No paraíso, sem convicção...
(uma explicação do Programa de Hilbert)

FERNANDO FERREIRA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Ninguém nos expulsará do paraíso
que Cantor criou para nós.
David Hilbert[1]

§1. No século passado assistiu-se a uma regimentação da actividade matemática. São exemplos notáveis desse fenómeno 1) a substituição da noção de infinitesimal pela noção Weierstrassiana de limite delta-epsilon,[2] 2) a redução do sistema dos números complexos ao sistema dos números reais e 3) a liberalização do conceito de função como relação de muitos-para-um. Esta regimentação veio acompanhada duma clarificação conceptual da actividade matemática que foi determinante para a maneira como a matemática se pratica hoje. Paralelamente, emergiram duas características fundacionais de grande importância: a *axiomática* e o *reducionismo*.

A ligação íntima entre axiomatização e clarificação conceptual opera nos dois sentidos. A partir do momento em que as noções matemáticas se querem rigorosas, é ponto crucial que, ao se trabalhar com elas, não se introduzam inadvertidamente suposições marginais a essas noções: a axiomatização toma sobre si a função "policial" e "higiénica" de controlar e depurar a actividade matemática.[3] No outro sentido, este controlo induz uma nítida separação entre o *contexto da descoberta*, de carácter essencialmente privado e onde "vale tudo" (refiro-me às diversas formas de intuição), e o *contexto da justificação*, que é público, disciplinado e pede enunciados e definições claras.[4]

O método axiomático levanta, porém, o problema da consistência: o de mostrar que os axiomas não levam a contradições. Este problema pode ser atacado através da construção de estruturas que satisfaçam os axiomas: é, na terminologia dos lógicos, a solução *semântica* para o problema da consistência. Ora, estas estruturas - quando se constroem à custa de outras (o que é geralmente o caso) - apenas originam um resultado de consistência *relativa* da axiomática satisfeita pela nova estrutura em relação à axiomática associada à original. Um caso notável deste tipo de reducionismo é o dos modelos das geometrias não-euclideanas, como o descoberto por Eugenio Beltrami que interpreta "plano" por pseudo-esfera e "linha recta" por geodésica: resulta uma estrutura que satisfaz os axiomas da geometria de Lobachevsky, o que demonstra a consistência desta em relação à geometria euclideana.[5]

No século passado, vários matemáticos alemães proeminentes defenderam activamente um programa de *aritmetização da matemática*, com o objectivo último de reduzir a matemática à aritmética. Uma formulação preliminar deste objectivo, devida a Gustav Dirichlet, vem mencionada no prefácio dum famoso ensaio de Richard Dedekind[6]: "todo o teorema da álgebra e da análise superior, por mais remoto que seja, pode ser expresso como um teorema acerca de números naturais". Outra formulação, de Leopold Kronecker, é a seguinte: "acredito que, no futuro, consigamos 'aritmetizar' todo o conteúdo destas disciplinas matemáticas [incluindo a análise e a álgebra]; i.e., baseá-lo no conceito de número tomado no seu sentido mais estrito"[7]. Porém, vem a descobrir-se que a redução do contínuo real aos números naturais levanta um problema de ordem epistemológica: a redução pressupõe não só o conhecimento dos números naturais mas, também, o conhecimento de todos os subconjuntos de números naturais. Tal vai contra a aritmetização no seu sentido mais estrito, apologizada num célebre *dictum* de Kronecker: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk"[8]. A necessidade de lidar com subconjuntos arbitrários de números naturais leva ao relaxamento do programa reducionista original, permitindo-se construções altamente não-finitistas, típicas da teoria de conjuntos e que pressupõem a actualidade do infinito. À volta de

1900, o aparecimento de paradoxos na teoria de conjuntos causa uma grave crise no programa de aritmetização da matemática.[9]

No §2 expõe-se brevemente a origem da teoria de conjuntos e descreve-se um dos seus paradoxos; discutem-se, também, algumas fundamentações da matemática, nomeadamente as *revisionistas* que propõem resolver a crise fundacional modificando (restringindo) a actividade e os métodos dos matemáticos. É contra estas revisões que se insurge uma das maiores figuras da matemática da viragem do século: David Hilbert[10]. Hilbert propõe-se levar a cabo um programa de *salvação da matemática* que "não atraiçoe a nossa ciência"[11]; a ideia central deste programa é duma originalidade notável e consiste em alicerçar a matemática não-finitista nos incontroversos meios finitistas. A estratégia consiste em ultrapassar o revisionismo imposto por uma exigente posição epistemológica através do apelo a essa mesma posição: uma espécie de jiu-jitsu epistemológico.

No §3 explicamos em que consiste o programa de Hilbert e o porquê do seu fim abrupto. Aliás, é oportuno avançar, desde já, a razão genérica por que pôde ter esse fim: tem a ver com a própria formulação do programa. Nas palavras de Paul Bernays, um discípulo de Hilbert:

> A grande vantagem do método de Hilbert é a seguinte: os problemas e as dificuldades que se apresentam nos fundamentos da matemática podem ser transferidos do domínio epistemológico-filosófico para o domínio matemático.[12]

Tendo o programa de Hilbert uma formulação matemática, não seria de excluir que pudesse ser refutado matematicamente. E, como veremos, foi!

O presente trabalho tem grande número de notas (algumas de cariz técnico) e bastantes referências bibliográficas, na dupla intenção de tornar o texto mais interessante para o leitor melhor preparado e de ser útil a quem queira aprofundar certas temáticas aqui afloradas. A leitura das notas não é, contudo, essencial para a compreensão genérica do texto principal e escolhemos colocá-las na parte final do texto.

§2. A criação da teoria de conjuntos é obra do matemático alemão

Georg Cantor, e nasceu da tentativa de solucionar o problema da caracterização de conjuntos de unicidade de séries trigonométricas.[13]

Uma *série trigonométrica* é uma série da forma

$$\frac{1}{2}b_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx + b_k\cos kx),$$

onde os coeficientes $a_1,a_2,\ldots,b_0,b_1,b_2,\ldots$ são números reais independentes da variável real x.[14] Um subconjunto X do intervalo $[0,2\pi]$ diz-se *conjunto de unicidade* se, sempre que a série trigonométrica convergir para zero nos pontos fora de X, então todos os coeficientes se anulam. O primeiro resultado de Cantor (1870) sobre conjuntos de unicidade assevera que o conjunto vazio é um conjunto de unicidade, i.e., que a única série trigonométrica que converge para zero em toda a parte é a série de coeficientes identicamente nulos. Este resultado é sucessivamente refinado por Cantor: todo o conjunto finito é conjunto de unicidade; todo o conjunto infinito, *desde* que tenha apenas um número finito de pontos de acumulação, é conjunto de unicidade; todo o conjunto infinito, *mesmo* que tenha um número infinito de pontos de acumulação, mas *desde* que estes tenham somente um número finito de pontos de acumulação, é conjunto de unicidade; todo o conjunto infinito, *mesmo* que tenha um número infinito de pontos de acumulação e *mesmo* que estes tenham um número infinito de pontos de acumulação, mas *desde* que estes últimos tenham somente um número finito de pontos de acumulação, é conjunto de unicidade; etc.

Cantor é levado a introduzir uma notação perspícua: dado X um subconjunto do intervalo $[0,2\pi]$, chama-se *conjunto derivado* de X, e escreve-se X', ao conjunto de todos os pontos de acumulação de X. Em geral denota por $X^{(n)}$ o resultado de efectuar esta operação de derivação n vezes sucessivas. O teorema de Cantor admite a seguinte reformulação: se, para algum número natural n, o conjunto $X^{(n)}$ é vazio então X é conjunto de unicidade. Seja $X^{(\infty)}$ a intersecção de todos os conjuntos $X^{(n)}$; um conjunto X diz-se de *primeira espécie* se $X^{(\infty)}$ é o conjunto vazio. O resultado de Cantor pode ainda ser enunciado da seguinte maneira: todo o conjunto de primeira espécie é um conjunto de unicidade.

A ideia de *número ordinal* começa a tomar forma em 1871, quando Cantor se propõe averiguar a questão da unicidade para conjuntos de *segunda espécie* (os que não são de primeira espécie). Nada impede que se continue a operação de derivação para além de $X^{(\infty)}$, obtendo-se $X^{(\infty+1)}$, $X^{(\infty+2)}$,..., $X^{(\infty+n)}$, ..., $X^{(\infty+\infty)}$, $X^{(\infty+\infty+1)}$,..., $X^{(\infty+\infty+\infty)}$,..., $X^{(\infty n)}$,..., $X^{(\infty\infty)}$,..., $X^{(\infty\infty\infty)}$,..., $X^{(\infty^n)}$,..., $X^{(\infty^\infty)}$,..., $X^{(\infty^{\infty^\infty})}$,.... Cantor fala duma "geração dialéctica de conceitos, que continua sempre e, no entanto, está livre de qualquer arbitrariedade, sendo necessária e lógica"[15]. Cantor mostra que, se algum destes conjuntos é vazio, então X é conjunto de unicidade; demonstra-se, essencialmente, que todo o conjunto contável fechado é conjunto de unicidade.[16]

Na década seguinte a atenção de Cantor vira-se explicitamente para o estudo dos índices que ocorrem nos $X^{(\alpha)}$, e argumenta pela sua legitimidade como números e não meros artifícios formais. Esta mudança de atitude não se efectuou sem crise de consciência: Cantor relata mais tarde que "fui levado a estes números há muitos anos, sem ter a consciência clara de que os possuia como números concretos de significado real (...) fui logicamente forçado, quase contra a minha vontade (pois isso ia contra a tradição que tinha aprendido a respeitar ao longo de muitos anos) a considerar o infinitamente grande não apenas na forma de crescimento ilimitado (...) mas, também, na sua fixação matemática por meio de números, numa forma determinada de infinito completo"[17,18]. Cantor descreve dois princípios de geração para estes números: o primeiro é a adição de uma unidade a um número já formado. Começando no zero obtêm-se,

