Como ser sério com palavras cruzadas

Fernando Ferreira

God exists since mathematics is
consistent, and the Devil exists
since we cannot prove it †

André Weil

1. Introdução

Entre 1910 e 1913 foi publicada, em três monumentais volumes, a obra *Principia Mathematica* dos matemáticos e filósofos ingleses Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947). Ao todo quase duas mil páginas, plenas de uma escrita disciplinada por um formalismo resolutamente seguido até às últimas consequências. Página após página de uma grafia austera, polvilhada de pontos, asteriscos, setas de várias direcções, acentos de todos os tipos, sinais vários, pouco texto (se não se contar com as oitenta e quatro páginas da introdução) e, claro, números, muitos números mas, curiosamente, na sua quase totalidade apenas com a função menor de ordenar e tornar fácil a referência às várias proposições apresentadas.

Na página 83 do segundo volume demonstra-se, em três breves linhas, que 1+1=2. Se a princípio a grandeza do empreendimento, a sua deliberada contenção formal, e (porque não) a beleza do estranho simbolismo, exercem um certo fascínio é, depois, forçoso perguntar-se se uma obra, que precisa de mais de setecentas páginas para nos assegurar que 1+1=2 e cujo título tão pretensiosamente recorda o imorredouro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Isaac Newton, é séria. A resposta a esta questão é um inequívoco SIM e neste pequeno trabalho gostaria de fazer interessar o leitor pelo tipo de preocupações que levaram Russell e Whitehead a escrever o *Principia*.

A tese fundamental avançada por Russell e Whitehead é a de que a Matemática e a Lógica são idênticas. Ora, como o próprio Russell observa, esta era uma tese bastante impopular para a época: primeiro, porque a Lógica estava tradicionalmente associada ao trabalho de Aristóteles, não sendo assunto "próprio" para ("digno" de ?!) matemáticos; segundo, porque aqueles que se consideravam Lógicos teriam de dominar uma técnica nova e difícil se quisessem acompanhar os novos progressos da sua disciplina. Esta nova técnica era a Lógica Relacional, introduzida em 1878 no *Begriffsschrift,* um trabalho genial do matemático alemão Gottlob Frege (1848-1925). Não é demais salientar a importância de Frege, pois a ele se deve o primeiro grande avanço da Lógica desde a criação do silogismo por Aristóteles e uma contribuição decisiva para a viragem desta disciplina do campo filosófico para um campo mais matemático[1] A tese do Logicismo - isto é, a de que a Matemática e a Lógica são idênticas - já se encontra presente nos trabalhos de Frege, nomeadamente no *Grundgesetze der Arithmetik,* onde se tenta a redução da Aritmética à Lógica. Um curioso episódio de grande importância sucedeu quando, em vésperas da publicação do segundo volume desta obra em 1902, Bertrand Russell detecta uma contradição no sistema de Frege! A este propósito, no postscriptum do seu volume, Frege escreve as seguintes linhas:

> "Dificilmente poderá suceder a um cientista coisa mais infeliz do que ter um dos fundamentos do seu edifício abalado depois de terminada a obra.
>
> Foi nesta posição que me vi colocado por uma carta de Bertrand Russell quando a impressão deste volume estava quase completa. (...) *Solatium miseris, socios habuisse dolorum*[2]. Também eu tenho esta consolação, se é que chega a ser consolação, porque quem quer que tenha usado em demonstrações as extensões dos conceitos, classes, conjuntos, etc., está na mesma posição em que eu me encontro. O que está em causa não é apenas a minha maneira particular de estabelecer a aritmética, mas antes saber-se se a aritmética pode ter uma fundamentação lógica."

A dificuldade apontada por Russell ficou conhecida por paradoxo de Russell. Atentemos, primeiro, numa versão popular deste paradoxo: "Numa remota aldeia Siciliana, cuja única ligação ao exterior consistia num longo e estreito caminho a pique na montanha, o barbeiro local faz a barba a todos e somente àqueles aldeões que não se barbeiam a si próprios. Quem faz, então, a barba ao barbeiro?" Se ele faz a sua própria barba, então não a faz (pois o barbeiro *somente* faz a barba a quem não se barbeia a si próprio); se ele não se barbeia a si próprio então, de facto, faz a sua própria barba (pois o barbeiro faz a barba a *todos* os que não se barbeiam a si mesmos). Esta história não passa dum *puzzle* interessante, em que a conclusão a tirar é a de que tal aldeia, com tal barbeiro, não existe. No entanto a situação é séria se em vez de barbeiros e aldeões falarmos em classes e elementos. Com efeito, uma das convicções de Frege era a de que todo o conceito tinha extensão. Por exemplo, a extensão do conceito *ser homem* é a classe de todos os homens; a extensão do conceito *ser um número ímpar múltiplo de 6* é a classe vazia (i.e., sem elementos). Atente-se, porém, ao conceito *classe que não é membro de si própria* e considere-se a classe R, extensão deste conceito. Se R está em R então, por ser membro de si própria, não está em R; se R não está em R então, por não ser membro de si própria, está em R. Perante esta situação Frege interrogava-se:

> "E mesmo agora não vejo como se pode estabelecer cientificamente a aritmética, como podemos apreender os números como objectos lógicos, a não ser que nos seja permitido - pelo menos condicionalmente - passar de um conceito para a sua extensão. Posso falar sempre da extensão de um conceito? E no caso negativo como se reconhecem as excepções? Do facto de um conceito coincidir sempre em extensão com outro podemos inferir que um objecto que pertença a um também pertença ao outro? São estes os problemas levantados pela carta de Bertrand Russell."

O *Principia Mathematica* é um monumental "tour de force" para solucionar esta questão e fundamentar a tese de que a Matemática e a Lógica são idênticas. Finalmente o projecto não resultou, mas ficaram a conhecer-se as dificuldades que impediram levá-lo a bom termo e, não menos importante, ficou uma obra de grande influência para a Lógica.

