em *Sets and Proofs*, organizado por S. B. Cooper e J. K. Truss, Cambridge University Press, 1999. Martin-Löf menciona um segundo falhanço do programa de Hilbert em "The Hilbert-Brouwer controversy resolved?", publicado no volume *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007)*, organizado por M. van Atten et al., Birkhäuser Verlag, 2008.

[8] A referência canónica para este programa é o livro de Simpson intitulado *Subsystems of Second-order Arithmetic* (Springer-Verlag, 1998).

[9] Para a posição de Feferman sobre os argumentos de indispensabilidade, veja-se o seu artigo "Why a little bit goes a long way: logical foundations of scientifically applicable mathematics" (este artigo pode encontrar-se na colectânea *In the Light of Logic*, Oxford University Press, 1998).

fortiori, da matemática cientificamente aplicável. O poder dedutivo da teoria dos conjuntos e dos seus postulados transfinitos aparentemente não têm efeito no que diz respeito aos problemas "naturais" da matemática. Estamos perante uma situação enigmática que clama por explicação. Friedman é de opinião que a matemática atual não está a conseguir utilizar todo o poder dedutivo que tem à sua disposição. É certo que o fenómeno da incompletude de Gödel permite obter asserções matemáticas, logicamente simples, cuja verdade apenas se pode estabelecer em sistemas muito fortes e, desde o início dos anos setenta – fruto do trabalho de Martin Davis, Julia Robinson, Hilary Putnam e Yuri Matiyasevich – sabe-se que a impossibilidade de solução de certas equações diofantinas apenas se pode demonstrar em sistemas fortes. Porém, as equações diofantinas em causa são muito artificiais e não surgem (pelo menos ainda) naturalmente no trabalho do especialista em teoria dos números, sendo por estes vistas como meras curiosidades lógicas. Nos últimos anos, Friedman tem tentado descobrir asserções matemáticas "naturais" que necessitem de axiomas muito fortes para se demonstrarem mas parece-nos ser justo dizer que o impacto das suas investigações tem sido limitado.

Apesar de todo o seu sucesso, a matemática reversa apenas dá uma visão parcial da matemática corrente. A teoria base da matemática reversa está já construída sobre uma teoria da aritmética, sujeita ao fenómeno gödeliano da incompletude. Ora, há contextos da matemática em que a aritmética está ausente. Por exemplo, a geometria euclidiana é uma teoria eminentemente não aritmética. Um resultado de Alfred Tarski do final dos anos quarenta mostra que a geometria euclidiana é um subsistema de uma teoria completa e que, para além disso, se pode decidir algoritmicamente se uma asserção geométrica é verdadeira ou falsa.[10] Pode mesmo dar-se uma resposta à seguinte questão, quase esquecida, de Poincaré: "Ninguém duvida que a geometria euclidiana está isenta de contradição. De onde é que vem esta certeza e até onde é ela justificada?" Hilbert e Paul Bernays esboçaram uma demonstração finitista da consistência da geometria euclidiana nos anos trinta e, modernamente, existem demonstrações alternativas de Friedman e de mim próprio. Ao contrário da aritmética, a geometria euclidiana tem uma demonstração finitista de consistência.[11]

Os resultados de Tarski estão na raíz do desenvolvimento de uma área da teoria dos modelos (um ramo da lógica matemática) em que se podem desenvolver noções tipicamente geométricas como independência, dimensão, homologia, etc. O fenómeno de Gödel está ausente destas teorias e é popular designá-las por "teorias mansas". O caso das teorias o-minimais é um exemplo notável, com generalizações de grande alcance na geometria algébrica real. As teorias mansas têm vindo a forjar conexões à geometria algébrica (real e complexa), à teoria dos módulos, à teoria algébrica das equações diferenciais, etc. Estas teorias ocupam um lugar na geografia da matemática onde a componente gödeliana ou "selvagem" está ausente. Porém, as teorias mansas, por si só, são invisíveis à matemática reversa porque esta já se eleva sobre uma teoria base gödeliana, por mais fraca que seja.

---

[10] Estamos a referir-nos à geometria euclidiana elementar, i.e., nas palavras de Alfred Tarski à "parte da geometria euclidiana que pode ser formulada e estabelecida sem a ajuda da teoria dos conjuntos" (veja-se o artigo de Tarski "What is elementary geometry?" em *The Axiomatic Method with a Special Reference to Geometry and Physics*, organizado por L. Henkin, P. Suppes e A. Tarski, North-Holland, pp. 16-29). O sistema de Tarski permite, ainda assim, raciocínios que vão para além do que é tradicional admitir na geometria dos antigos Gregos (nomeadamente certos princípios de continuidade elementar). Se apenas admitirmos o postulado de continuidade círculo-círculo (o que talvez corresponda à geometria euclidiana tradicional), este sistema geométrico é indecidível (este facto, devido a Martin Ziegler, não é muito conhecido). Para estes e outros assuntos metamatemáticos da geometria euclidiana, pode consultar-se a secção 3 do artigo de Marvin J. Greenberg "Old and new results in the foundations of elementary plane Euclidean and Non-Euclidean geometries", American Mathematical Monthly, vol. 117(3), pp. 198-219, 2010.