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

que formam, na terminologia de Cantor, a *primeira classe numérica* (vulgo números naturais). O segundo princípio permite passar dum segmento inicial de ordinais sem máximo, previamente formado, para o número que lhe vem "imediatamente a seguir". Os ordinais que se obtêm através da aplicação deste segundo princípio chamam-se ordinais *limite* (os restantes, com a excepção do número 0, são os ordinais *sucessor*). Ao aplicar este segundo princípio à primeira classe numérica obtem-se o ordinal binómine ω ou $\aleph_0$, que é o primeiro número ordinal infinito (a denominação $\aleph_0$ usa-se, em geral, prefixada pela palavra *cardinal*: na terminologia moderna um cardinal é um número ordinal que não está em correspondência biunívoca com nenhum segmento inicial próprio de predecessores). Prosseguindo a geração de números ordinais através da aplicação destes dois princípios sucedem-se,

$$\omega+1,\ \omega+2,\ldots,\ \omega+n,\ldots,\ \omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ldots,\ \omega+\omega+\omega,\ \ldots.\ \omega n,\ldots$$
$$\ldots,\ \omega\omega,\ldots,\ \omega\omega\omega,\ldots,\ \omega^n,\ldots,\ \omega^\omega,\ldots,\ \omega^{\omega^\omega},\ldots\ \ldots$$

Todos os ordinais exemplificados acima são *numeráveis*, i.e., o conjunto dos seus predecessores está em correspondência biunívoca com a colecção dos números naturais. Os ordinais numeráveis constituem a *segunda classe numérica*. Quando se aplica o segundo princípio de geração a esta classe de ordinais obtem-se o cardinal ω_1 ou $\aleph_1$, que é o primeiro ordinal infinito não numerável. De modo análogo obtem-se a *terceira classe numérica* e o cardinal $\aleph_2$. E assim sucessivamente.[19]

A cabeça feia dum paradoxo vem à tona quando se pretende formar o conjunto de *todos* os ordinais. Com efeito, de acordo com o segundo princípio de geração haveria, então, um ordinal **Ω** imediatamente a seguir a todos os ordinais. Este ordinal está na origem duma contradição pois é, ao mesmo tempo, um elemento do conjunto dos ordinais e maior que todos os elementos desse conjunto.[20] No artigo "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types"[21], Bertrand Russell dá um diagnóstico muito geral para a contradição: segundo ele, na raíz de qualquer paradoxo estão sempre *círculos viciosos* e estes devem ser prevenidos por meio do acatamento à seguinte regra: "Se, admitindo que uma dada colecção tem um total, ela tivesse membros apenas definíveis em termos desse total, então a dita colecção não tem total" (Princípio do Círculo Vicioso). Observe-se que a definição do ordinal **Ω** transgride este preceito (dizendo-se que não é uma definição *predicativa*), pois **Ω** é definido a partir duma totalidade da qual faz parte.

A monumental obra "Principia Mathematica", que Russell escreveu em colaboração com Alfred North Whitehead, constituiu uma tentativa de fundamentar a matemática com base no Princípio do Círculo Vicioso e na ideia de que a matemática se reduz à lógica (é a tese do *logicismo*). Na persecução desta abordagem vêm-se a encontrar grandes dificuldades, nunca satisfatoriamente resolvidas, e que levam ao progressivo descrédito das teses logicistas.

As dificuldades de Russell e Whitehead aparecem, com agudeza, na construção dos números reais. Seguindo Dedekind, os números reais são apresentados como *cortes* de números racionais. A ideia é simples e tipifica muitas construções da matemática moderna: partindo da observação heurística de que um número real α determina univocamente o conjunto X_{α} constituido pelos números racionais que o precedem, *define-se* um número real como sendo um qualquer conjunto deste tipo (a saber, um corte: segmento inicial majorado de números racionais sem máximo). Na ideografia do "Principia Mathematica" surge, porém, um obstáculo quando se pretende demonstrar o *princípio do supremo* - emblemático da noção de continuidade - o qual afirma que todo o subconjunto majorado e não vazio de números reais tem supremo. Suponhamos, com efeito, que c={X real: $\Phi(X)$} é um tal conjunto; o supremo de c é, então, o corte S={q racional: $\exists$X real ($\Phi(X) \in q[X]$)}. Observe-se que a definição de S não é predicativa, pois o quantificador existencial "$\exists$X" tem como domínio de variação uma totalidade que inclui o ente S a definir. Na *Teoria dos Tipos* de Russell e Whitehead esta definição é bloqueada (como o são todas as definições impredicativas) por meio dum dispositivo formal que: 1) indica uma *ordem* a cada função proposicional; 2) exige que o domínio de variação de cada variável proposicional se restrinja a uma ordem determinada. Por exemplo, se o domínio de variação da variável quantificada "X" tiver ordem *n*, então o corte S tem ordem *n+1* (i.e., S tem ordem *relativa* 1 em relação à ordem da variável X) e, portanto, não pode ser valor de X. Infelizmente, este mecanismo também impede que se possam definir todos reais por meio duma única função proposicional - ou, noutra formulação, impossibilita que se possam juntar todos os reais num só conjunto - ficando estes distribuidos ao longo de várias ordens. Para obstar a esta dificuldade Russell propõe o polémico *axioma da Redutibilidade*, que se pode enunciar assim: toda a função proposicional tem a mesma extensão duma certa função proposicional de ordem (relativa) 0. Repare-se no oportunismo desta manobra: as funções proposicionais explícitas de ordem (relativa) 0 são exactamente aquelas que se sujeitam à exigência predicativa; Russell está, pois, a postular que todo a função proposicional (predicativa ou não) é co-extensível a uma função proposicional predicativa. O conhecido matemático Hermann Weyl tem o seguinte comentário: "Para libertar-se da situação, Russell faz a razão cometer hara-kiri ao postular [o axioma da Redutibilidade] (...)"[22].

Convém chamar a atenção para os verdadeiros motivos de inquietação do predicativista, que são com a forma das definições de novos objectos e não com a especificação de objectos dados. Por exemplo, se se chamar *Gigante* ao homem mais alto de Lisboa, não se infringe nenhum preceito predicativista, apesar de Gigante ser um homem de Lisboa (e, portanto, membro da totalidade a partir da qual foi especificado). O que se passa é que se está a especificar um homem particular dentro da totalidade dos homens que habitam Lisboa; ou, doutro modo, a totalidade dos habitantes de Lisboa é (naturalmente) pressuposta e, a partir dela, especifica-se um seu elemento particular (o Gigante).[23] Assim, uma posição predicativista opera e é relativa a uma ontologia previamente aceite, podendo esta ser aumentada (com, por exemplo, conjuntos) por meio de definições predicativas: pode mesmo falar-se do predicativismo como um *construtivismo* com respeito a definições. Conforme a escolha da ontologia de partida têm-se vários matizes de predicativismo, desde o radicalismo de Edward Nelson em [N85], que não admite a totalidade dos números naturais, até à posição mais tradicional de Weyl em *Das Kontinuum*, que admite essa totalidade mas não a totalidade de todos os subconjuntos de números naturais[24,25,26].

Dois problemas irão ocupar Cantor até ao fim da sua vida. Primeiro, a questão da cardinalidade dos números reais, que Cantor estava convencido que era igual à da segunda classe numérica (é a hipótese do contínuo: $2^{\aleph_0}=\aleph_1$).[27] Em 1883 Cantor propõe o Príncipio da Boa-Ordenação como uma lei lógica evidente (este príncipio afirma que todo o conjunto pode ser bem-ordenado). A intuição que subjaz à aceitação deste príncipio é simples: pega-se num elemento arbitrário do conjunto para primeiro elemento; depois noutro para segundo elemento, ... ; se o conjunto for infinito haverá uma etapa em que se definirá o ω-ésimo elemento do conjunto; depois o $(\omega+1)$-ésimo elemento e assim por diante, utilizando os ordinais para a contagem, até se "esgotar" todo o conjunto. Contudo, este príncipio não ganhou adeptos durante os dez anos que se seguiram à sua proposta e, nos anos noventa, Cantor tenta várias vezes produzir uma demonstração do príncipio - sem sucesso. Surgia o Problema da Boa-Ordenação e, em particular, o problema da boa-ordenação dos reais que, a crer na verdade da hipótese do contínuo, podia ser bem-ordenado através dos números da segunda classe numérica.

A situação era extremamente confusa até que, em 1904, Ernst Zermelo publica um pequeno artigo de três páginas cujo título, traduzido para o português, é "Demonstração de que todo o conjunto pode ser Bem-Ordenado"[28]. A demonstração de Zermelo faz uso *explícito* do que posteriormente vem a ficar conhecido por *axioma da Escolha*. Este axioma diz que para qualquer conjunto M de conjuntos não vazios, existe uma função E que associa a cada conjunto X de M um seu elemento (i.e., tal que $E(X)\in X$, para todo X em M). A uma função E, que vai buscar - ou escolher - um elemento de cada conjunto X em M, dá-se o nome de *função de escolha* para M. Quando M é finito existem sempre funções de escolha.[29] O primeiro caso não trivial do axioma da Escolha tem lugar quando M é numerável: a este caso particular do axioma dá-se o nome de *axioma Numerável da Escolha*.[30] Para muitos matemáticos a existência de funções de escolha é intuitivamente aceitável - quase que se impondo logicamente - mas outros criticam-na por, em geral, não se providenciar um método ou uma receita que permita efectuar sistematicamente as escolhas. A controvérsia gira em torno da aceitação da existência de objectos matemáticos sem os definir/construir.

Há uma clivagem natural de ordem epistemológica entre os defensores e os críticos do axioma da Escolha. Um *realista* ou *platonista*, para o qual os objectos e as verdades da matemática são independentes do Homem, tende a aceitar o axioma. Em contrapartida, o construtivista, para o qual as entidades matemáticas só existem se forem construidas, rejeita o axioma.

O campo construtivista é muito amplo[31], cabendo nele uma vasta gama de posições, desde o predicativismo - o qual, em algumas variantes, pode acomodar certos casos não finitistas do axioma da Escolha - até ao radicalismo da posição *intuicionista*, que advoga uma nova lógica sem o príncipio do terceiro excluído ("tertium non datur"). Há um exemplo simples duma demonstração classicamente irrepreensível, cuja rejeição pelos intuicionistas ilustra bem as suas razões:

> Teorema. Há números irracionais a e b tais que a^b é racional.
>
> *Demonstração*: Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é número racional basta pôr $a=b=\sqrt{2}$. Caso contrário, toma-se $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b=\sqrt{2}$.