O título deste trabalho - *Como ser Sério com Palavras Cruzadas* - é um "divertimento" baseado na impressão superficial de que os paradoxos não passam de inocentes jogos de palavras a que homens sérios não deveriam dar maior importância do que a passatempos como as palavras cruzadas. Aliás, a Lógica tem sempre sido (e continua a ser) objecto das mais variadas diatribes. Tome-se nota, por exemplo, do seguinte comentário de Henri Poincaré (1854-1912), um dos maiores matemáticos do final do século passado, a propósito do paradoxo de Russell: "La logique n'est plus stérile; elle engendre la contradiction!", no qual se podem pressentir alusões à pretensa esterilidade da lógica silogística e aos "monstros" que a nova lógica gera. O que acontece é que não são os paradoxos *per se* que têm importância, mas sim aquilo de que eles são sintoma[3] (e.g., sintoma que não se compreende bem um dado sistema conceptual). E, se é em regra muito díficil apontar exactamente o que está mal, as soluções, mesmo parciais, têm ajudado a clarificar certos conceitos e, por vezes, têm sido inesperadamente recompensadoras. Em geral, se for possível uma solução de equilibrio na corda bamba do cai-não-cai duma situação paradoxal, esta acaba por nos fornecer métodos de demonstração poderosos e originais, como é ilustrado exemplarmente pelo (primeiro) teorema da incompletude de Gödel, cujo argumento se baseia no paradoxo do Mentiroso, e que é, para todos os efeitos, uma das grandes realizações intelectuais deste século.

Indulgenciando-se num certo anacronismo inocente, vamo-nos servir de quatro paradoxos da Antiguidade como pretexto para introduzir alguns assuntos da Lógica recente. Assim, no ponto 2, discutem-se brevemente os três primeiros paradoxos apresentados. O quarto paradoxo, denominado *O Mentiroso*[4], é discutido com mais atenção: no ponto 3, apresentam-se três tentativas de o solucionar e, no ponto seguinte, discute-se a análise proposta pelo lógico de origem polaca Alfred Tarski (1905-1981), delineando-se como, a partir dessa análise, se pode obter o (primeiro) teorema da incompletude de Gödel. Deixa-se para o último ponto uma breve bibliografia anotada, onde se teve o cuidado de, na medida do possível, indicar trabalhos acessíveis e em português.

Certos extractos e versões preliminares deste trabalho foram lidos por Furtado Coelho, Manuel Lourenço, Marta de Mendonça e Franco de Oliveira. A eles agradeço a disponibilidade, as críticas e as sugestões. A Furtado Coelho também agradeço a cuidadosa revisão do texto, o amável convite para participar no ciclo de conferências a que se refere este volume e o interesse que sempre foi manifestando pela minha colaboração.

2. Os Paradoxos de Eubúlides

Atribuem-se a Eubúlides de Mileto - séc. IV a. C. - os quatro seguintes paradoxos:

A) **O Homem Embuçado.** "Tu dizes que conheces teu irmão. Mas o homem que acabou de entrar com a cabeça coberta é o teu irmão e não o conheceste."

B) **O Cornudo.** "O que não perdeste ainda conservas. Ora, não perdeste os teus cornos. Logo ainda tens cornos."

C) **O Calvo.** "Dirias que um homem era calvo se só tivesse um cabelo? Sim. Dirias que um homem era calvo se só tivesse dois cabelos? Sim. Dirias... etc. Então onde páras?"

D) **O Mentiroso.** "Uma pessoa diz que está a mentir. Aquilo que ela diz é verdadeiro ou falso?"

Os quatro exemplos acima são paradoxos no sentido estrito do termo, isto é, são asserções que põem em causa príncipios de raciocínio anteriormente aceites. Há outros sentidos, mais latos e informais, para o termo *paradoxo*: desde um facto que nos surpreende pela sua peculiaridade, até uma opinião que contradiz o que é comummente aceite. Por exemplo, pode dizer-se que *é paradoxal que os elefantes tenham medo dos ratos* ou, como Oscar Wilde, que *a única maneira de se livrar duma tentação é ceder-lhe*. Não obstante, no que se segue apenas se está interessado em paradoxos na acepção mais estrita da palavra.

A) O paradoxo do Homem Embuçado também é conhecido por paradoxo de Electra, pois alude a uma cena de reconhecimento da mitologia grega, em que Electra é confrontada com seu irmão Orestes. Só o génio grego se debruçaria sobre um episódio como este do ponto de vista lógico-analítico, fazendo jus a uma célebre observação de um sacerdote egípcio que considerava os gregos "comportando-se sempre como crianças, sem tradição de conhecimento nem conhecimento da tradição". Porém, com tradição ou não, os gregos tinham razão ao considerar que há uma dificuldade, um problema de carácter lógico, com esta cena de reconhecimento. O que está em causa é o *princípio de substituição da identidade,* o qual pode ser enunciado da seguinte maneira: se a e b são idênticos então toda a propriedade que vale para a também vale para b, e vice-versa. Contudo, se se tomar a e b como o irmão de Electra e o Homem Embuçado, respectivamente, e se se considerar a propriedade *ser conhecido por Electra* parece, então, surgir uma quebra deste princípio.

Analisemos, em primeiro lugar, uma situação mais simples mas não de somenos importância. Considerem-se as duas asserções:

(1) *Água é vida* é um conhecido aforismo.

(2) *H_2O é vida* é um conhecido aforismo.