[11] A pergunta de Poincaré aparece num escrito de 1891 intitulado "As geometrias não-euclidianas". Este ensaio encontra-se traduzido para português por A. J. Franco de Oliveira, *op. cit.* A minha demonstração de consistência baseia-se na interpretação duma teoria que contém a geometria euclidiana elementar numa teoria cuja consistência se pode demonstrar finitisticamente (veja-se a secção 5 de "Groundwork for weak analysis", The Journal of Symbolic Logic, vol. 67(2), pp. 557-578, 2002).

Num recente escrito, o lógico e matemático Angus Macintyre defende que o papel das teorias mansas em matemática não só é importante, como está mesmo bastante generalizado. Escreve, também, que em muita da matemática moderna a componente da teoria dos conjuntos é de interesse menor e que as noções realmente importantes são de natureza geométrica ou categorial (i.e., referentes à teoria das categorias).[12] É interessante observar que, duas décadas antes, o famoso matemático Alexander Grothendieck já tinha dito que (por vezes) as noções da teoria dos conjuntos podem dificultar a procura e o estudo dos conceitos matemáticos adequados. Sobre a topologia, Grothendieck escreveu: "Este carácter inadequado dos fundamentos da topologia manifesta-se desde o início por "falsos problemas" (pelo menos do ponto de vista da intuição topológica das formas) como o da "invariância do domínio", ainda que este problema tenha levado Brouwer a introduzir novas ideias geométricas importantes. Ainda agora, como nos tempos heróicos em que víamos pela primeira vez e com inquietude curvas a encher alegremente quadrados e cubos, quando nos propomos fazer topologia geométrica no contexto técnico dos espaços topológicos, somos confrontados em cada passo com dificuldades parasitas relacionadas com os fenómenos selvagens".[13] Destas discussões resulta que talvez se possa pôr hoje de pé um caso pela antiga distinção, entretanto obscurecida pela teoria dos conjuntos, entre raciocínio aritmético e raciocínio geométrico. Essa distinção aparece atualmente na forma binomial "selvagem/manso" e Anand Pillay, um especialista em teoria dos modelos, afirma mesmo que dar sentido à fronteira desta distinção é um assunto da matemática contemporânea.[14] A teoria dos modelos moderna está a tornar visível aspectos relevantes da paisagem matemática. Está a tentar encontrar a linguagem certa, os conceitos certos e o nível de generalidade certo para estudar e compreender partes centrais da matemática. Há que dar tempo ao desenvolvimento relativamente recente (desde meados dos anos oitenta) destas ideias da teoria dos modelos, mas afigura-se-nos que a lógica matemática – por intermédio destes estudos da teoria dos modelos – pode ajudar a dar uma visão mais fidedigna da paisagem matemática.

Quero terminar esta discussão com um fenómeno que me incomoda. Diz respeito aos pontos de encontro entre o manso e o selvagem. A teoria dos números é uma das disciplinas mais prestigiados da matemática (segundo Gauss, a teoria dos números é a "rainha da matemática"). Tem uma história longa desde a antiguidade, com Pitágoras, Euclides, Diofanto, etc e tem sido estudada por grandes matemáticos como Fermat, Euler, Gauss, Dirichlet, Riemann, Kummer, Chebyshev, Kronecker, Dedekind, Hadamard, de la Valée-Poussin, Hardy, Weil, Selberg, Roth, Baker, Deligne, Faltings, Wiles, Green, Tao e outros. Com os trabalhos de Grothendieck nos anos sessenta, a geometria algébrica adota a linguagem muito abstrata da teoria das categorias e, a seu tempo, esta linguagem tornou-se praticamente indispensável noutras disciplinas centrais da matemática, nomeadamente na teoria dos números. Ora, a teoria das categorias, quando formalizada em teoria dos conjuntos, parece requerer a postulação de cardinais inacessíveis (requer, portanto, níveis transfinitos muito altos). A demonstração, em meados dos anos noventa, do último teorema de Fermat (dificilmente um enunciado matemático pode ser mais simples e concreto) por Andrew Wiles utiliza esta linguagem extremamente abstrata. A opinião prevalecente

[12] Angus Macintyre, "Geometrical and set-theoretic aspects and prospects", The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 9(2), pp. 197-212, 2003.
[13] In "Esquisse d'un programme" (1984), publicado em 1997 no volume *Geometric Galois Actions I: Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme* (organizado por Leila Schneps e Pierre Lochak), London Mathematical Society Lecture Note Series 242, Cambridge University Press.
[14] Anand Pillay *et al.* in "The prospects for mathematical logic in the twenty-first century", The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 7(2), pp. 169-196, 2001. O escrito de Pillay, intitulado "Model theory", é uma das contribuições de uma discussão sobre o futuro da Lógica Matemática: a contribuição de Pillay aparece entre as páginas 182 e 189.

entre os lógicos é a de que as demonstrações destas asserções concretas e naturais da aritmética não necessitam do aparato categorial que as acompanha e, em particular, não necessitam da postulação da existência de grandes cardinais.[15] Seria, de facto, muito surpreendente se não fosse assim. Por exemplo, a convicção – já anteriormente mencionada – de que a matemática "usual" se pode desenvolver em sistemas relativamente fracos seria dramaticamente posta em causa. Se bem que ninguém tenha ainda posto a questão nestes termos, é como se se acreditasse numa espécie de programa de Hilbert para a teoria das categorias: as categorias são muito convenientes para organizar os conceitos matemáticos e facilitar o trabalho, mas não são realmente necessárias para a demonstração de certos teoremas (estes podem demonstrar-se em sistemas relativamente fracos). Partilho a opinião dos meus colegas lógicos. Não obstante, penso que sem uma compreensão razoável da situação geral esta convicção não passa de um pré-julgamento do assunto – ainda que eventualmente apoiada em análises pontuais.