Este argumento afiança uma asserção de existência mas não exibe decisivamente os dois números a e b cuja existência se propõe assegurar. Esta inabilidade de os exibir com decisão é, para o intuicionista, inaceitável. Para ele, a única maneira de demonstrar uma asserção de existência consiste em: 1) construir entidades que a testemunhem; 2) demonstrar que isso é o caso. Tal não acontece com a demonstração acima, e a razão deve-se ao uso do príncipio do terceiro excluido quando se assevera a alternativa "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é número racional ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ não é número racional", sem dizer qual delas é que vale: em geral, o intuicionista só admite a alternativa "A ou B" se, ou tiver uma demonstração de A, ou tiver uma demonstração de B. Como é fácil de perceber, o intuicionismo é uma posição revisionista radical e implica que se abandone grande parte dos métodos e resultados da prática matemática corrente. É, compreensivelmente, uma tese pouco popular entre os matemáticos.

Um dos mais representativos subscritores do campo platonista é o lógico Kurt Gödel. Em "What is Cantor's continuum problem?"[32], Gödel defende que há verdades da teoria dos conjuntos que ainda não foram incorporadas nas actuais axiomáticas e tem a esperança de que a descoberta de novos axiomas possa decidir a hipótese do contínuo. Na parte final do seu ensaio Gödel admite mesmo aceitar axiomas que não sejam intrinsecamente necessários (Gödel estava a pensar em certos postulados conhecidos por axiomas de Cardinais Inacessíveis):

> Pode ser que existam axiomas tão abundantes nas suas consequências verificáveis, que lancem tanta luz sobre todo um domínio e que produzam métodos tão poderosos para resolver problemas (e para os resolver mesmo construtivamente, tanto quanto isso for possível) que, sejam ou não necessários, terão que ser aceites pelo menos no mesmo sentido em que é aceite qualquer teoria física bem estabelecida.

A consideração de vários novos princípios em teoria de conjuntos e o estudo sistemático das suas consequências com vista a ajuizar o "poder explicativo" desses princípios tem sido o *leitmotiv* da investigação em teoria dos conjuntos desde há trinta anos a esta parte. Donald Martin, um profissional do ramo, tem a seguinte afirmação a propósito dum novo princípio, conhecido por axioma da Determinação Projectiva (abreviado por PD):

> O autor [Martin] considera [o postulado] PD uma hipótese com um estatuto similar às hipóteses teóricas na física. Têm-se produzido três tipos de evidência quase-empírica para PD.
>
> (1) O mero facto de ainda não se ter refutado PD constitui evidência da sua verdade. (2) Alguns casos particulares de PD foram verificados (...). (3) As consequências de PD (...) são tão plausíveis e coerentes que dão plausibilidade ao príncipio que as implica.[33]

Curiosamente, Émile Borel - um conhecido matemático construtivista do princípio do século - antecipou, em parte, a posição de Gödel e Martin na seguinte passagem sobre o axioma da Escolha:

> Podemos perguntar qual é o valor real destes argumentos [não construtivistas] que eu não considero absolutamente válidos, mas que acabam por levar a resultados efectivos. De facto, se fossem completamente desprovidos de valor não podiam levar a nada, pois seriam uma mera colecção de palavras sem sentido. Isto, penso, é um juízo demasiado severo. Eles têm um valor análogo ao de algumas teorias da física matemática, que não supomos expressarem a realidade, mas antes servem de guia para nos ajudar, por analogia, a predizer novos fenómenos, os quais depois têm que ser verificados. Requereria uma investigação considerável descobrir qual é o sentido preciso a atribuir a estes argumentos.[34]

Borel remata esta linha de raciocínio com a opinião de que "esta investigação seria inútil ou, pelo menos, não valeria o esforço dispendido". Esta opinião subjectiva (e, cremos, precipitada) não foi seguida.

O axioma da Escolha, apesar de intuitivo e ter inúmeras consequências de grande utilidade, permite também demonstrar asserções que ferem a intuição, como a existência de subconjuntos da recta real que não são mensuráveis à Lebesgue, ou a existência (argumentada por Banach e Tarski) duma decomposição "paradoxal" da esfera num número finito de pedaços que, depois de convenientemente montados, dão origem a duas esferas *do mesmo tamanho da esfera original*! Estas consequências parecem constituir evidência contra o axioma da Escolha. Contudo são desvalorizadas (se não mesmo ignoradas) pela comunidade matemática, que aceita esmagadoramente o axioma.

Jan Mycielski e Hugo Steinhaus propuseram em 1962 uma alternativa ao axioma da Escolha[35]. A um conjunto X de sequências infinitas de números naturais pode associar-se um jogo G_X entre dois jogadores I e II. Uma jogada consiste na escolha dum número natural por parte de um dos jogadores. O primeiro jogador inicia o jogo e este prossegue com jogadas alternadas de um e outro jogador. O jogo termina ao fim de ω jogadas, obtendo-se então uma sequência infinita $\alpha = \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...$ de números naturais, em que α_{2n} é a (n+1)-ésima jogada de I e α_{2n+1} é a (n+1)-ésima jogada de II. Se a sequência α está em X ganha o jogador I; caso contrário ganha II. As noções de *estratégia* e *estratégia ganhadora* para um jogador definem-se da maneira óbvia.[36] Um conjunto X de sequências infinitas de números naturais diz-se *determinado* se um dos dois jogadores tem uma estratégia ganhadora para o jogo G_X. O *axioma da Determinação* diz que todo o conjunto X de sequências infinitas de números naturais é determinado.[37] Este axioma contradiz o axioma da Escolha (o que é suficiente para que Yiannis Moschovakis, um especialista em teoria dos conjuntos, classifique o axioma da Determinação de "obviamente falso") mas implica o axioma Numerável da Escolha para conjuntos de números reais e, por consequência, não afecta os teoremas básicos de análise matemática. Também implica a hipótese do contínuo[38] e demonstra fortes propriedades de regularidade dos subconjuntos da recta real, como a de que *todos* são mensuráveis à Lebesgue.

A formulação moderna da teoria de conjuntos consiste numa axiomática do cálculo de predicados de primeira-ordem (conhecida por axiomática de Zermelo-Fraenkel) baseada na ideia de *limitar o tamanho dos conjuntos* de modo a impedir o aparecimento de paradoxos. Uma das grandes vantagens (para a prática matemática) desta ideia é colocar todos os conjuntos no mesmo pé: não há entes de várias ordens ou tipos, como no "Principia Mathematica". A formação dos vários conjuntos processa-se através do apelo a axiomas de existência, desde aqueles que são pacíficos do ponto de vista construtivista até àqueles que são altamente não construtivos, como é o caso do axioma da Escolha. A ideologia hoje dominante entre os profissionais da teoria de conjuntos é a de que os conjuntos que podem ser "construidos" ou "definidos" têm boas propriedades de regularidade, enquanto os conjuntos cuja existência só pode ser justificada através de príncipios não construtivos exibem comportamentos "paradoxais" (e.g., a partição de Banach-Tarski).

Neste último quartel tem-se estudado sistematicamente a denominada hipótese da Determinação Projectiva (PD), um enfraquecimento do axioma da Determinação que, ao que se saiba, não contradiz o axioma da Escolha. As consequências de PD são de tal modo coerentes e conformes à ideologia dominante que o tornam muito atraente. Há poucos anos, culminando duas décadas de investigação, demonstrou-se um resultado de grande impacto: PD é consequência dum certo axioma de Cardinais Inacessíveis.[39] É matemática no seu melhor: um resultado altamente não trivial, difícil e que relaciona dois conceitos importantes. Para alguns tem, também, o valor adicional de dar (ainda) mais plausibilidade a certas hipóteses de determinação.

§3. No princípio do século, e contrariamente ao que se passa hoje, havia uma grande efervescência no domínio da fundamentação da matemática. As novas ideias e métodos matemáticos, e problemas subsequentes (descritos brevemente na secção anterior), deram origem a várias reacções e ao estabelecimento de diversas escolas fundacionais, como o logicismo de Russell, o predicativismo de Weyl ou o intuicionismo de Brouwer. Destas, o logicismo foi-se revelando cada vez menos credível, enquanto que o predicativismo e o intuicionismo têm contra si (pelo menos) o facto de serem revisionistas.

David Hilbert era um matemático de grande prestígio, com interesses excepcionalmente multifacetados (que incluiram a Álgebra, a Teoria dos Números, os Fundamentos da Geometria, as Equações Integrais e os Fundamentos da Matemática) e um grande entusiasta das ideias de Cantor, não se coibindo de as discutir e de utilizar no seu próprio trabalho métodos que, na altura, ainda levantavam suspeitas ao grosso da comunidade matemática. Um exemplo desta situação é o seu trabalho em Teoria dos Invariantes: Hilbert soluciona o problema fundamental dessa área, até então caracterizada por uma grande falta de clareza conceptual e por cálculos extremamente longos. Paul Gordon - na altura o grande especialista - conhecido por *Rei dos Invariantes*, acolhe o trabalho pioneiro de Hilbert com o seguinte comentário: "Das is nicht Mathematik. Das ist Theologie".[40]

Como a epígrafe a este ensaio dá a entender, Hilbert não estava minimamente disposto a abrir mão dos resultados da matemática moderna e dos métodos da teoria dos conjuntos. Para apreciar a força, voluntarismo e autoconfiança do homem apreciem-se as seguintes citações:

> O que experimentámos duas vezes, primeiro com os paradoxos do cálculo infimitesimal, depois com os paradoxos da teoria dos conjuntos, não experimentaremos uma terceira vez, nunca mais.[41]

> (...) a clarificação definitiva da *natureza do infinito* não pertence apenas a uma esfera de interesses científicos especializados, mas é necessária para a própria *dignidade do espírito humano*.[42]