Porque é que a substituição de *Água* pelo termo de idêntica referência *H_2O* altera o sentido da asserção? A resposta é clara: em (1) não é feita qualquer referência à água (dizendo-se que a palavra *Água* não ocorre numa posição referencial) sendo, sim, feita referência ao complexo *Água é vida* - o qual é o sujeito da asserção (1). Portanto a substituição deste sujeito por outro - *H_2O é vida* - não tem de preservar o sentido. Há, pois, que fazer a distinção entre a *menção* do aforismo, como é o caso em (1), e o seu *uso,* como acontece quando se exclama *Água é vida!* ao beber-se a água duma fonte fresca, depois duma longa caminhada num dia quente. Nas situações que envolvam *nomes* é salutar explicitar esta distinção entre o *uso* e a *menção,* de modo a evitar mal entendidos. Assim, se em

(3) Lisboa tem uma ponte sobre o Tejo,

se *usa* o nome da cidade de Lisboa, em

(4) Lisboa tem seis letras,

menciona-se o nome desta cidade, pois está-se a fazer referência à palavra *Lisboa* e não à cidade de Lisboa. A situação de potencial confusão tem origem no facto de se utilizar o mesmo nome para a cidade e para o (um dos) nome(s) da cidade! Na terminologia medieval a palavra *Lisboa* ocorre na asserção (3) em *suppositio formalis,* e em (4) em *suppositio materialis.* Os modernos, para distinguir os dois usos, convencionam colocar o nome entre comas quando o mencionam (quando em *suppositio materialis*). Assim, e de acordo com esta convenção, (4) escreve-se do seguinte modo:

(5) 'Lisboa' tem seis letras.

O problema levantado pelo paradoxo de Electra é, no entanto, muito mais subtil do que a mera confusão entre uso e menção. É, de facto, uma situação mais semelhante à seguinte:

"Pode afirmar-se, sem contradição, que o homenageado gostaria de falar com o Reitor de tal maneira que se possa negar que o homenageado gostaria de falar com o Presidente do Departamento de Física, apesar de, por investidura recente (mas desconhecida do homenageado), o Presidente do Departamento de Física ser o Reitor."[5]

O que sucede é que a primeira ocorrência do termo 'Reitor' no parágrafo acima não se situa numa posição *puramente referencial,* devido à forma verbal 'gostaria de falar'. Enquanto que em (1) é clara a razão porque a posição da palavra *Água* não é referencial (*Água* não é usada, é mencionada), na situação acima e no paradoxo de Electra apenas se pode adiantar que certas formas verbais como 'gostaria de falar' ou 'conhecer' têm a singular propriedade de fazer que o que se lhes siga não se situe em posição puramente referencial e que, *por causa disso,* o princípio de substituição da identidade não seja aplicável. Põe-se, então, a questão de como saber se um termo, numa determinada asserção, ocorre numa posição puramente referencial. É-se tentado a responder: *quando* a verdade ou falsidade da asserção não se altera sempre que se fizerem substituições por outros termos de idêntica referência, e que *apenas* nestes casos o princípio de substituição da identidade é válido. Um lógico, no entanto, torceria o nariz e diria: "Alto lá! Isto é circular! No fundo está a dizer-se que o princípio de substituição da identidade é aplicável se e somente se for aplicável!"[6]

Talvez se tenha de ser mais pragmático e ficar satisfeito com o seguinte: nas linguagens naturais confrontamo-nos com situações em que surgem termos em posições não puramente referenciais e o que há a fazer é *inventariar* essas situações, identificando-as através da *prática* linguística corrente. É uma solução, talvez mesmo a única solução para as linguagens naturais, mas um lógico gostaria de saber mais. Por exemplo, gostaria de saber quais as regras lógicas a que a utilização destas formas verbais obedece, ou qual a interpretação semântica a dar a asserções onde ocorram termos em posições não puramente referenciais. Estas questões são difíceis, e começam mesmo a interessar cientistas de outras disciplinas, como a Inteligência Artificial.

B) Qual a resposta à questão de saber se o Rei da América é coxo? Nem a afirmativa nem a negativa parecem ser correctas. Uma solução natural consiste em não atribuir sentido a esta questão, visto que 'Rei da América' não se refere a nenhuma entidade. Há, contudo, duas objecções simples a esta solução. Em primeiro lugar, que dizer duma asserção como 'Prestes João era um soberano esclarecido'? Visto não se saber se Prestes João existiu, a atribuição (ou não) de sentido a esta asserção assenta em factos empíricos, o que é, no mínimo, estranho. Em segundo lugar, seria ridículo dizer que a asserção 'O Rei da América não existe' não tem sentido porque o Rei da América não existe!!!

Outra solução possível seria afirmar que todas estas asserções têm sentido admitindo, porém, que algumas não sejam nem verdadeiras nem falsas, podendo assumir um terceiro valor *indeterminado.* Assim, 'O Rei da América é coxo' seria uma asserção de valor indeterminado, 'O Rei da América existe' seria falsa e 'Prestes João era um soberano esclarecido' seria verdadeira, falsa ou indeterminada, dependendo de Prestes João ter existido e ter sido, ou não, um soberano esclarecido. Repare-se que, neste caso, já não seria a atribuição de sentido à asserção que dependeria dos factos, mas sim - e como deve ser - a atribuição do seu *valor verdade*[7]. No entanto, esta solução exige a renúncia ao *princípio do terceiro excluído,* o qual afirma que toda a asserção declarativa, ou é verdadeira, ou é falsa, não sendo permitida uma terceira possibilidade. É-se confrontado com uma situação incómoda pois, não tendo sido avançado nenhum argumento que indique que as dificuldades residem na aceitação do princípio do terceiro excluído, o diagnóstico avançado não é convincente, podendo mesmo ter incorrido em erro. Para além disso surge um manancial de problemas ontológicos na tentativa de justificar a atribuição de sentido a todo este tipo de asserções, o que levou alguns filósofos a posições tão extremas como as de admitir *entes não existentes,* e.g. o Rei da América, ou, mesmo, *entes impossíveis,* e.g. o maior número primo.