Em 2011, num encontro em Oberwolfach (Alemanha) sobre lógica matemática, Macintyre esboça – numa série de três lições – um argumento em que tenta mostrar que a demonstração de Wiles pode ser modificada de modo a poder ser formalizada num sistema predicativo da aritmética (a aritmética de Peano).[16] O esboço foi muito genérico e exigente, não se podendo dizer que a situação tenha ficado totalmente esclarecida. A estratégia de Macintyre tenta evitar o uso da teoria das categorias apoiando-se no chamado teorema da modularidade para curvas elípticas. Defende-se que tal teorema se pode formular na linguagem da aritmética e que se demonstra na aritmética de Peano. Seja como for, o trabalho de Macintyre é certamente um primeiro passo no sentido de abordar alguns pontos cegos da nossa compreensão lógica da matemática. Mesmo que seja ultimamente bem sucedida, a estratégia de Macintyre apenas se aplica a uma demonstração particular da teoria dos números (por mais representativa que esta seja do trabalho moderno) e não aborda o tema geral da remoção sistemática (ou aritmetização) da maquinaria da teoria das categorias, hoje tão ubíqua nos estudos modernos. Há uma clara dissonância entre o suposto papel organizacional da teoria das categorias que, como tal, não deve introduzir novos fenómenos selvagens e o facto da teoria parecer requerer a postulação de cardinais inacessíveis – o exemplo mais acabado de uma noção "selvagem". O papel da teoria das categorias nas áreas tradicionais da matemática não é bem compreendido pela lógica e está a ser pouco investigado.

A teoria dos números e, em particular, os estudos que levaram à solução do último teorema de Fermat fazem hoje parte do núcleo central da matemática "usual". A matemática reversa não tem endereçado estes problemas, nem tem abordado de um modo minimamente sistemático o problema da formalização destes resultados "usuais" em sistemas aritméticos de segunda-ordem. Está alheada deles e ainda muito centrada na matemática do final do século XIX, princípio do século passado. Em 2009, num encontro de matemática reversa em Chicago, levantei a questão deste alheamento.[17] A resposta que obtive foi, essencialmente, a de que ainda não chegou a altura para abordar estes assuntos por causa da grande complexidade das matérias envolvidas. Se bem que compreenda esta resposta, as perplexidades continuam.

[15] Uma demonstração do teorema de Fermat num sistema puramento aritmético seria mais simples apenas do ponto de vista de não usar noções matemáticas abstratas que extravasam aquelas que se podem exprimir na linguagem da aritmética. Do ponto de vista do comprimento e opacidade, a demonstração seria certamente muito mais complexa. Para quem esteja familiarizado com linguagens da programação, seria como se se programasse numa linguagem máquina ao invés de numa linguagem de alto nível.

[16] O encontro *Mathematical Logic: Proof Theory, Constructive Mathematics* teve lugar no Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach entre 6 e 12 de Novembro de 2011.

[17] O *Workshop in Reverse Mathematics* teve lugar na Universidade de Chicago entre 5 e 8 de Novembro de 2009.

V

Terence Tao, medalhista Fields de 2006, escreveu em Maio de 2007 uma entrada no seu blogue intitulada "Soft analysis, hard analysis, and the finite convergence principle".[18] Nesta entrada, Tao fala informalmente de uma distinção entre princípios "*soft*" e princípios "*hard*" em análise matemática. Tipicamente, os primeiros são abstratos, infinitistas e sem conteúdo computacional. Estão ligados a conceitos como espaços de Hilbert, medida de Lebesgue, álgebras-sigma, etc e às suas propriedades qualitativas (p. ex., convergência, completude, compacidade, integrabilidade). São conceitos extremamente úteis e estão muito disseminados na análise matemática moderna e, dado o treino habitual do matemático, são relativamente fáceis de enunciar e utilizar. A análise "*hard*" está, por outro lado, associada a propriedades quantitativas e às computações a elas associadas. Tao menciona, como exemplos, as contagens finitas, a medida explícita de conjuntos limitados, os valores de integrais convergentes, etc. Grosseiramente, talvez se possa identificar a análise "*hard*" como a maneira de fazer análise até ao século XIX e a análise "*soft*" como o modo de proceder que veio a dominar a matemática do século XX.

Ainda que por vezes haja forma de relacionar os resultados da análise "*hard*" e da análise "*soft*" (por meio de "princípios de correspondência" ou "princípios de compacidade"), Tao expressou também a seguinte convicção, e cito: "a relação entre os dois tipos de análise é muito mais próxima do que apenas isto; em muitos casos, a análise qualitativa pode ser vista como uma abstração conveniente da análise quantitativa, na qual as dependências exatas entre as várias quantidades finitas estão eficientemente ocultadas por uma notação infinitária". É uma opinião arrojada e interessante. Tao defende que os resultados de análise abstrata podem esconder informação computacional profunda e que vale a pena tentar tornar explícita esta informação. Chama a este processo de *finitização* dos resultados qualitativos.