> Com os seus [de Brouwer] métodos a maior parte dos resultados da matemática moderna têm que ser abandonados e, para mim, o importante não é obter menos resultados mas, sim, obter mais.[43]

> Tirar o princípio do terceiro excluído ao matemático seria o mesmo que tirar o telescópio ao astrónomo ou o uso dos punhos ao pugilista.[44]

> (...) todo o problema matemático tem solução. Todos estamos convencidos disso. (...) há um problema, procura-se a solução; e ela pode ser encontrada somente com o pensamento, pois não há *ignorabimus* em matemática.[45]

> Temos de saber. Havemos de saber.[46]

A estratégia de Hilbert para "salvar" a matemática infinitista e colocá-la em terra firme consistiu em utilizar as próprias armas dos finitistas. A seguinte citação de Bernays descreve a situação:

> As experiências do início da sua carreira científica (mesmo as dos seus tempos de estudante) tiveram um significado considerável para o programa de Hilbert; nomeadamente a sua resistência à tendência de Kronecker em restringir os métodos matemáticos e, em particular, a teoria dos conjuntos. Sob a influência da descoberta das antinomias em teoria de conjuntos Hilbert pensou, temporariamente, que Kronecker estivera certo nesse ponto. Mas mudou rapidamente de opinião. Agora o seu objectivo, pode assim dizer-se, era bater Kronecker com as suas próprias armas do finito por meio duma concepção modificada da matemática...[47]

Vejamos em que consiste esta nova concepção a que Bernays alude. Há um núcleo duro da matemática que estava para além de qualquer disputa fundacional, nomeadamente aquela parte a que Kronecker se circunscrevia, cujos objectos eram os números naturais e cujas demonstrações se caracterizam por manipulações de carácter finitista. Assim, a igualdade ||+||| = |||+|| e a sua demonstração a partir da definição recursiva de "+" é um exemplo duma verdade finitista validada sem margem para dúvidas. (A definição recursiva de "+" é a seguinte: x+|=x| e x+y|=(x+y)|. Vem, então: ||+||| = (||+||)| = (||+|)|| = ||||| = (|||+|)| = |||+||.) De acordo com Hilbert, a equação "||+x=x+||" tem o seguinte conteúdo informativo: para qualquer sequência S de marcas "|", ||+S e S+|| denotam a mesma sequência de marcas. Tal asserção geral pode verificar-se por meio duma indução muito simples que, em cada caso particular (no nosso exemplo, S=|||), origina uma série de manipulações finitistas que mostram que ||+S e S+|| são a mesma sequência. Hilbert chama *asserções reais* (ou finitistas) às asserções que relatam este tipo de conteúdo informativo; ao tipo de argumentos que exemplificámos, chama argumentos finitistas.

Como Hilbert observa, a negação duma asserção real já não tem que ser uma asserção real. Com efeito, a negação duma equação "f(x)=g(x)" é a asserção "existe um x tal que f(x)≠g(x)", a qual já não tem (em geral) o conteúdo informativo duma asserção real.[48] Assim, para Hilbert, *a própria formulação do princípio do terceiro excluído deixa de ter sentido se nos restringirmos a asserções reais.*

É necessário alargar o conceito de asserção para que as leis clássicas da lógica possam, não só ser válidas, mas formuladas! Hilbert lança um apelo:

> Lembremo-nos de que *somos matemáticos* e de que, como matemáticos, muitas vezes nos encontrámos em situações difíceis, das quais fomos salvos pelo método engenhoso dos elementos ideais (...) de modo similar, para preservar as leis da lógica Aristotélica, temos que *suprir as asserções finitistas com asserções ideais*.[49]

As *asserções ideais* que Hilbert refere incluem aquelas habitualmente usadas pelos matemáticos quando falam de objectos altamente não finitistas como espaços topológicos, ultrafiltros, medidas, etc. Para fundamentar a inclusão destas asserções no corpo da matemática, Hilbert estabelece propositadamente um paralelo com certas construções típicas da matemática, caracterizadas por se alargar o domínio ontológico original de modo a obter informação sobre os "velhos" objectos:

> Assim como, por exemplo, os números negativos são indispensáveis em teoria dos números e, modernamente, esta disciplina apenas é possível através dos ideais de Kummer-Dedekind, assim a matemática científica apenas é possível através da introdução de asserções ideais.[50]

A introdução dos *ideais* em teoria algébrica dos números por Kummer e Dedekind decorreu de certos problemas de factorização aquando da tentativa de demonstração da conjectura de Fermat pelo primeiro autor. A conjectura de Fermat é a asserção de que nunca se tem a igualdade $x^n+y^n=z^n$, para números naturais x, y, z e n>2. (As circunstâncias que rodearam o aparecimento desta conjectura e que a tornaram famosa são as seguintes: à volta de 1637 o jurista e matemático francês Pierre de Fermat escreveu, na margem dum livro "descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa [desta conjectura]; esta margem é demasiado pequena para a conter". Esta nota marginal, conjugada com a simplicidade da formulação da conjectura, a reputação de Fermat e os sucessivos esforços de grandes matemáticos para a resolver, tornaram famoso o problema.[51]) Kummer julgou, a certa altura, ter uma demonstração da conjectura, como relata Hensel no centenário do seu nascimento:

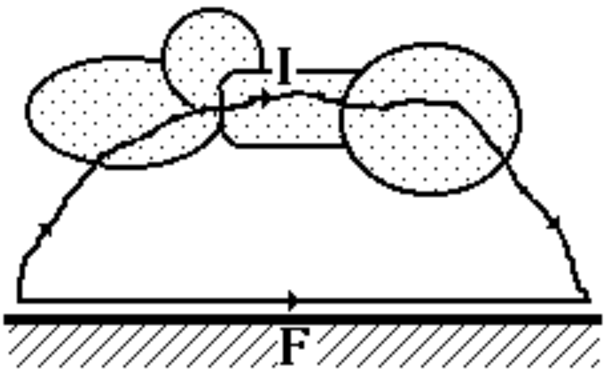
> Embora não seja bem conhecido, Kummer chegou a acreditar ter uma demonstração completa do Teorema de Fermat. (...) Querendo ter o melhor crítico para a sua demonstração, Kummer enviou-a a Dirichlet (...). Após alguns dias, Dirichlet respondeu com a opinião de que a demonstração era excelente e certamente correcta, desde que os números α não só pudessem ser decompostos como produtos de factores primos, como Kummer demonstrara, mas (também) que essa decomposição pudesse ser feita de maneira única.[52]

Era uma "situação difícil", e o conceito de ideal veio contribuir para o seu esclarecimento. Na notação algébrica moderna, Kummer estava a trabalhar com os anéis de inteiros algébricos $Z[\zeta_p]$, onde p é um número primo e ζ_p é uma raíz primitiva da equação $z^p=1$. Nestes anéis não se tem, em geral, a unicidade de factorização dum elemento como produto de primos; de facto, a primeira excepção ocorre no anel $Z[\zeta_{23}]$. A manobra de Kummer-Dedekind consiste em estender os números destes anéis de modo a obter a unicidade de factorização no novo domínio: os novos "números" foram chamados de *ideais*. A demonstração e as conclusões de Kummer são, agora, correctas para as equações "$x^p+y^p=z^p$", desde que *p* seja um número primo *regular* (esta noção é apenas inteligível à luz dos novos ideais). Deve, porém, observar-se que a introdução dos ideais por Dedekind não é de carácter finitista - do mesmo modo que não é finitista a construção dos irracionais via cortes. Porém, é possível providenciar uma redução finitista para os ideais, tendo uma tal redução sido esboçada por Kronecker com a sua Teoria dos Divisores.[53]

Pode, agora, ter-se uma ideia da enorme amplitude e ambição do programa que Hilbert se propôs levar a cabo. Consistia, nem mais nem menos, em demonstrar que - num certo sentido - tal redução finitista é *sempre* possível. Para que este programa tenha sucesso é, primeiramente, necessário dar um sentido finitista às asserções ideais. A resposta tem que ser absolutamente geral e, por conseguinte, é genial: *o sentido duma asserção ideal é a sequência de símbolos que a formaliza numa determinada linguagem formal*. Ou, mais rigorosamente: as asserções ideais são certas sequências de símbolos numa determinada linguagem formal. Esta abordagem exige que se trabalhe com uma formalização total da matemática. Ora, Frege e os seus continuadores já tinham obtido essa formalização e Hilbert vê nisso (mais) um sinal da correcção do seu programa:

> Felizmente, a mesma harmonia preestabelecida que vemos tantas vezes a operar na história e desenvolvimento da ciência, a mesma harmonia preestabelecida que ajudou Einstein, ao dar-lhe o cálculo invariante geral já completamente desenvolvido para a sua teoria gravitacional, essa mesma harmonia vem em nossa ajuda: encontramos o cálculo lógico já feito.[54]

O sentido das reduções finitistas aludido no nosso último parágrafo pode ser descrito do seguinte modo: Hilbert pretende mostrar que a matemática dos métodos infinitistas é uma extensão *conservativa* da matemática finitista com respeito às asserções reais. Por outras palavras, sempre que se demonstra uma asserção real φ por meios não finitistas (i.e., permitindo-se métodos infinitistas e asserções ideais nos passos da demonstração) então existe, também, uma demonstração puramente finitista de φ. Denotando por I uma axiomática da matemática infinitista utilizada e por F a axiomática dos princípios finitistas, a seguinte figura caricaturiza o que se passa (onde $\vdash$ simboliza a relação de demonstrabilidade):



Se $I \vdash \varphi$ então $F \vdash \varphi$

As asserções e os postulados infinitistas são dispensáveis no sentido acima descrito. Não se infira, no entanto, que Hilbert defende a redução do sentido da matemática infinitista a meras manipulações de símbolos. "O máximo que se pode atribuir a Hilbert é que, para resolver certas questões filosóficas, podemos ver as coisas dessa maneira."[55] De facto, Hilbert acrescenta que a matemática infinitista é um dispositivo formal talhado para [não só facilitar, mas também] tornar conceptualmente claras as demonstrações de asserções reais.[56]

Sumariando, o programa de Hilbert divide-se em três etapas. A primeira consiste em atribuir às asserções um sentido finitista claro, encarando-as como sequências de símbolos numa linguagem formal. A segunda consiste em formalizar a prática matemática, i.e., os seus enunciados e demonstrações. A terceira consiste em demonstrar que a matemática infinitista é uma extensão conservativa da matemática finitista. Claro que, para evitar um *petitio principii*, esta demonstração tem que ser, ela própria, finitista. É, pois, necessário obter um procedimento construtivo que transforme qualquer demonstração duma asserção real, por métodos infinitistas, numa demonstração que não faça uso desses métodos. A seguinte observação de Hilbert é crucial:

> Há apenas uma condição, ainda que absolutamente necessária, a que o método dos elementos ideais está sujeito. Essa condição consiste numa *demonstração de consistência*, pois a expansão do domínio pela adição de elementos ideais só é legítima se essa expansão não causa o aparecimento de contradições no domínio original, mais estrito. Por outras palavras, somente se as relações que resultam entre os elementos originais, quando se eliminam as estruturas ideais, continuam válidas no domínio original.[57]

Hilbert está a afirmar que o resultado de conservação se segue do resultado de consistência. Em "Die Grundlagen der Mathematik"[58] esta afirmação é exemplificada por um argumento que, sob a hipótese do resultado de consistência, ensina a obter uma demonstração finitista da conjectura de Fermat a partir duma demonstração infinitista. O exemplo é tipíco. Nos próximos três parágrafos esboçamos, para o leitor melhor preparado, o argumento de Hilbert adaptado ao caso geral.