Num artigo de 1905, Bertrand Russell avança uma solução que fornece, simultaneamente, um meio de prescindir das entidades *non grata*, de atribuir sentido às asserções e de manter o princípio do terceiro excluído. Esta solução, conhecida por *teoria das descrições,* opera transformando, dum modo sistemático, as asserções que envolvam termos sem referência noutras em que estes termos problemáticos não ocorrem. A maneira de o fazer não é efectuando substituições por termos equivalentes aos problemáticos (o que só iria deslocar o problema) mas fazendo uma espécie de *paráfrase.* Quando aplicado à asserção 'O Rei da América é coxo', o método de Russell substitui-a por 'Existe *x* tal que *x* é Rei da América e *x* é coxo'[8] a qual é falsa. Observe-se que o termo 'Rei da América' desaparece, surgindo em seu lugar a "descrição" (predicado) *x é Rei da América,* a qual não se instancia validamente para nenhum indivíduo. Note-se, também, que a negação da paráfrase em consideração é 'Não existe um *x* tal que *x* é Rei da América e *x* é coxo', a qual é verdadeira e distinta da asserção falsa 'Existe *x* tal que *x* é Rei da América e *x* não é coxo'. (Numa perspectiva clássica as duas asserções anteriores parecem confundir-se numa única, a saber 'O Rei da América não é coxo', sendo um mérito da solução de Russell efectuar esta distinção.) Note-se, ainda, que a asserção 'O Rei da América não existe' é, de acordo com a teoria das descrições, parafraseada por 'Não existe um *x* tal que *x* é Rei da América', cujo sentido é claro e que é, obviamente, verdadeira.

O cerne da solução de Russell consiste, por um lado, em considerar os termos sem referência como símbolos incompletos, com significado determinado apenas quando ocorrem no *contexto* duma asserção e, por outro lado, em dar primazia às asserções como unidades do discurso, ao invés da primazia tradicional dada às palavras.

A teoria das descrições é frequentemente apontada como exemplo paradigmático dum determinado modo de fazer filosofia, denominado genericamente de *filosofia analítica.* A grande tese deste *modus faciendi* filosófico é a de que *todos* os problemas filosóficos são, de facto, pseudo- -problemas originados por um uso tosco e acrítico do equipamento linguístico. A função da filosofia seria *analisar* com cuidado a linguagem e, em consequência, desmontar os *enigmas* filosóficos tradicionais.

C) O príncipio que está em causa no paradoxo do Calvo[9] é (a iteração de) o *modus ponens,* i.e., argumentos da forma "Se P então Q; ora P; logo Q". Com efeito, sabendo-se que um homem com *um* cabelo é calvo e que não é por ter mais um cabelo que um homem deixa de ser calvo, tem-se a seguinte situação:

Se um homem com um cabelo é calvo, então com dois cabelos também é calvo
Ora, um homem com um cabelo é calvo
Logo, um homem com dois cabelos é calvo
Se um homem com dois cabelo é calvo, então com três cabelos também é calvo
Ora, um homem com dois cabelos é calvo
Logo, um homem com três cabelos é calvo
Se um homem com três cabelos é calvo, então com quatro cabelos também é calvo
Ora, um homem com três cabelos é calvo
Logo, um homem com quatro cabelos é calvo
(...)

Se se continuar este raciocínio um número suficiente de vezes chega-se à conclusão absurda de que um homem com (por exemplo) dez mil cabelos é calvo.[10] Uma possível explicação para este paradoxo é a de que ‘calvície’ é um termo *vago,* sendo inadmissivel a sua utilização. Quer isto dizer que, não sendo possível adiantar um número específico de cabelos abaixo do qual um homem se considera calvo e a partir do qual deixa de o ser, então o conceito ‘calvície’ carece de rigor. Não se deve, porém, encerrar o caso com toda esta facilidade, até porque o termo ‘calvície’ é, de facto, *utilizado,* e utilizado de maneira informativa - se me for dito que o Sr. X, a quem serei apresentado, é calvo, não estarei certamente à espera de me encontrar com um homem de farta cabeleira.

É interessante averiguar as razões que subjazem à aceitação desta solução do paradoxo. Parece haver uma concepção metafísica a sustentar esta posição, nomeadamente a de que os objectos e os factos do mundo (ou os termos e as asserções da linguagem, se se preferir) devem ser *analisados* através de sucessivas decomposições até se chegar a partes discretas irredutíveis: os *átomos*. Ora, se é verdade que a concepção *analítica* é uma das bases da atitude científica, já não é necessário que a análise tenha de proceder no sentido de sucessivas decomposições, até à discretização. Não é de excluir que se possam descrever e analisar as "regras do jogo" da utilização dos termos vagos, o que daria origem à formulação duma lógica para esses termos.

A propósito desta discussão ocorre-me uma conversa com um reputado colega lógico o qual, depois de ter estudado aprofundadamente certas questões da física moderna, deu-se conta de que, se os físicos tomassem à letra o aparato de cálculo que utilizam, então facilmente cairiam em contradições. Mas, curiosamente, não caem. (Seria mais correcto afirmar: geralmente não caem...) E não caem porque seguem determinadas regras, não explícitas, a que imodestamente chamam de *intuição* física. Tornar explícitas essas regras é um trabalho muito díficil, incompreendido e ingrato: disse-me este colega que, depois de trabalhar mais de cinco anos com vista a obter uma fundamentação para a chamada Teoria da Grande Unificação, ficou perplexo por os físicos já considerarem essa teoria ultrapassada pois, entretanto, tinha surgido a nova *Teoria das Supercordas.*