No seu blogue, Tao discute a finitização do seguinte princípio "*soft*", assaz conhecido dos estudantes universitários de análise matemática: toda a sucessão crescente e limitada de números reais é convergente. Chama a esta propriedade de *princípio da convergência infinita* e propõe-se encontrar a sua versão finitista. Depois de descrever várias tentativas falhadas e discutir as razões das suas insuficiências, Tao mostra-se satisfeito com um princípio a que chama princípio da convergência finita. O princípio (normalizado para o intervalo [0,1]) enuncia-se assim:

Princípio da convergência finita. Dados $\varepsilon > 0$, $F: N \to N$ uma função e dados valores reais $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_r \leq 1$, com r suficientemente grande, dependendo de F e ε, então existe um número natural k tal que $1 \leq k \leq k + F(k) \leq r$ e tal que, para todos os números naturais n, m com $k \leq n, m \leq k + F(k)$, se tem $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$.

É ilustrativo citar aqui a descrição que Tao faz deste princípio: "[o princípio] afirma que toda a sequência monótona, limitada, de comprimento finito, mas suficientemente grande, contém valores de meta-estabilidade de qualidade arbitrariamente grande com um erro pré-especificado de tolerância ε, na qual a duração F(k) da meta-estabilidade ultrapassa o seu começo k por uma função arbitrária F também ela especificada de início". A formulação "*hard*" do princípio é significativamente mais verborreita do que

[18] Ver http://terrytao.wordpress.com/2007/05/23/soft-analysis-hard-analysis-and-the-finite-convergence-principle/. O blogue foi publicado posteriormente em *Structure and Randomness: Pages from Year One of a Mathematical Blog*, pp. 17-29. American Mathematical Society, 2008.

a versão "*soft*", como observa. Tao também parece querer dar a entender que esta é uma das razões por que a matemática abstrata é importante: é mais simples e memorável, ainda que à custa de ocultar informação quantitativa. De seguida, formula uma versão do princípio da convergência infinita no contexto dos espaços de Hilbert e, numa aplicação impressionante, mostra que o lema da regularidade de Szemerédi – um resultado profundo da teoria combinatória dos grafos finitos – é consequência do princípio finitista correspondente. O ponto é que, segundo Tao, os princípios "*soft*" da análise matemática podem encerrar informação combinatorial (ou computacional) altamente não trivial.

O blogue de Tao atraiu de imediato a atenção dos especialistas em teoria da demonstração. Henry Towsner, num comentário do blogue, afirma que o princípio da convergência finita pode ser visto como uma aplicação de uma interpretação (dita "funcional") de carácter lógico, descoberta por Gödel em 1958 e que ficou conhecida por interpretação *dialectica*.[19] Tao, de facto, redescobriu um caso particular da interpretação de Gödel e, na sua terminologia colorida, diz ter obtido um resultado de meta-estabilidade. O artigo de Gödel foi objeto de investigação intensa nos anos sessenta e princípios dos anos setenta mas, na década seguinte, deixou de despertar grande interesse. A partir da década de noventa, Feferman e Ulrich Kohlenbach trouxeram novamente a interpretação *dialectica* para a atenção da comunidade lógica. Em particular, Kohlenbach combinou a interpretação de Gödel com uma noção de majoração e, com esta elaboração (denominada de interpretação funcional monótona), foi capaz de analisar certos resultados da matemática "*soft*" e dar-lhes um conteúdo computacional explícito (p. ex., o número r do princípio do convergência finita pode ser explicitamente calculado a partir de ε e F).[20] Estas aplicações podem ser descritas como a extração, guiada logicamente, de informação computacional a partir de certas demonstrações da matemática. Este método de analisar demonstrações é hoje conhecido por *proof mining*. Tem encontrado aplicações à teoria da aproximação, à teoria dos pontos fixos, à teoria ergódica e, muito recentemente, à teoria dos semi-grupos não lineares. Muitas destas aplicações encontram como fórum de publicação revistas não especializadas em lógica, notavelmente revistas de análise matemática aplicada.

Uma parte significativa das análises computacionais feitas pelo *proof mining* tornou-se possível porque não se pretende – ao contrário da interpretação original de Gödel – obter testemunhas de asserções existenciais mas apenas majorantes para essas testemunhas. Este relaxamento tem uma dupla vantagem. Permite a análise de demonstrações que usam certos princípios não construtivos (tipicamente princípios de compacidade) e abre a possibilidade de obter informação computacional independente de certos valores dos parâmetros (resultados de uniformização). Por exemplo, no princípio da convergência finita enunciado há pouco, o valor r apenas depende de ε e F e não dos valores x_1, x_2, x_3,... Do ponto de vista matemático, esta independência explica-se pelo facto do conjunto de todas as sucessões de números reais do intervalo fechado [0,1] formar (para a convergência simples) um espaço compacto. De facto, é por meio deste resultado de compacidade que Tao argumenta o princípio da convergência finita. Do ponto

[19] A interpretação de Gödel foi publicada em 1958 na revista suiça *dialectica* sob o título "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunkte". Este artigo está traduzido para português com a título "Acerca de uma extensão até agora não utilizada do ponto de vista finitista" em *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (segunda edição) de Kurt Gödel et al., organização e tradução de Manuel Lourenço, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2009. O escrito de Gödel é uma tentativa de estender o ponto de vista finitista de modo a justificar a consistência da aritmética de Peano. Obtém-se uma extensão da teoria da aritmética recursiva primitiva (usualmente identificada com a teoria do raciocínio finitista) que inclue certas entidades abstratas: os funcionais computáveis de tipo finito (é, precisamente, na inclusão destas entidades abstratas que se vai além do ponto de vista de Hilbert, o qual apenas permite raciocínios finitistas sobre símbolos "concretos").