A asserção da consistência de I - chamemos-lhe Con_I - afirma não existir nenhuma demonstração de "|=||" a partir de I. Numa perspectiva formal - portanto finitista - isto equivale a negar a existência duma sequência de símbolos *d* que formaliza uma demonstração de "|=||" a partir de I, i.e., tal que $Dem_I(d,"|=||")$, com $Dem_I(x,y)$ a relação *decidível* apropriada.[59] Con_I é, pois, a asserção real $\forall x{\sim}Dem_I(x,"|=||")$.

Com vista a demonstrar o resultado de conservação, suponhamos que $F\vdash Con_I$. Tome-se φ uma qualquer asserção real (logo da forma "$\forall xD(x)$", com D(x) decidível) demonstrável a partir de I. Então existe *d* tal que,

(*) $F\vdash Dem_I(d,"\forall xD(x)")$.

Ora, por um lado é verdade que,

(**) $F\vdash \forall x({\sim}D(x)\rightarrow Dem_F(a(x),"{\sim}D(x)"))$[60],

para um certo algoritmo *a*. Por outro lado também se tem,

(***) $F\vdash \forall x[Dem_I(a(x),"{\sim}D(x)")\&Dem_I(d,"\forall xD(x)")\rightarrow{\sim}Con_I]$.

Como F é parte de I conclui-se, por (*), (**), (***) e por hipótese, que $F\vdash \forall xD(x)$. Como se queria demonstrar.

O que se acabou de ver (sob a suposição de que $F\vdash Con_I$) é, na terminologia dos lógicos, o *Princípio de Reflexão*:

[Reflexão-Π_1] $F\vdash \forall x(Dem_I(x,\varphi)\rightarrow\varphi)$,

para asserções reais φ. Este princípio dá origem a um algoritmo muito simples que transforma demonstrações infinitistas de asserções reais em demonstrações finitistas. Com efeito, seja *d* tal que $Dem_I(d,\varphi)$. Uma demonstração finitista de φ consiste em três partes: primeiro, numa demonstração finitista de $Dem_I(d,\varphi)$; em seguida numa demonstração finitista de $\forall x(Dem_I(x,\varphi)\rightarrow\varphi)$; por fim, numa particularização e numa aplicação de *modus ponens* para concluir φ.

Sendo o problema da consistência equivalente ao problema da conservação, a obtenção de demonstrações finitistas de consistência joga um papel central no programa *formalista* de Hilbert. Para as conseguir, Hilbert inventou uma nova disciplina: a teoria da demonstração (*Beweistheorie*), supostamente capaz de vir a providenciar demonstrações puramente finitistas da consistência de teorias formais através da exploração sistemática da finitude das demonstrações formalizadas (a denominada solução *sintáctica* para o problema da consistência). Solomon Feferman relata[61] que Hilbert e os seus estudantes Wilhelm Ackerman e John von Neumann estiveram, a certa altura, convencidos de ter uma demonstração finitista da consistência da teoria hoje conhecida por *Aritmética de Peano*. Tal constituiria um primeiro passo para a demonstração da consistência de teorias mais fortes, como a Análise ou, mesmo, a Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel. Como se veio a verificar, os argumentos de Ackerman e von Neumann apenas se aplicam a segmentos *muito fracos* da Aritmética de Peano. Tal não se deve a uma falta de engenho dos estudantes de Hilbert. Com efeito, há uma razão fundamental para não se encontrarem demonstrações finitistas de consistência, a saber o *2º Teorema da Incompletude de Gödel* de 1931: para qualquer teoria axiomática T suficientemente forte, $T \nvdash Con_T$ (i.e., T não demonstra a sua própria consistência).[62]

O Teorema de Gödel põe um ponto final às pretensões do programa de Hilbert. É certo que a primeira reacção a este teorema foi no sentido de considerar a teoria com que Gödel trabalhou incapaz de formalizar todos os métodos finitistas. Esta reacção é compreensível pois, em 1931, ainda não se sabia exactamente o alcance das demonstrações de consistência de Ackerman e von Neumann. Mas, rapidamente, o próprio von Neumann argumenta que o sistema usado por Gödel é suficientemente forte para formalizar os métodos finitistas (note-se, além disso, que o resultado de Gödel é muito geral, aplicando-se à própria teoria dos conjuntos a qual, supostamente, inclui todos os métodos finitistas). Esta discussão em torno do finitismo sobrevem porque Hilbert nunca delimitou precisamente o finitismo, o que é compreensível pois *caso o seu programa tivesse sido bem sucedido tal não teria sido necessário* (a exibição duma demonstração finitista de consistência teria de ser incontroversamente reconhecida como tal).[63,64]

David Mumford, um reputado matemático contemporâneo, afirmou o seguinte: "To be a mathematician is to be an out-and-out Platonist". Esta afirmação exprime lucidamente a posição espontânea do matemático profissional. Para este, o significado duma asserção matemática enraiza-se, em última análise, nos objectos matemáticos independentes do Homem que lhe povoam o universo. O calcanhar de Aquiles do platonismo - de facto, o grande desafio filosófico que se lhe coloca - consiste em elucidar o estatuto ontológico destes objectos e, secundariamente, em dar conta do acesso ao seu conhecimento. Cremos que o objectivo último do programa de Hilbert era fundamentar a *prática* do "platonista espontâneo". As asserções e os princípios "ideais" são o *instrumento* que iria permitir a Hilbert dar (no âmbito do seu programa formalista) uma fundamentação a essa prática; essa fundamentação seria total caso

Hilbert tivesse podido fornecer, não só uma demonstração finitista da consistência da matemática mas, também, uma axiomatização *completa* da matemática (i.e., em relação à qual toda a asserção ou é demonstrável ou é refutável[65]). Neste caso, a verdade duma asserção matemática confundir-se-ia com a sua demonstrabilidade, e o acesso ao conhecimento duma verdade matemática circunscrever-se-ia ao processo da sua demonstração. Ora, o *1º Teorema da Incompletude* de Gödel e a sua análise por Alfred Tarski mostram que esta identificação entre verdade e demonstrabilidade (ou, se se preferir, esta redução do primeiro conceito ao segundo) não é - em geral - válida.[66] Nada melhor do que as palavras introdutórias de Gödel ao seu extraordinário "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I" (1931) para ilustrar este ponto e terminar a secção:

> É sabido que o desenvolvimento da matemática, no sentido duma maior exactidão, conduziu à formalização de vastos domínios desta ciência de modo a que as demonstrações possam ser efectuadas de acordo com algumas regras mecânicas. Os sistemas formais mais exaustivos aré agora construídos são, por um lado, o *Principia Mathematica* (PM) e o sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel para a teoria dos conjuntos (re-elaborado por J. von Neumann). Ambos os sistemas são tão gerais que todos os métodos de demonstração actualmente usados em matemática podem formalizar-se neles, i.e., podem ser reduzidos a alguns axiomas e regras de inferência. É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência sejam também suficientes para decidir todas as questões em matemática que podem ser formalmente expressas nesses sistemas. No que se vai seguir mostrar-se-á que não é assim mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas. Esta situação não depende da natureza especial dos sistemas construídos mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais (...)[67]

§4. As tentativas de fundamentação global da matemática falharam ou sofrem de grandes dificuldades. Esta situação deu origem - nas palavras de Solomon Feferman - a uma "general malaise about the logical approach to the foundations of mathematics". Hoje assistimos a manifestações de grande cepticismo - senão mesmo oposição frontal - quanto à adequação da lógica para esclarecer questões sobre a natureza da matemática.[68] Esta reacção é natural mas, em muitos aspectos, excessiva.[69] Há um curioso paralelo entre esta reacção aos métodos da lógica nas questões fundacionais da matemática e uma reacção semelhante em relação à filosofia analítica.[70] Em ambos os casos os novos métodos criaram grandes expectativas; em ambos os casos, *fazendo uso desses mesmos métodos*, concluiu-se que eles têm sérias limitações; e, em ambos os casos, assiste-se hoje a manifestações de grande oposição a eles.

Não partilhamos deste cepticismo generalizado - pelo menos se objecta à capacidade da lógica para dizer algo de relevante sobre a natureza da matemática (e tem-no dito, ainda que principalmente na forma de resultados negativos). Mas, é certo, não há futuro para os actuais programas de fundamentação global da matemática. Tal não impede que as técnicas desenvolvidas por esses programas não tenham interesse matemático e, atrevemo-nos a acrescentar, possam contribuir para o esclarecimento parcial da própria actividade matemática.