3. *Insolubilia*

Atribui-se a Epimênides o dito segundo o qual "os cretenses são sempre mentirosos"[11] O facto de Epimênides ser, ele próprio, um cretense dá origem a certas dificuldades lógicas. Com efeito: o dito de Epimênides não pode ser verdadeiro (pois, a sê-lo, Epimênides, por ser cretense, estaria a mentir e, portanto, a dizer uma falsidade), concluindo-se que há cretenses que não são sempre mentirosos. Tal é perfeitamente razoável e credível, mas já não o é ter-se chegado a esta conclusão somente por meios lógicos, sem o recurso à verificação empírica[12]. Porém, se se considerar a "variação",

(1) Estou a mentir

ou, melhor ainda, e para evitar subjectivismos:

(2) Esta asserção é falsa,

surge um paradoxo. Com efeito, averigue-se se (2) é verdadeira ou falsa. Se é verdadeira então, por dizer uma verdade, é falsa. Contudo, se é falsa então, por dizer uma falsidade, é verdadeira. Chame-se a (2) *asserção de Epimênides*:

A asserção de Epimênides é verdadeira exactamente quando é falsa

Este paradoxo é mais grave do que todos os outros considerados, pois põe em causa o princípio que está na base de toda a racionalidade e que Aristóteles, há já mais de vinte e quatro séculos, considerava "o mais forte de todos": *o princípio da não contradição,* o qual afirma que uma asserção não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa.

Solução I: Uma solução radical para o paradoxo do Mentiroso consiste em banir da linguagem todas as asserções auto-referenciais e, em consequência, a de Epimênides. Esta solução é do tipo "deitar fora o bebé juntamente com a água do banho", pois há muitos exemplos de asserções auto-referenciais que não são problemáticas, como é o caso desta própria. As tentativas posteriores de fazer a distinção entre as auto-referências "boas e admissíveis" e as "problemáticas e inadmissíveis" têm sido pouco elucidativas e *ad-hoc.*

Solução II: Outra maneira de objectar ao paradoxo do Mentiroso é ilustrada pela atitude do filósofo inglês Gilbert Ryle (1900-1970), ao manter que (2) não especifica realmente uma asserção já que, se assim fosse, teria de ser possível eliminar o pronome demonstrativo *esta* mediante a indicação explícita daquilo a que ele se refere. *Esta* qual? Indique-se! Uma primeira tentativa para indicar a asserção a que o pronome se refere daria o seguinte mau resultado:

(3) ‘Esta asserção é falsa’ é falsa,

pois o demonstrativo volta a aparecer. Mas poder-se-ia continuar, substituindo *sempre* (2) por (3), obtendo:

(4) ‘ ‘ ‘...‘ ‘ ‘ ... ’ é falsa’ é falsa’... ’é falsa’ é falsa’ é falsa,

ad infinitum. Segundo Ryle, nunca se chega a uma especificação completa da asserção. Porém, o filósofo americano W.O. Quine (1908-) exibe uma asserção paradoxal que faz referência a si própria, sem utilizar pronomes demonstrativos, o que indica que o problema não se situa numa pretensa impossibilidade de especificação. A asserção de Quine é a seguinte:

(5) ‘Não dá origem a uma verdade quando se segue à sua própria citação’ não dá origem a uma verdade quando se segue à sua própria citação.

O sujeito de (5) é a asserção de treze palavras que se encontra entre comas, sendo (5) obtida quando este sujeito se segue à sua própria citação. Assim, se (5) é verdadeira, então o seu sujeito não dá origem a uma verdade quando se segue à sua citação, i.e., (5) é falsa. Se (5) é falsa, ou seja, no caso em que o sujeito de (5) dá origem a uma verdade quando se segue à sua citação, conclui-se que (5) é verdadeira. Surge, de novo, o fenómeno da auto-contradição.

Solução III: Ao argumentar-se que a asserção de Epimênides é auto- -contraditória está a fazer-se uso do princípio do terceiro excluído, pois começa por aceitar-se que, ou (2) é verdadeira, ou (2) é falsa. Seria este o príncipio que, na realidade, o paradoxo do Mentiroso põe em causa.

Há duas objecções simples a esta proposta. Primeiro, não se avança nenhum argumento que justifique ser o princípio do terceiro excluído aquele que está na raíz do paradoxo. No fundo, apenas se propõe que, de dois males, se escolha o menor. Depois, mesmo que admitamos um terceiro valor *indeterminado,* para além da *verdade* e do *falso,* a cabeça feia do paradoxo volta a aparecer com:

(6) Esta asserção é falsa ou indeterminada.

Com efeito, se (6) é verdadeira, então vem falsa ou indeterminada. Se não for verdadeira, então nem é falsa nem indeterminada, i.e., é verdadeira!

4. Os Resultados de Tarski e Gödel

Seguindo Frege, o lógico inglês Frank Ramsey (1903-1930) defendeu que a utilização das noções de *verdade* e *falso* é redundante. Dizer:

(6) É verdade que a neve é branca

seria o mesmo que dizer,

(7) A neve é branca.

Tarski partilha com Ramsey a ideia de *uma certa* redundância dos conceitos *verdade* e *falso.* Mas essa redundância é entendida de modos distintos por um e por outro. Para Ramsey, quando se assevera (6) não se está a falar a respeito da asserção (7): está a falar-se da neve e da sua alvura, i.e., para Ramsey (6) e (7) dizem *literalmente* a mesma coisa. Pelo contrário, para Tarski (6) fala a respeito da asserção 'A neve é branca' e diz que ela é verdadeira. Se se aplicar a convenção do *entre comas,* reescrever-se-á (6) assim,

(8) 'A neve é branca' é verdadeira.

Repare-se que o sujeito de (8) é o objecto *sintático* 'A neve é branca'. Segundo Tarski, (7) e (8) equivalem-se no seguinte sentido: dá-se o caso de (7) exactamente quando se tem (8).