[20] Ver *Applied Proof Theory: Proof Interpretations and their Use in Mathematics* de Ulrich Kohlenbach, Springer, Berlin, 2008.

de vista da interpretação funcional monótona, a uniformização obtém-se através de um simples argumento de majoração (estes argumentos estão intimamente ligados aos sistemas formais de enquadramento da interpretação funcional). A recente interpretação funcional limitada de Paulo Oliva e de mim próprio já incorpora automaticamente (e de forma sistemática) os fenómenos de uniformidade que subjazem a estas considerações em torno de majorações.[21]

A interpretação *dialectica* e suas modificações providenciam um método para efetuar a finitização de teoremas "*soft*". A teoria destas interpretações mostra que, em princípio, é possível obter análises finitárias de teoremas demonstrados em sistemas axiomáticos relativamente fortes. Já em 1962, Clifford Spector abrira caminho para isso com a extensão da interpretação de Gödel a toda a aritmética de segunda-ordem (que, como se discutiu na secção anterior, cobre uma parte extensa e importante da matemática). Um ponto intrigante, levantado pelas novas análises, é o de que as condições de majoração não têm que estar associadas necessariamente a propriedades de compacidade. Isto significa que, por vezes, é possível obter uniformidades mesmo na ausência de compacidade. No entanto, de modo a efetuar estas análises, é necessário trabalhar com sistemas formais concebidos *à la carte*, em vez de trabalhar dentro de um só sistema globalizador (parece que, para analisar eficientemente certos resultados através das interpretações funcionais, é mister trabalhar com sistemas formais que deixem de lado material irrelevante, nomeadamente cujo conteúdo está relacionado com a teoria dos conjuntos). É também possível que existam "princípios de correspondência" baseados em considerações sobre majoração (e não de compacidade) que têm escapado ao matemático. Este facto pode estar relacionado com outro ponto intrigante, nomeadamente o facto do axioma da extensionalidade constituir um impedimento à extração de informação computacional. O princípio da extensionalidade não tem uma interpretação *dialectica* (nem monótona) e é mesmo refutado pela interpretação funcional limitada. Basta deitar um olhar atento para o seguinte caso particular do princípio da extensionalidade (formulado na aritmética de tipos finitos) para ver por que razão isso é assim:

$$\forall\Phi\forall f,g\in N^N\ [\forall n\in N(f(n)=g(n)) \Rightarrow (\Phi(f)=0 \Leftrightarrow \Phi(g)=0)].$$

(Aqui Φ é uma função que vai de N^N para N. O princípio diz que se duas funções f e g são extensionalmente as mesmas, então gozam das mesmas propriedades.) Com efeito, a quantificação universal "$\forall n\in N$" torna-se numa quantificação existencial quando o princípio acima é posto em forma prenexa (pois está no antecedente de uma implicação). É, num sentido preciso, impossível majorar n em termos (de majorantes) dos dados Φ, f e g.

O trabalho em *proof mining* e a teoria que o possibilita têm, na minha opinião, uma importância fundamentadora clara. Investigam as relações entre o finito e o infinito, entre o abstrato e o computacional. Tratam-se, evidentemente, de questões fundamentais. Para além disso, levantam questões intrigantes sobre a necessidade de sistemas formais *à la carte* e, também, sobre o papel do axioma da extensionalidade. Como é sabido, este axioma é uma das pedras de toque da teoria dos conjuntos. Mas será ele indispensável à matemática "usual"? Como foi referido na secção anterior, grande parte da matemática pode ser formalizada na aritmética de segunda-ordem. Ora, nunca é demais salientar que em aritmética

[21] Fernando Ferreira e Paulo Oliva, "Bounded functional interpretation", Annals of Pure and Applied Logic, vol.135, pp. 73-112, 2005. Mais acessível é o meu artigo "A most artistic package of a jumble of ideas", dialectica, vol. 62, pp. 205-222, 2008.

de segunda-ordem o axioma da extensionalidade nem sequer se pode formular convenientemente (observe-se que o funcional Φ mencionado atrás é de terceira-ordem).