Ainda nos anos trinta, dois resultados de carácter fundacional proporcionaram reformulações do programa de Hilbert e estimularam a investigação em teoria da demonstração. O primeiro resultado, devido (independentemente) a Gödel e a Gerhard Gentzen, afirma que a aritmética de Peano demonstra as mesmas asserções reais que a sua análoga intuicionista (conhecida por aritmética de Heyting e que pode ser pensada como a aritmética de Peano sem o princípio do terceiro excluído). Este resultado causou alguma perplexidade visto que, até então, confundiam-se os métodos finitistas com os métodos construtivistas/intuicionistas. Ora, estes últimos são menos restritivos pois não exigem que os objectos do discurso sejam, em última análise, arranjos combinatoriais de símbolos não-interpretados. À luz do resultado de Gödel-Gentzen, Bernays reformula o programa de Hilbert:

> Ficou, pois, visível que o "finite Standpunkt" não é a única alternativa aos modos clássicos de raciocínio e não é forçosamente consequência da ideia da teoria da demonstração. Sugeriu-se, portanto, um alargamento dos métodos da teoria da demonstração: em vez da restrição aos métodos finitistas de raciocínio, apenas se

requeria que os argumentos tivessem um carácter construtivo, permitindo-se a utilização de formas de inferência mais gerais.[71]

O outro resultado é a demonstração de Gentzen da consistência da aritmética de Peano utilizando indução transfinita (sobre predicados decidíveis) até ao ordinal ε_0. Este resultado é apenas inteiramente inteligível aos *cognoscenti*. Para o que se segue basta assinalar duas coisas: primeiro, que a demonstração de Gentzen introduz uma técnica fundamental para a análise e estudo das demonstrações formais - a denominada *eliminação do corte*; segundo, que o resultado de Gentzen permite ainda outra reformulação do programa de Hilbert. Nas palavras de Kurt Schütte:

> (...) as investigações de Gödel mostraram que os métodos estritamente finitistas são fundamentalmente inadequados para obter a demonstração de consistência exigida pelo programa de Hilbert. Portanto a teoria da demonstração precisa, não apenas dos restritivos métodos finitistas de natureza combinatorial mas, também, de procedimentos demonstrativos de ordem mais elevada. Assim, chegamos aos métodos - primeiro usados por Gentzen - que utilizam formas de indução que ultrapassam, de facto, a indução (matemática) usual mas que, ainda assim, têm um carácter construtivo.[72]

As investigações subsequentes à reformulação do programa de Hilbert por Bernays e Schütte produziram alguns resultados dignos de menção. Eis três: a caracterização formal do conceito de predicatividade por Schütte e Feferman na década de sessenta; várias *reduções* de teorias não-construtivas a outras construtivas; e as actuais investigações - de cariz fundacional mais difícil de justificar - de sistemas não predicativos, as quais parecem apontar para uma ligação fecunda entre teoria da demonstração e teoria dos conjuntos (nomeadamente, cardinais inacessíveis).[73] Concomitantemente, nos anos setenta, Harvey Friedman lança o programa da *matemática recíproca* ("reverse mathematics") com o objectivo de avaliar, com exactidão, as pressuposições existenciais subjacentes aos teoremas clássicos da matemática. O método utilizado nesta avaliação justifica o nome do programa: pretende-se não só demonstrar que um determinado teorema T é consequência duma certa axiomática A (a parte "directa" da matemática) mas, também, que esse teorema *T* (juntamente com alguns princípios elementares) demonstra a própria axiomática *A* (a parte "recíproca" da matemática), estabelecendo-se desta forma a necessidade da axiomática *A* para demonstrar o teorema *T*. As investigações em curso já permitem tirar três conclusões: primeiro, a força dedutiva da teoria dos conjuntos extravasa claramente o que é necessário para a matemática que se aplica cientificamente[74]; segundo, descobriu-se haverem *quatro* ou *cinco* sistemas axiomáticos que catalogam quase todos os teoremas considerados; terceiro, é mesmo possível desenvolver uma parte razoável da matemática sob os métodos restritos do finitismo de Hilbert.[75]

Ultimamente, a teoria da demonstração tem-se mostrado útil fora da esfera fundacional, sendo utilizada como um instrumento matemático para extrair informação computacional de demonstrações em sistemas formais. A pré-história desta faceta da teoria da demonstração tem origem numa questão posta por Georg Kreisel: "What more than its truth do we know, if we have proved a theorem by restricted means?"[76]. Por outras palavras: quando se demonstra uma asserção num determinado sistema axiomático (formal) fica a saber-se algo para além da sua verdade, nomeadamente fica a saber-se que a asserção se demonstra *nesse* sistema. Pergunta Kreisel: qual é, explicitamente, esta informação adicional? A resposta é a seguinte: há uma informação suplementar de carácter computacional. Mais concretamente, por vezes é possível encarar uma demonstração formal como um proto-algoritmo com correcção incorporada. O estudo das relações entre os sistemas formais e a complexidade computacional destes algoritmos constitui hoje um interessante campo de trabalho.

Outro aspecto - menos estudado - destas questões teve origem no seguinte problema formulado por Wilfried Sieg em 1985: "To find a mathematically significant subsystem of analysis whose class of provably recursive functions consists only of computationally feasible ones"[77]. Pretende-se encontrar axiomáticas suficientemente fortes para formalizar e demonstrar teoremas significativos da análise matemática mas para as quais, ainda assim, seja possível extrair informação interessante do ponto de vista da complexidade computacional.

Termino com as seguintes palavras de Wilfried Sieg em [S90], "o objectivo do programa de Hilbert - fornecer demonstrações da consistência da análise e da teoria de conjuntos no seio da matemática finitista - é inatingível: o programa está morto. No entanto, o instrumento matemático que Hilbert inventou para atingir o seu objectivo programático está de muito boa saúde: a teoria da demonstração (...)".

ANOTAÇÕES

[1] Citação de "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, vol. 95, pp.161-190 (1926). Consultámos duas traduções para o inglês: [BP83] e [H67].

[2] O leitor que não esteja familiarizado com os traços gerais da história da matemática do final do século XIX pode consultar as últimas páginas de Dirk Struik, *História Concisa da Matemática*, Gradiva, Lisboa 1992. Para as definições básicas de Análise Matemática veja-se Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa 1985.

[3] A introdução do rigor na Análise Matemática leva à descoberta de exemplos patológicos, como o de funções contínuas num intervalo sem derivadas em nenhum ponto (Weirstrass) ou o de curvas contínuas que enchem um quadrado (Peano). Exemplos como estes tiveram um papel determinante na crescente ausência de considerações geométricas (por pouco fiáveis) no trabalho público dos matemáticos.

[4] Em "Logic, sets, and mathematics", *The Mathematical Intelligencer*, 15, nº 1, (1993), Paul C. Gilmore formula este ponto assim: "Individuals are free to enjoy their own unbridled intuition, but if their insights are to enter the body of mathematics, they must become subject to the discipline of logic".

[5] Para mais informações a este respeito consulte-se, neste volume, J. Dionísio em "Da irrealidade da geometria".

[6] Refiro-me a "Was sind und was sollen die Zahlen?", obra de 1888. Usámos a tradução inglesa em [D63].

[7] Encontrei esta passagem em [S90]: ela cita Kronecker de "Über den Zahlbegriff" in *Werke*, Band III, pp. 251-274 (Leipzig, Berlim). As bem conhecidas reduções dos números racionais aos números inteiros e, destes, aos números naturais, são devidas a Kronecker. Kronecker também efectua a redução dos números algébricos aos racionais - *via* soluções de polinómios de coeficientes inteiros - tendo ficado extremamente satisfeito ao re-demonstrar um famoso teorema de Dirichlet sobre a existência duma infinitude de primos em certo tipo de progressões aritméticas, sem utilizar (como o fez Dirichlet) métodos analíticos. Segundo Wilfried Sieg, o problema metodológico posto pela demonstração de Dirichlet - a saber, explicar o uso de métodos analíticos para demonstrar factos sobre números naturais - foi um *leitmotiv* do programa da aritmetização da análise.

[8] "Os números inteiros foram criados por Deus, tudo o resto é obra do Homem". Esta máxima transmite duas ideias. Primeiro, a de que o Homem, no domínio da matemática, tem *apenas* acesso epistemológico ao sistema dos números inteiros (naturais). Segundo, a de que toda a obra do Homem, na matemática, é uma *construção* (finitista) que tem por base esse mesmo sistema.

[9] Em "Über das Unendliche", ob. cit., Hilbert afirma que o paradoxo de Russell (cuja descoberta parece ter sido antecipado por Ernst Zermelo, vide [Mo82]) teve "um absoluto efeito catastrófico no mundo da matemática".

[10] Ao leitor que, como nós, aprecie biografias, aconselhamos vivamente a leitura do excelente trabalho de Constance Reid [Rd70].

[11] Em "Über das Unendliche", ob. cit.