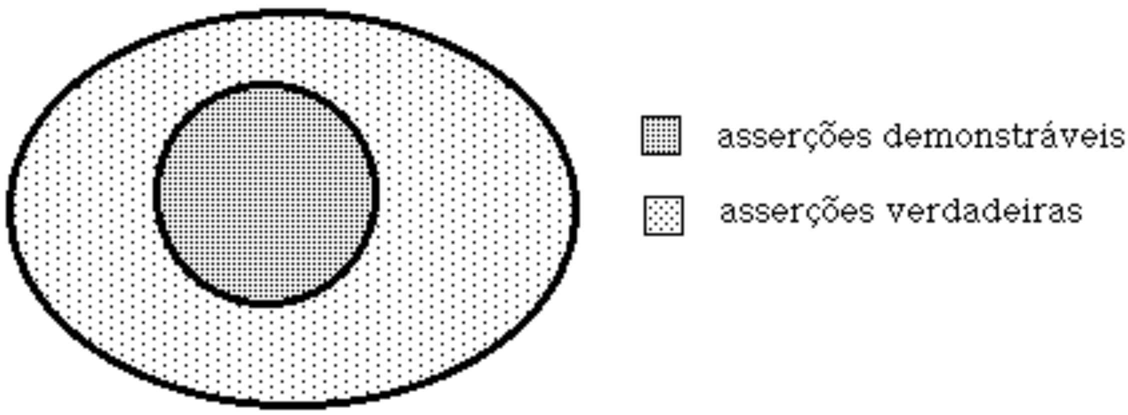
A grande contribuição de Tarski foi o ter argumentado que *ser verdadeiro* não pode ser considerado um predicado da linguagem, do mesmo modo que o é *ser branca*. Defina-se, com Tarski, uma *linguagem semanticamente fechada* como sendo uma linguagem em que: 1) valem as leis habituais da lógica, 2) é possível nomear as suas próprias expressões e manipulá-las dum modo simples, e 3) possui o predicado *ser verdadeiro.* Em tal caso, numa linguagem suficientemente especificada (por exemplo, numa linguagem formal), o paradoxo do Mentiroso, ou coisa similar, é considerado uma *demonstração* de que um tal sistema linguístico é inconsistente.

Assim, se houver razões para supor que um determinado sistema linguístico é consistente, e que nele valem as condições 1) e 2) acima referidas, então é forçoso concluir que *ser verdadeiro* não é um predicado da linguagem. É este o caso com a formalização da aritmética no contexto da lógica relacional, a denominada *aritmética de Peano:* o lógico e matemático austríaco Kurt Gödel (1906-1978) mostrou que é possível nomear as expressões da linguagem da aritmética de Peano nela própria através do artifício da *codificação.* (A ideia é simplesmente associar a cada expressão aritmética, que é um objecto sintático bem determinado, um seu *número de código,* o que permite mencionar as expressões aritméticas *na aritmética* fazendo apelo aos seus códigos.) Neste contexto o paradoxo do Mentiroso dá origem a uma demonstração do seguinte teorema:

Teorema da Indefinibilidade da Verdade (Tarski, 1936)

O conjunto constituído pelos números que são códigos de asserções aritméticas verdadeiras não é definível por um predicado aritmético (i. e. um predicado da linguagem da aritmética de Peano).[13]

Em 1931 Gödel mostrou que o predicado *ser demonstrável* (a partir de um dado - e em certos respeitos qualquer! - conjunto de axiomas) é um predicado aritmético, i. e., há uma fórmula da linguagem da aritmética (que Gödel exibiu) que é verificada, precisamente, por todos os números que são códigos de asserções demonstráveis na aritmética de Peano. Como toda a asserção demonstrável é verdadeira, tem-se a seguinte situação:



em que os dois conjuntos não coincidem, visto um ser definível aritmeticamente (o das asserções demonstráveis) e o outro não o ser (o das asserções verdadeiras). Tem-se, pois,

Teorema da Incompletude de Gödel

Qualquer que seja o sistema axiomático verdadeiro para a aritmética, há sempre asserções aritméticas verdadeiras que não se demonstram no sistema.[14]

Como já se observou, o ponto fundamental da análise Tarskiana de *verdade* é o de que, em linguagens consistentes suficientemente fortes (i.e. em que valem as condições 1 e 2 acima mencionadas), *ser uma asserção verdadeira* não é um predicado da linguagem. Mas nada impede que se possa considerar um tal predicado numa outra linguagem - uma *metalinguagem* - onde, é claro, *ser uma asserção verdadeira* refere-se às asserções da linguagem original. É, pois, possível tratar a noção de verdade como um predicado desde que se faça uma *ascensão semântica* :

Tentemos, agora, tornar mais precisa a ideia atrás avançada duma certa redundância do conceito de *verdade* : com efeito, Tarski apresenta uma maneira engenhosa - a sua célebre "definição de verdade" - de reduzir certas asserções metalinguísticas onde ocorre a palavra *verdade* a asserções linguísticas. Decorre desta "definição" o seguinte esquema, o qual, de acordo com Tarski, é condição *sine qua non* para abordar, de forma correcta, a *verdade:*

____ é verdadeira se, e somente se, ____

onde ____ é o lugar a preencher por uma qualquer asserção da linguagem e ____ o lugar a preencher pelo nome dessa asserção. Por exemplo, se a asserção for *A neve é branca* tem-se a caso:

'A neve é branca' é verdadeira se, e somente se, a neve é branca.[15]

Desta análise não é, no entanto, lícito concluir que o conceito de *verdade* é totalmente redundante. Como o próprio Tarski exemplifica, o actual conhecimento histórico não nos oferece qualquer possibilidade de eliminar a palavra *verdadeira* de:

A primeira asserção escrita por Platão é verdadeira.[16]

5. Sugestões Bibliográficas.

Para uma visão de conjunto da história da lógica, desde as origens na Grécia Antiga, até aos anos trinta deste século, deve consultar-se,

"O Desenvolvimento da Lógica", de William e Martha Kneale (1ª edição inglesa de 1962). Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1972; viii+773 pp.