VI

Antes de descrever o terceiro exemplo de cariz fundamentador, gostaria de tentar afastar uma certa perceção que os dois primeiros exemplos podem, à primeira vista, sugerir. Trata-se da perceção de que estes exemplos constituem uma crítica à teoria dos conjuntos. Ora, a teoria dos conjuntos desempenha um papel fundamentador central em matemática pois providencia o padrão contra o qual se avalia se os entes matemáticos existem ou não. Este padrão universal é relativamente recente em matemática e advém da pasmosa descoberta (empírica) de que as construções matemáticas se podem formalizar dentro da teoria dos conjuntos. Este *modus operandi* de construir entes matemáticos é a prática corrente da matemática atual. Devemos comparar esta situação com certos episódios da história da matemática. Um meu exemplo favorito é a introdução dos números complexos pelos matemáticos italianos renascentistas. Ao tempo, a postulação dum número imaginário **i** cujo quadrado é -1 e que opera aritmeticamente como os reais, tornou possível a resolução de equações algébricas do terceiro e quarto grau, inclusivamente no sentido de levar à descoberta de soluções reais através de cálculos envolvendo números imaginários. Porém, esta abordagem puramente operacional levantava várias questões: O que é que garante que a introdução de números imaginários não leva a resultados absurdos? O que é realmente um número cujo quandrado é -1? Hoje em dia estas questões são vistas como pueris e ultrapassadas pois, por exemplo, podemos ver os números complexos como pares de números reais munidos de operações convenientes. Basta, neste caso, estar na posse de noções muito simples da teoria dos conjuntos (p. ex., o produto cartesiano) para "representar" os números complexos.

Na matemática atual, as construções dos entes matemáticos, por vezes de grande delicadeza e elaboração, são feitas no âmbito da teoria dos conjuntos e, se bem sucedidas, são automaticamente aceites pelos matemáticos. Este é talvez o papel mais importante da teoria dos conjuntos para a prática matemática atual. A teoria dos conjuntos é, por assim dizer, o tribunal último para avaliar da existência, ou não, dos entes matemáticos. Neste papel, a teoria dos conjuntos não tem concorrência à altura, o que explica a sua centralidade na matemática.

VII

A estrutura aritmética $\langle N, 0, 1, +, \cdot \rangle$ tem uma axiomatização que se pode considerar "canónica": os axiomas de Peano $\mathbf{PA}_1$. Claro que o fenómeno de Gödel se aplica e, por conseguinte, esta axiomatização é incompleta. Mas talvez se possa ver a situação do seguinte ponto de vista: pode ser que a incompletude advenha do facto da linguagem formal da aritmética de Peano não ser suficientemente expressiva para enunciar todas as formas possíveis de indução matemática. Sabemos quais são os axiomas da aritmética, só que a totalidade das propriedades dos números naturais não se deixa capturar por nenhuma linguagem formal. Consequentemente, as formas de indução matemática também não. Dado que $\mathbf{PA}_1$ contém todas as formas de indução exprimíveis na linguagem formal da aritmética, de certa forma pode dizer-se que $\mathbf{PA}_1$ faz o melhor possível debaixo dos constrangimentos linguísticos formais.

Pode agora colocar-se a questão de saber se também existe uma axiomatização "canónica" para a estrutura de segunda-ordem $\langle N, P(N), 0, 1, +, \cdot, \in \rangle$, onde P(N) é o conjunto de todas os subconjuntos de N. Esta axiomatização deve conter os axiomas de Peano, incluindo as formas de indução que podem ser expressos na linguagem de segunda-ordem (que contém variáveis não só para elementos de N mas também para subconjuntos de N), assim como axiomas de compreensão (formação de conjuntos de números naturais) para as condições exprimíveis na nova linguagem. Estes axiomas formam um sistema designado por $\mathbf{PA_2}$. No entanto, esta axiomatização não se pode considerar "canónica" na medida em que ainda faltam (pelo menos) formas do axioma da escolha formalizáveis na linguagem da aritmética de segunda-ordem.[22]

No início deste século foi proposta uma axiomática "canónica" para a estrutura de segunda-ordem.[23] Trata-se de juntar a $\mathbf{PA_2}$ o denominado axioma da determinação projetiva **PD**. Informalmente, defende-se a seguinte analogia:

$$\frac{\mathbf{PA_1}}{\langle N, 0, 1, +, \cdot \rangle} \sim \frac{\mathbf{PA_2} + \mathbf{PD}}{\langle N, P(N), 0, 1, +, \cdot, \in \rangle}$$

Denote-se por 2^N o conjunto de todas as sucessões de valores boolianos 0 ou 1. A cada subconjunto Ω de 2^N associa-se um jogo J_Ω. Há dois jogadores, I e II, que jogam, começando com I, alternadamente valores boolianos um número infinito de vezes:

$$\begin{array}{llllll} \mathrm{I} & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \ldots \\ \mathrm{II} & b_0 & b_1 & \ldots & b_n & \ldots \end{array}$$

Diz-se que o jogador I ganha o jogo J_Ω se a sucessão intercalada de jogadas $\langle a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,\ldots\rangle$ está em Ω. Caso contrário, ganha II. Uma estratégia E para o jogador II (digamos) é uma função que a cada sequência binária de comprimento ímpar faz corresponder um valor booliano. O jogo acima desenrola-se de acordo com a estratégia E se, para todo o número natural n, $E(a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots,a_n) = b_n$. Intuitivamente, E diz que o jogador II deve jogar b_n se, até essa altura, a sequência de jogadas tiver sido $\langle a_0,b_0,a_1,b_1,\ldots,a_n\rangle$. A estratégia E diz-se vencedora se os jogos que a sigam são necessariamente ganhos por II. Um subconjunto Ω de 2^N diz-se *determinado* se um dos jogadores tiver uma estratégia vencedora para o jogo J_Ω.