[12] Encontrámos esta citação em [S90], que refere "Über Hilberts Gedanken zur Grundlungen der Arithmetik", *Jahresberichte DMV* 31, pp. 10-19 (1922).
[13] Os próximos quatro parágrafos devem muito à introdução de Philip Jourdain em [C55].
[14] O estudo clássico sobre séries trigonométricas é de Antoni Zygmund, *Trigonometrical Series*, Dover Publications, Nova Iorque, 1955.
[15] Traduzo duma nota da introdução de [C55].
[16] Deve observar-se que o estudo de subconjuntos arbitrários da recta real não só esteve na base da criação da teoria dos conjuntos como continua a ser uma das motivações principais para a investigação em teoria de conjuntos (vide, mais adiante, o texto principal). O próprio problema da caracterização de conjuntos de unicidade continua a receber atenção (veja-se, por exemplo, Alexander Kechris & Alain Louveau, "Descriptive set theory and harmonic analysis", *The Journal of Symbolic Logic* 57, pp. 413-441, 1992).
[17] Esta passagem vem referida na introdução de [C55]. A história da teoria dos conjuntos é extremamente curiosa e instrutiva: a introdução de Philip Jourdain em [C55], e as monografias de Gregory Moore [Mo83] e de Michael Hallett, *Cantorian set theory and limitation of size*, Oxford Logic Guides 10, Oxford, 1984, são boas fontes de informação.
[18] Uma defesa anterior do infinito completo deve-se a Bernard Bolzano (veja-se *Paradoxien des Unendlichen*, organizado por Alois Höfler e com anotações de Hans Hahn, Hamburgo, Felix Meines Verlag, 1955). Estou grato a António Zilhão por esta referência.
[19] O modo rigoroso de obter ordinais cada vez maiores usa de maneira essencial o *axioma da Substituição* (vide Franco de Oliveira, *Teoria dos Conjuntos*, Livraria Escolar Editora, Lisboa, 1982). Os *axiomas de Inacessibilidade*, que têm sido objecto sistemático de estudo nos últimos trinta anos, são formas de gerar ordinais ainda maiores.
[20] Este paradoxo deve-se ao matemático italiano Cesare Burali-Forti in "Una questione sui numeri transfiniti", *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* vol. XI, pp. 154-164, (1897): há uma tradução para o inglês na colectânea [H67]. Curiosamente, o argumento de Burali-Forti não foi apresentado como um paradoxo, mas sim como um *reductio ad absurdum* visando estabelecer a não linearidade da ordem natural dos ordinais (o que contradizia um resultado de Cantor publicado poucos meses antes). Também curiosamente, a primeira reacção de Russell ao paradoxo é negar-lhe esse estatuto, vendo-o em vez disso como a demonstração de que a ordem natural dos ordinais não é uma boa-ordem! (Veja-se a página 323 de Bertrand Russell, *Principles of Mathematics*, W. W. Norton & Company, Nova Iorque.)
[21] Em [H67] encontra-se ume reedição deste artigo.
[22] Citação da pág. 50 de [W49]. A justificação de Russell para se aceitar o axioma da Redutibilidade é puramente pragmática: *conduz aos resultados desejados e a nenhuns outros* (página xiv da introdução à segunda edição do "Principia Mathematica"). Mais tarde Frank Ramsey, em "The foundations of mathematics", *Proceedings of the London Mathematical Society* 25, pp. 338-384, (1925) - reeditado em D. H. Mellor (ed.), *Frank Ramsey: Philosophical Papers*, pp. 162-224, Cambridge University Press, Cambridge, 1990 - oberva ser possível alcançar este objectivo pragmático com apenas uma reduzida parte do dispositivo das "ordens". No artigo citado, Ramsey introduz a sua célebre distinção entre paradoxos sintáticos e paradoxos semânticos e defende que estes últimos são irrelevantes para a matemática, sendo suficiente dar atenção aos paradoxos sintáticos: estes, por sua vez, podem ser tratados numa Teoria Simples dos Tipos (em oposição à original Teoria Ramificada dos Tipos). A propósito, esta análise de Ramsey sugere que a impredicatividade não está na raíz dos paradoxos da teoria dos conjuntos.

[23] Para um platonista da teoria dos conjuntos - de que falaremos mais tarde no texto principal - a existência do supremo S do conjunto {X real: Φ(X)} não é problemática, visto que o conjunto P(Q) constituido por todos os subconjuntos dos números racionais é uma totalidade previamente aceite; neste pressuposto, a fórmula "∃X real (Φ(X) & q∈X)" serve para especificar um determinado elemento particular de P(Q).

[24] O artigo de Solomon Feferman "Systems of predicative analysis", *The Journal of Symbolic Logic* 27, pp. 1-30 (traduzido para português em [L79]) é uma boa exposição do predicativismo moderno, na linha de Weyl.

[25] É claro que o sistema de Weyl não admite o princípio do supremo. Porém, admite esse princípio para *sucessões* de números reais. Eis porquê: dada $(X_n)_{n[\omega}$ uma sucessão majorada de números reais (cortes de Dedekind), o supremo desta sucessão é o corte {q racional: $\exists n\in\omega$ $q\in X_n$}, cuja definição é predicativa pois não envolve nenhuma quantificação sobre a totalidade dos números reais.

[26] A evolução de Weyl leva-lo-á a renunciar às suas ideias predicativistas - expostas em *Das Kontinuum* - e a seguir as ideias mais radicais de Brouwer (de que falaremos a seguir no texto principal), para grande desapontamento de Hilbert, seu antigo professor. Veja-se, a este respeito, o capítulo XVIII de [Rd70] onde se cita Hilbert: "Acredito tanto em Kronecker ter conseguido abolir os números irracionais ... quanto em Weyl e Brouwer hoje conseguirem ter sucesso. Brouwer não é, como Weyl acredita, a Revolução - é apenas a repetição duma tentativa de Putsch".

[27] A resposta a esta questão estava claramente para além das técnicas do tempo de Cantor. (Em 1963, Paul Cohen demonstra que a hipótese do contínuo é independente da teoria dos conjuntos ZFC. A demonstração deste resultado, e as de outros que ocasionalmente mencionaremos, podem encontrar-se em Thomas Jech, *Set Theory*, Academic Press, Nova Yorque, 1978). No entanto, na tentativa de solucionar o problema do contínuo, Cantor introduz ideias muito férteis e duradouras. Diz-se que um conjunto de números reais tem a *propriedade do subconjunto perfeito* se for contável ou tiver um subconjunto *perfeito* (i.e., um conjunto não vazio X para o qual $X'=X$). Cantor mostra que todo o conjunto perfeito tem a cardinalidade do contínuo e que todo o conjunto fechado tem a propriedade do subconjunto perfeito. Logo, nenhum conjunto fechado pode ser um contra-exemplo à hipótese do contínuo (de facto, nenhum conjunto *analítico* - i.e., imagem contínua dum conjunto boreliano - pode ser um tal contra-exemplo: é um resultado clássico de Souslin). A estratégia de Cantor para demonstrar a hipótese do contínuo consistia em mostrar que todo o conjunto de números reais tem a propriedade do subconjunto perfeito. Em 1921 Lusin mostra que esta estratégia falha caso se admita o axioma da Escolha: usando este axioma, Lusin dá um exemplo dum conjunto que não tem a propriedade do subconjunto perfeito.

[28] "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann", *Mathematische Annalen* 59, pp. 514-516. Em [H67] há uma tradução inglesa deste artigo.

[29] A demonstração é por indução no número n de elementos de M. Um erro usual do caloiro em teoria de conjuntos é pensar que se usa o axioma da escolha quando $n=1$, i.e., quanto se toma um elemento dum conjunto não vazio X: tal é, tão somente, fazer uso da lei da lógica da *exemplificação existencial*.

[30] Em 1963 Cohen mostra que este caso do axioma da Escolha é independente de ZF, mesmo quando cada elemento de M tem apenas dois elementos. Russell popularizou este caso do axioma com o seu exemplo das botas e das meias. Um milionário tinha o hábito de comprar um par de meias sempre que comprava um par de botas, e a sua paixão era tal que, no fim, possuia um número infinito (numerável) de pares de botas e pares de meias. Nessa altura decidiu colocar uma meia em cada bota (com cada par de meias no respectivo par de botas). Viu-se aflito com a arbitrariedade do número de escolhas a fazer! (Está a supor-se que uma bota esquerda se distingue duma bota direita, ao contrário do que

acontece com as meias. Assim, da colocação duma meia em cada bota resulta uma função escolha para o conjunto de todos os pares de meias: por exemplo, escolha-se sempre a meia que fica na bota esquerda).

31 O capítulo introdutório de van Dalen & Troelstra, *Constructivism in Mathematics*, vol. 1, North-Holland, Amsterdão, 1988, é uma boa sinopse das várias formas de construtivismo.

32 Em *American Mathematical Monthly* 54, pp. 515-525, (1947), reeditado em [BP83]. Há uma tradução para português de Manuel Lourenço em [L79].

33 Nos últimos parágrafos de [Mt77].

34 Numa carta a Jacques Hadamard, publicada em "Cinq lettres sur la théorie des ensembles", *Bulletin de la Societé Mathématique de France* 33, pp. 261-273 (1905) e reproduzida em [Mo82].

35 Em "A mathematical axiom contradicting the axiom of choice", *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Math., Astron., et Phys.* 10, pp. 1-3 (1962).

36 Uma *estratégia* para I é uma função *E* que toma valores nos números naturais e cujo domínio é o conjunto de todas sequências de números naturais de comprimento par. Dada uma sequência infinita α, denota-se por $\alpha^*(i)$ a sequência finita $\alpha(0),\alpha(1),\ldots,\alpha(i-1)$. Considere-se um jogo G_X. Diz-se que uma estratégia *E* para o jogador I é *ganhadora* se toda a sequência α que satisfaça a condição $\forall n(\alpha(2n)=E(\alpha^*(2n)))$ está em *X*. De modo análogo se definem estratégia e estratégia ganhadora para o jogador II.

37 O axioma pode ser visto como uma espécie de lei de De Morgan infinita. Com efeito, se X é determinado,

$$\sim\exists\alpha_0\forall\alpha_1\exists\alpha_2\ldots[(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\in X] \Leftrightarrow \forall\alpha_0\exists\alpha_1\forall\alpha_2\ldots[(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\ldots)\notin X].$$

38 Na forma por que é usualmente conhecida pelos matemáticos: "todo o conjunto de reais ou é contável ou é equipotente à recta real". Esta formulação não é equivalente a "$2^{\aleph_0}=\aleph_1$" na ausência do axioma da escolha, pois pode não haver uma boa-ordenação dos reais.

39 O capítulo 4 de Penelope Maddy, *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1990, é uma viva discussão (não técnica) de PD; [Mt77] é uma pequena jóia de exposição matemática. Em Donald Martin & John Steel, "Projective Determinacy", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 85, pp. 6582-6586 (1988), discute-se o resultado mencionado.

40 "Isto não é matemática. É teologia". O resultado que tanto arrepiou Gordan entrou nos livros de texto com o nome de Teorema da Base de Hilbert. Pode consultar-se Stephen Simpson em "Ordinal numbers and the Hilbert basis theorem", *The Journal of Symbolic Logic* 53, pp. 961-974 (1988), para um estudo moderno (e técnico) da força lógica do resultado de Hilbert.