Em,

"Os Grandes Filósofos", de Bryan Magee (edição inglesa de 1987). Editorial Presença, Lisboa 1989

encontra-se uma entrevista com o filósofo britânico A. J. Ayer sobre Frege, Russell e a filosofia analítica. Aliás, todo o livro é recomendável, pois oferece uma visão panorâmica da filosofia através de várias entrevistas a diversos filósofos contemporâneos. Uma discussão detalhada de certas partes da obra lógica de Bertrand

Russell, incluindo a teoria das descrições, e uma bibliografia muito informativa podem encontrar-se na seguinte tese de mestrado,

"A Filosofia do Atomismo Lógico de Bertrand Russell", de Adriana Silva Graça. Universidade Clássica de Lisboa, 1991; 270 pp.

Sobre a Lógica Relacional publicaram-se, recentemente, duas exposições de autores portugueses:

"Lógica e Aritmética: uma introdução informal aos métodos formais", de Augusto Franco de Oliveira. Edições Gradiva, Lisboa 1991; 204 pp.

"Teoria Clássica da Dedução", de Manuel Lourenço. Assírio & Alvim, Lisboa 1991; 318 pp.

Breves e menos técnicos são os artigos "Lógica" e "Formalização" de Hilary Putnam em:

"Lógica e Combinatória", Enciclopédia Einaudi (vol. 13). Direcção de Ruggiero Romano; Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1988.

O panorama editorial português no que concerne à tradução das obras fundamentais da filosofia anglo-saxónica deste século alterou-se, nos últimos anos, da quase inexistência para um despertar animador. No entanto, é necessário alguma precaução com algumas traduções que, sendo no geral bastante aceitáveis, enfermam de quando em quando de erros grosseiros (em particular, no que diz respeito à terminologia técnica). O seguinte livrinho foi um "panfleto" que marcou uma época:

"Verdade, Linguagem e Lógica", de A.J. Ayer (1ª edição inglesa de 1936). Editorial Presença, Lisboa 1991; 177 pp.

A entrada "Referência/Verdade" de H. Putnam na Enciclopédia Einaudi (op. cit), é uma exposição muito clara sobre o conceito de verdade. O artigo clássico de Tarski sobre este assunto está traduzido para português em:

"Existência e Linguagem: ensaios de metafísica analítica", Tarski e outros. Organização de João Branquinho; editorial Presença, Lisboa 1990.

Esta colectânea também inclui artigos influentes de Quine e Davidson. Outros artigos destes autores , também de Putnam, encontram-se em,

"Dicionário do Pensamento Contemporâneo", vários autores portugueses e estrangeiros. Direcção de Manuel Maria Carrilho; publicações Dom Quixote, Lisboa 1991.

"Epistemologia: posições e críticas", vários autores. Organização de Manuel Maria Carrilho; edição da Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa 1991.

O artigo de Gödel "Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I", onde se demonstra o primeiro teorema da incompletude, está traduzido para português:

"O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo", Gödel e outros. Organização de Manuel Lourenço; edição da Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa 1979.

O original em alemão (e uma tradução para inglês), juntamente com alguns comentários e notas biográficas sobre Gödel, pode encontrar-se em:

"Kurt Gödel: Collected Works", vol. I. Organização de S. Feferman e outros; Oxford University Press, Nova Iorque, 1986.

É, no entanto, temerário começar pelo artigo original de Gödel se se quiser estudar uma exposição completa dos resultados de incompletude. Para isso sugere-se o seguinte trabalho, muito competente, dirigido a estudantes avançados de filosofia e/ou matemática:

"Computability and Logic", de George Boolos e Richard Jeffrey. Cambridge University Press, 1980; 285 pp.

Porém, é conveniente uma palavra de aviso: neste livro proliferam argumentações matemáticas, ainda que se procure reduzir ao mínimo as questões técnicas alheias às ideias principais. Para um público mais geral há várias sugestões possíveis. Por exemplo, o artigo "Recursividade" de H. Putnam na Enciclopédia Einaudi (op. cit.). Mais conciso é:

"Algumas Notas sobre Questões de Fundamentação de Matemática", de António Monteiro. Revista *Lusíada* nº2, Lisboa 1990; pp. 289-298.

De carácter diferente, mas muito interessante, sugiro

"Gödel, Escher and Bach: an eternal golden braid", de Douglas Hofstadter. Penguim Books 1980; 777 pp.

que é uma obra de divulgação (Prémio Pulitzer de 1980) bem pensada e divertida. Sobre a Filosofia da Lógica e da Matemática encontram-se traduzidos para português os artigos "Equivalência", "Possibilidade/ necessidade" e "Dedução/demonstração" de H. Putnam na Enciclopédia Einaudi (op. cit.) e os artigos "Lógica" de R. Feys e "Filosofia da Matemática" de A. Fraenkel em,

> "A Filosofia no Século XX" (1ª edição alemã de 1963). Edição da Fundação Calouste Gulbenkian, 1983.

Gostaria de terminar sugerindo a leitura dum "dicionário à la Voltaire", pleno de sagacidade, elegância e humor:

> "Quiddities: an intermittently philosophical dictionary" de W. O. Quine. Harvard University Press, 1987; 249 pp.

N o t a s

† *Deus existe porque a matemática é consistente, e o Demónio existe porque não podemos prová-lo.*

1 O grande avanço a que o texto se refere foi a invenção dos *quantificadores;* adiante-se, no entanto, que quatro anos depois de Frege, O.H.Mitchell - um estudante de C.S.Peirce (1839-1914) - redescobre a quantificação. O primeiro esforço bem sucedido de "matematização" da lógica deve-se a G. Boole (1815-1864): porém, o fragmento de lógica "algebrizado" por Boole é, num sentido que se poderia tornar preciso, de muito débil poder expressivo.