O conjunto 2^N tem uma topologia natural que dá origem ao chamado espaço de Cantor. Pode demonstrar-se facilmente que todo o conjunto aberto do espaço de Cantor é determinado. Em 1975, num *tour de force* técnico, Donald Martin mostra que todo o conjunto boreliano é determinado. Porém, nem todo o subconjunto do espaço de Cantor é determinado, pois isso contradiz o axioma da escolha. Um subconjunto do espaço de Cantor diz-se *projetivo* se se obtém a partir dos conjuntos borelianos por meio de um número finito de aplicações de duas operações: tomada de imagem contínua (por meio de funções contínuas do espaço de Cantor para o espaço de Cantor) e complementação.[24]

[22] A distinção, aqui aflorada, entre as axiomáticas $\mathbf{PA_1}$ e $\mathbf{PA_2}$ (considerando a primeira "canónica" e a segunda não) é especulativa. Este não é o sítio próprio para tentar argumentar pela distinção. Podemos, porém, avançar com dois argumentos preliminares. O primeiro diz respeito ao facto da aritmética de segunda-ordem falar sobre conjuntos e que, em $\mathbf{PA_2}$, a existência desses conjuntos é apenas garantida pelos axiomas de compreensão, circunscrevendo-se $\mathbf{PA_2}$ (portanto) a uma forma de *definibilismo*. Note-se que na aritmética de primeira-ordem estas questões não se põem (pelo menos diretamente), pois a aritmética de primeira-ordem não tem variáveis de conjunto. O segundo argumento apoia-se no fenómeno de Gödel: a incompletude de $\mathbf{PA_2}$ tem características que vão para além do fenómeno de Gödel (como acontece com as formas de escolha mencionadas no texto principal).

[23] Ver o artigo de W. Hugh Woodin, "The continuum hypothesis, Part I", Notices of the American Mathematical Society, 48(6), 567-576 (2001).

[24] O estudo dos subconjuntos definíveis da reta real (e de outros espaços métricos separáveis completos) é o tema da teoria descritiva dos conjuntos. Este assunto tem origem nas investigações dos matemáticos franceses Émile Borel, René-Louis Baire e Henri Lebesgue em torno da

A imagem contínua de um boreliano já não tem que ser um conjunto boreliano mas Mikhail Suslin demonstrou em 1917 que é um conjunto mensurável à Lebesgue. Surge, naturalmente, a questão de saber se todos os conjuntos projetivos são mensuráveis à Lebesgue. Depois de estudos profundos, o professor de Suslin, Nikolai Luzin, desabafa em 1925: "não sabemos nem nunca saberemos [se os conjuntos projetivos são mensuráveis à Lebesgue]".[25] Retrospetivamente, vê-se que este desabafo tinha razão de ser pois a questão não se pode decidir em **ZFC**. O *axioma da determinação projetiva* postula que todo o conjunto projetivo é determinado. Este axioma permite obter uma teoria muito elegante dos conjuntos projetivos. A partir de **PD** pode mostrar-se que todo o conjunto projetivo é mensurável à Lebesgue, tem a propriedade do subconjunto perfeito, a propriedade de Baire, etc. Em particular, as questões de Luzin têm resposta. Também se pode mostrar que toda a relação projetiva é uniformizável por uma função projetiva. Este resultado de Yiannis Moschovakis mostra que se podem fazer escolhas definíveis em aritmética de segunda-ordem e que, portanto, neste contexto não há uso essencial do axioma da escolha.[26]

Não é absolutamente nada evidente que **PD** seja consistente com os restantes axiomas da teoria dos conjuntos e, ainda menos, que se deva aceitar como um axioma. No final dos anos oitenta, Martin e John Steel mostraram que **PD** é consequência de axiomas que postulam a existência de grandes cardinais.[27] A postulação de grandes cardinais pode considerar-se uma generalização do axioma do infinito e faz parte da conceção iterativa dos conjuntos, um requisito da qual é ir tão longe quanto possível na escala dos números ordinais transfinitos.[28] Do ponto de vista dos fundamentos, o teorema de Martin e Steel diz que se aceitarmos uma certa conceção do universo dos conjuntos então devemos aceitar **PD**. Este teorema é, verdadeiramente, um marco na história da teoria dos conjuntos e, a meu ver, tem consequências muito interessantes para os fundamentos da matemática.

As fórmulas da linguagem da aritmética de segunda-ordem definem precisamente os conjuntos projetivos. No contexto desta aritmética, **PD** forma um esquema de axiomas que permite completar naturalmente a axiomática $\mathbf{PA}_2$ na medida em que as indecidibilidades conhecidas de $\mathbf{PA}_2 + \mathbf{PD}$ são análogas às de $\mathbf{PA}_1$, i.e., são do tipo gödeliano. A proposta de um novo axioma **PD** é arrojada até porque, nas palavras de Hugh Woodin, "a verdade [de **PD**] apenas se torna evidente depois de muito trabalho".[29] Há uma diferença fundamental entre o tipo de evidência que se aceita para as axiomatizações "canónicas" das estruturas da aritmética de primeira e de segunda-ordem. Enquanto que no primeiro caso a evidência é puramente intrínsica, no segundo ela não o é pois extravasa a aritmética, emanando da teoria dos conjuntos. A temática da natureza da evidência dos axiomas e a noção (informal) de axiomatização "canónica" clamam por atenção e escrutínio filosófico.