41 Em "Über das Unendliche", ob. cit.

42 Ibidem. Os itálicos são de Hilbert.

43 Comentário de Hilbert, dirigindo-se a Brouwer depois duma conferência deste em Göttingen no ano de 1927. Este episódio vem citado no capítulo XXI de [Rd70].

44 Em "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 6, pp. 65-85 (1928). Consultámos a tradução para o inglês da colectânea [H67].

45 Em "Über das Unendliche", ob. cit.

46 Palavras finais de Hilbert numa comunicação radiofónica na cidade de Königsberg (Kaliningrad) em 1930. Este episódio vem citado no capítulo XXII de [Rd70].

47 Bernays citado na pág. 173 de [Rd70].

48 Em linguagem da lógica moderna isto significa que a negação duma asserção Π_1 não é, em geral, uma asserção Π_1. Uma asserção Π_1 tem a forma

"∀xD(x)", onde D é um predicado "decidível", i.e., para o qual se pode decidir mecanicamente se um qualquer elemento tem, ou não, a propriedade D.

[49] Em "Über das Unendliche", ob. cit. O itálico é de Hilbert.

[50] Em "Die Grundlagen der Mathematik", ob. cit.

[51] Em Junho deste ano (1993), no decorrer duma conferência na Universidade de Cambridge, o matemático inglês Andrew Giles apresentou uma demonstração da conjectura de Fermat. Esta demonstração baseia-se nas mais recentes ferramentas matemáticas e foi bem acolhida pelos especialistas. O argumento de Wiles é, no entanto, ainda demasiado recente para que - na altura em que escrevo - possa ser considerado sem falácias. A excitação é grande...

[52] Encontrei esta passagem em [Rb79].

[53] Esta teoria não tem merecido os favores dos actuais livros de texto. H. M. Edwards tem um interessante artigo intitulado "Mathematical ideas, ideals, and ideology", *The Mathematical Intelligencer*, 14, nº 2, pp. 6-19 (1992), onde explica e procura reestabelecer a importância do trabalho de Kronecker. Para uma história mais detalhada sobre a conjectura de Fermat e as ideias de Kummer deve consultar-se [Rb79], em especial os capítulos V e VI.

[54] Em "Über das Unendliche", ob. cit.

[55] Passagem de Alecsandar Ignjatovic em "On mathematical instrumentalism", manuscrito de 1992.

[56] Em "Die Grundlagen der Mathematik", ob. cit., Hilbert afirma que certas demonstrações infinitistas "revelam as razões intrínsecas para a validade das asserções". No entanto, até hoje ainda não se formulou precisamente a noção duma demonstração ser conceptualmente mais clara que outra, ou duma demonstração revelar a razão intrínseca da validade duma asserção. Estas questões não são fáceis de abordar e é possível que as nossas intuições imediatas a respeito delas sejam enganadoras: consulte-se a este respeito o trabalho de Ignjatovic referido na nota anterior.

[57] Em "Über das Unendliche", ob. cit. O itálico é de Hilbert.

[58] Ob. cit.

[59] Vide a nota 45. O facto de $Dem_I(x,y)$ ser decidível traduz a ideia informal (e correcta) de que se pode decidir mecanicamente (numa linguagem formal) se um determinado candidato x a demonstração de y na teoria I é, ou não, uma tal demonstração.

[60] A asserção que se segue ao sinal de demonstrabilidade afirma que, para um qualquer número natural n particular, se $D(n)$ não é verdade então há uma demonstração finitista $a(n)$ de $\sim D(n)$. Por motivos técnicos costuma-se tomar $D(x)$ uma relação *recursiva primitiva*, em vez duma relação decidível geral (um profissional da lógica sabe que, no contexto em que se está a trabalhar, tal não representa uma restrição).

[61] Em "Introductory note to 1931c" em [G86].

[62] O artigo original de Gödel é "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter System I", e pode encontrar-se, acompanhado por uma tradução para o inglês, em [G86]. Existe uma tradução para português em [L79]. A teoria com que Gödel trabalhou é uma adaptação da Teoria Simples dos Tipos (ver nota 22) aos axiomas de Peano. À hipótese "suficientemente forte" pode dar-se um sentido preciso mas, para este trabalho, basta dizer que qualquer teoria axiomática que formalize um módico de manipulações finitistas verifica esta hipótese.

[63] Feferman nota (em "Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions", *The Journal of Symbolic Logic* 57, pp. 364-383, 1988) que esta situação é, em certo sentido, análoga à das construções com régua e compasso ou à dos problemas de decisão em lógica Desde que se obtenham resultados positivos não é necessário uma análise rigorosa do método envolvido; só os resultados negativos ("impossibilidades") exigem uma tal análise.

[64] W. W. Tait analisa cuidadosamente o finitismo de Hilbert em "Finitism", *The Journal of Philosophy* 78, pp. 524-546, e propõe que este se formaliza na teoria equacional (tecnicamente conhecida por) PRA.
[65] Uma asserção diz-se refutável numa teoria se essa teoria demonstra a sua negação.
[66] Discutimos este assunto em "Como ser sério com palavras cruzadas" in Furtado Coelho (org.), *Matemática e Cultura I*, pp. 37-53, Centro Nacional de Cultura & Edições Cosmos, Lisboa, 1992.
[67] Seguimos a tradução de Manuel Lourenço em [L79].
[68] Vide, por exemplo, Ruben Hersh in "Some proposals for reviving the philosophy of mathematics", *Advances in Mathematics* 31, pp. 31-50 (1979), Saunders MacLane in "Mathematical models: a sketch for the philosophy of mathematics", *American Mathematical Monthly* 88, pp. 462-472 (1981) e Imre Lakatos in *Mathematics, Science and Epistemology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
[69] Em [F84] Feferman critica estes "excessos" e procura reinstalar a lógica e a metamatemática nas questões fundacionais.
[70] Este tipo de reacção é notavelmente exemplificado pelo segundo posfácio de Richard Rorty em *The Linguistic Turn*, The University of Chicago Press, Chicago, 1992.
[71] Em "Hilbert, David", Paul Edward (org.), *Encyclopedia of Philosophy*, vol. 3, pp. 496-504, Macmillan e Free Press, Nova Iorque, 1967.
[72] Passagem na introdução de *Proof Theory*, Springer-Verlag, Berlim, 1977.
[73] A explicação do sentido das reduções mencionadas no texto e a discussão do significado - fundacional e matemático - dos resultados expostos não cabe nesta breve sinopse não técnica. Ao leitor interessado aconselho a leitura do ensaio de Feferman referido na nota 63.
[74] Esta descoberta tira força aos chamados *argumentos de indispensabilidade*. Segundo estes, uma boa razão para se acreditar nas entidades matemáticas é a de que elas são indispensáveis para as nossas melhores teorias científicas da natureza. Ora, como se afirma no texto principal, a matemática necessária para estas teorias requer apenas um pequeno canto do paraíso de Cantor.
[75] Para mais detalhes consulte-se o ensaio de Stephen Simpson intitulado "Partial realizations of Hilbert's program", *The Journal of Symbolic Logic* 53, pp. 349-363 (1988).
[76] "Para além da sua verdade, o que é que se fica a saber quando se demonstra um teorema por meios restritos?" Esta questão encontra-se formulada em "Mathematical significance of consistency proofs", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 23, pp. 155-182 (1958).
[77] "Obter um subsistema significativo da análise matemática cuja classe de funções demonstravelmente recursivas consiste apenas em funções computacionalmente exequíveis". Citação de "Hilbert's program sixty years later", *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 53, pp. 338-348 (1988). Para uma explicação do que são as funções demonstravelmente recursivas duma teoria e para mais detalhes sobre estes assuntos, consulte-se o nosso artigo "Análise, exequibilidade e lógica" em *Actas do 2º Encontro dos Algebristas Portugueses* (a aparecer).

PRINCIPAIS REFERÊNCIAS

[BP83] Paul Benacerraf & Hilary Putnam (orgs.): 1983, *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, Cambridge University Press, Cambridge.

[C55] Georg Cantor: 1955, *Contributions to the founding of the theory of Transfinite Numbers*, Dover Publications, Nova Iorque.

[D63] Richard Dedekind: 1963, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover Publications, Nova Iorque.

[F84] Solomon Feferman: 1984, "Foundational Ways", in W. Jäger, J. Moser & R. Remmert (orgs.), *Perspectives in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach 1984*, pp. 147-158, Birkhäuser Verlag, Basel.

[G86] Solomon Feferman e outros (orgs.): 1986, *Kurt Gödel: Collected Works*, vol. 1, Oxford University Press, Oxford.

[H67] Jean van Heijenoort: 1967, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

[L79] Manuel Lourenço (org.): 1979, *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.

[Mo82] Gregory Moore: 1982, *Zermelo´s Axiom of Choice*, Springer-Verlag, Nova Iorque e Berlim.

[Mt77] Donald Martin: 1977, "Descriptive Set Theory", in J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, pp. 739-82, North-Holland, Amsterdão.

[N85] Edward Nelson: 1985, "A Modified Hilbert Program", in M. Diener & G. Wallet (orgs.), *Mathematiques Finitaires et Analyse Non Standard*, Publications Mathématiques de l'Université Paris 7, vol. 31.

[Rb79] Paulo Ribenboim: 1979, *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer-Verlag, Nova Iorque.

[Rd70] Constance Reid: 1970, *Hilbert*, Springer-Verlag, Nova Iorque.

[Ru08] Bertrand Russell: 1908, "Mathematical Logic as Based on the Theory of Types", *American Journal of Mathematics* 30, pp. 222-262. Reeditado em [H67].

[RW27] Bertrand Russell & Alfred North Whitehead: 1927, *Principia Mathematica*, vol. I, Cambridge University Press, Cambridge.

[S90] Wilfried Sieg: 1990, "Relative Consistency and Accessible Domains", *Sinthese* 84, pp. 259-297.

[W18] Hermann Weyl: 1918, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig. Em 1987 publicou-se uma tradução para o inglês de S. Pollard e T. Bole:

The continuum. A critical examination of the foundations of analysis, University Press of America, Lantham.
[W49] Hermann Weyl: 1949, *Philosophy of Mathematics and the Natural Sciences*, Princeton University Press, Princeton.