2 *É uma consolação para os infelizes ter companheiros na desgraça.*

3 Um formalista ingénuo defenderia a tese de que a matemática consiste, tão somente, em manipulações, devidamente regulamentadas, mas intrinsecamente *sem sentido,* de símbolos: uma espécie de jogo intelectual de elevado nível (?!!). Nesta perspectiva, um paradoxo seria o fim do jogo: mais precisamente, a prova de que o jogo tornara-se, afinal de contas, numa trivialidade (pois, de uma contradição, tudo se pode demonstrar).

4 Os lógicos medievais deram o nome de *insolubilia* aos paradoxos do género do Mentiroso.

5 Uma situação semelhante a esta é discutida no cap. IV de *Word & Object,* de W.O. Quine (M.I.T. Press, 1960).

6 Em sistemas lógicos extensionais, como a lógica de 1ª ordem - onde toda a matemática tradicional pode ser formalizada - o príncipio de substituição da identidade é um *teorema* destes sistemas. Noutras lógicas, este príncipio é encarado como a *definição* de quando um termo ocorre numa posição puramente referencial. Diz-se dum termo que ocorra numa posição puramente referencial, que se usa *de re*. Caso contrário, *de dicto*.

[7] O *valor verdade* de uma asserção é *verdadeiro* se é verdadeira, e *falso* se é falsa. No caso em consideração há um terceiro *valor verdade* : o *indeterminado.*

[8] Em boa verdade, a asserção "O Rei da América é coxo" deveria ter sido parafraseada por "Existe um único x tal que x é Rei da América e x é coxo", já que a teoria de Russell põe em evidência, para além da conotação de *existência,* a conotação de *unicidade.* Para evitar certos aspectos técnicos, ignora-se a conotação de unicidade.

[9] O paradoxo do Calvo também é conhecido por paradoxo de *sorites,* a palavra grega para *monte.* Considere-se um monte de areia: se se retirar um grão de areia a esse monte, o que sobra ainda é um monte de areia: "nada é mais absurdo que, ser ou não ser um monte de areia, dependa de *um* grão de areia", já asseverava Carnéades no século II a.C. No entanto, desta asserção incontroversa, pode concluir-se que uma colecção com um só grão de areia forma um monte de areia.

[10] A sugestão de que o paradoxo do Calvo não tem nada a ver com a iteração de *modus ponens* sendo, sim, mais um puzzle em torno do conceito de *continuidade,* ilude a questão. Enquanto que nos puzzles de continuidade a dificuldade situa-se no "pequeno" (o *infinitésimo,* por exemplo), no paradoxo do Calvo o "pequeno" é claro, preciso e discreto - a saber, um fio de cabelo - residindo o problema n(um)a (predicação da) totalidade (dos cabelos). São as dificuldades que advêm desta predicação que tornam o paradoxo interessante.

[11] Na Bíblia, em *Tito,* I, 12, vem referido este episódio.

[12] O leitor atento reparará que esta asserção não é inteiramente correcta. Com efeito, foram usados dois dados empíricos: os factos de Epimênides ser cretense e de ter dito que "os cretenses são sempre mentirosos". Observe-se, no entanto, que o dito de Epimênides (por ser falso) não é testemunha da conclusão (de que há cretenses que não são sempre mentirosos). Não se está, pois, numa situação como aquela em que eu, sendo português, afirmo que "há portugueses que escrevem frases com exactamente sessenta e três letras".

[13] O sistema linguístico constituído pelas asserções verdadeiras da linguagem da aritmética de Peano é consistente, já que tal é sempre o caso para qualquer conjunto de asserções que são verdadeiras num determinado modelo (aqui o modelo em questão é o conjunto dos números naturais imbuído das operações aritméticas elementares). Assim, e como se observa no parágrafo que precede o enunciado do Teorema de Tarski, estamos perante um sistema linguístico consistente em que valem as condições 1) e 2). Se, por absurdo, o conjunto constituído pelos números que são códigos de asserções aritméticas verdadeiras fosse definível por um predicado aritmético, então seria possível construir na linguagem da aritmética de Peano uma "asserção de Epimênides". Tal daria origem a uma contradição. Mais rigorosamente, se a fórmula T(x) definisse a verdade aritmética, i.e., *T(n) se. e somente se, n é o número de código duma asserção verdadeira*, para todo o número natural n, então as condições 1) e 2) permitiriam construir uma asserção *E* (a "asserção de Epimênides") para a qual vale *T('E') se, e somente se, não-E*, onde 'E' é o número de código da sentença E. Se E é verdadeira, *não-E* é falsa e infere-se que não-T('E'), i.e., *E* é falsa. Se *E* é falsa, *não-E* é verdadeira e conclui-se que T('E'), i.e., *E* é verdadeira. Contradição. QED.

[14] Esta formulação do 1º teorema da incompletude é devida a Tarski em 1933. A versão original de Gödel data de 1931. O 2º teorema da incompletude, também de

Gödel, afirma (numa sua versão) que a consistência da aritmética (de Peano) não se demonstra na própria aritmética (de Peano). Veja-se a citação de André Weil (1906-) que abre este trabalho.

[15] Como explica Quine, atribuir verdade à sentença 'A neve é branca' é atribuir alvura à neve. *Truth is disquotation,* observa dum modo provocante, mas perspicaz.

[16] Tecnicamente, *verdade* não é redundante pois a "definição de Tarski" não permite (em geral) reduzir à linguagem as asserções metalinguísticas onde a palavra *verdade* se predica sobre variáveis sentenciais *quantificadas.* É o caso em atenção, cuja forma lógica se pode patentear por: *a asserção S tal que S foi a primeira asserção escrita por Platão* é verdadeira.