---

passagem do século XIX para o século XX. Veja-se *Classical Descriptive Set Theory* de Alexander Kechris (Springer-Verlag, 1995) para uma moderna exposição do assunto.

[25] Nikolai Luzin foi um matemático russo e um dos fundadores da teoria descritiva dos conjuntos. Em 1917, o seu estudante Mikhael Suslin mostrou, ao contrário do que Lebesgue pensava, que a imagem contínua de um conjunto boreliano não é necessariamente um conjunto boreliano. Luzin e o seu aluno foram levados a estudar os conjuntos projetivos mas depararam-se com um impasse no seu estudo, o que motivou o desabafo de Luzin em 1925. Para mais informações sobre este assunto, ver o final da secção 2 de *Cantorian Set Theory and Limitation of Size* de Michael Hallett, Oxford, 1984.

[26] Ver referência da nota 23.

[27] Donald Martin e John Steel, "A proof of projective determinacy", Journal of the American Mathematical Society, vol. 2(1), pp. 71-125, 1989.

[28] Para esta conceção e a sua defesa veja-se o seguinte artigo de Kurt Gödel (traduzido para português por Manuel Lourenço): "O que é o problema do contínuo de Cantor?" in *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (segunda edição) de Kurt Gödel et al., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2009. Também recomendo o artigo de Hao Wang "The concept of set" in *Philosophy of Mathematics. Selected Readings* (segunda edição), organizado por Hilary Putnam e Paul Benacerraf, Cambridge University Press, 1983.

[29] Ver referência da nota 22.

Penso que é interessante terminar esta discussão com algumas reflexões de Gödel que estão na origem do programa de estudo de grandes cardinais e da procura de novos axiomas. Uma questão importante da teoria dos conjuntos, enunciada ainda pelo próprio Cantor no século XIX, é a de saber qual é a cardinalidade do conjunto dos números reais. A hipótese do contínuo afirma que esta cardinalidade é a menor cardinalidade a seguir à cardinalidade dos números naturais. No final dos anos trinta, Gödel mostra que a hipótese do contínuo é consistente com **ZFC**. Uma década mais tarde, Gödel escreve um artigo à primeira vista expositório, mas realmente de carácter programático, intitulado "O que é o problema do contínuo de Cantor?".[30] Neste artigo, defende vigorosamente as suas ideias realistas (ou platonistas) a respeito da matemática. Segundo Gödel, mesmo que se viesse a demonstrar que a hipótese do contínuo fosse independente de **ZFC** (o que realmente veio a suceder em 1963 com o trabalho de Paul Cohen) isso "de maneira nenhuma resolveria o problema. Porque se o sentido dos termos primitivos da teoria dos conjuntos (...) é aceite como correto, segue-se que os conceitos da teoria dos conjuntos e os teoremas descrevem uma realidade bem determinada na qual a conjetura de Cantor tem que ser verdadeira ou falsa". Gödel insiste em afirmar que a axiomática **ZFC** não está fechada e instiga os investigadores a procurar novos axiomas para a teoria dos conjuntos.

O caminho até **PD** é, de acordo com alguns especialistas, um exemplo da descoberta de um novo axioma (para a aritmética de segunda-ordem). A hipótese do contínuo é, contudo, uma asserção da aritmética de terceira-ordem e **PD** não lhe toca. Será que existe uma axiomática "canónica" que decida a hipótese do contínuo? Ou será que a hipótese do contínuo é, contra Gödel, inerentemente vaga, como defendem alguns autores?[31] Os especialistas em teoria dos conjuntos têm-se debruçado sobre estas questões mas os resultados são, até ao momento, inconclusivos.[32] A hipótese do contínuo é, ainda hoje, um problema em aberto dos fundamentos da matemática.

VIII

Neste escrito dei alguns exemplos da lógica matemática como empreendimento fundamentador. As escolhas não pretenderam ser isentas, antes espelham ideias e preferências pessoais. A meu ver, as investigações reportadas no último exemplo são profundas e belas. G. H. Hardy disse famosamente que "there is no permanent place for ugly mathematics".[33] Apesar dos resultados da moderna teoria dos conjuntos estarem afastados do centro da matemática atual pensamos que eles, de uma forma ou doutra, encontrarão um lugar permanente na matemática. Os outros exemplos reportam investigações mais suscetíveis de interagir com o resto da matemática. De facto, penso que (apesar da beleza inquestionável de algumas ideias) o lugar permanente dessas investigações na matemática vai depender, em grande medida, das relações frutuosas que conseguirem estabelecer com o resto da matemática.

(Comunicação apresentada à Classe de Ciências
na sessão de 15 de janeiro de 2009)

---

[30] Ver referência da nota 26.
[31] Veja-se, por exemplo, Solomon Feferman in "Does mathematics need new axioms?", American Mathematical Monthly, vol. 106, pp. 99-111, 1999.
[32] O principal impulsionador dos estudos sobre a hipótese do contínuo e do universo dos conjuntos enquanto tal é H. Hugh Woodin. Vejam-se os seus dois artigos (até para acompanhar a evolução das suas ideias) "The continuum hypothesis, Part II", Notices of the American Mathematical Society, 48(7), 681-690 (2001) e "Strong axioms of infinity and the search for V", Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Hyderabad, Índia, 2010.
[33] G. H. Hardy, *Apologia de um Matemático*, Edições Gradiva, Lisboa, 2007.