Boletim da SPM - nº 38
Abril de 1998

TEORIA DOS CONJUNTOS: UMA VISTA*

Fernando Ferreira
Departamento de Matemática – FCUL

A criação da teoria dos conjuntos é obra do matemático Georg Cantor (1845-1918), e nasceu da tentativa de solucionar um problema técnico de matemática na teoria das séries trigonométricas. Essa tentativa levou Cantor a introduzir a noção de ordinal e, mais tarde, a de cardinal. Cantor demonstrou teoremas de grande alcance, notavelmente o seu célebre teorema da não equi-cardinalidade entre um conjunto e o conjunto das suas partes através dum argumento de diagonalização. Neste primeira fase de desenvolvimento da teoria dos conjuntos, lidava-se intuitivamente com os conjuntos, tomando-os como agregados arbitrários de elementos – mesmo que juntos dum modo intuitivamente artificial – que tanto podiam ser em número finito como em número infinito. Cada conjunto constituía um objecto único, bem determinado pelos seus elementos (veja-se o Axioma da Extensionalidade: dados conjuntos x e y, se x e y têm exactamente os mesmos elementos, então $x = y$) e do mesmo género dos seus constituintes (um conjunto pode, por sua vez, ser um elemento de outro conjunto). O desenvolvimento da noção de conjunto veio a revelar-se duma tal maleabilidade e eficácia que acomodou as construções matemáticas então conhecidas e, inclusivamente, providenciou novas construções. Estes feitos vieram naturalmente ao encontro duma clarificação conceptual da matemática, já em curso com – por exemplo – a substituição da noção problemática de infinitesimal pela noção rigorosa de limite devida a Karl Weierstrass. Finalmente, mas não menos importante, a teoria dos conjuntos constitui um enquadramento

*Este papel é uma expansão e adaptação da entrada "Teoria dos Conjuntos" da *Enciclopédia Filosófica de Linguagem, Lógica e Pensamento*, editada por João Branquinho e Desidério Murcho (a aparecer). Fomos levados a escrever esta versão para o Boletim para compartilhar com os colegas matemáticos portugueses um pouco da beleza e profundidade da moderna (e menos moderna) teoria dos conjuntos. Na versão que aqui apresentamos, omitimos as referências a outras entradas da Enciclopédia – adaptando o texto quando necessário – e inserimos discussões sobre grandes cardinais e teoria descritiva dos conjuntos as quais, não sendo adequadas ao público da Enciclopédia, julgamos ser interessantes para os leitores deste Boletim.

para a unificação das várias disciplinas da matemática (álgebra, geometria, análise, etc.). Podemos, pois, dizer que a maleabilidade das construções da teoria dos conjuntos, o seu contributo para a clarificação conceptual e para a unificação da matemática e, por fim, a teoria do infinito de Cantor – hoje amplamente aceite, ou pelo menos admirada – contribuiram para a progressiva aceitação da teoria de conjuntos.

A principal maneira de formar um conjunto é através duma propriedade: esta individua como conjunto o agregado das entidades que a possuem. É o chamado Princípio da Abstracção. Na viragem para o século XX, descobriu-se que o uso irrestrito deste princípio origina paradoxos, como é o caso do paradoxo de Russell, do paradoxo de Cantor, ou do paradoxo de Burali-Forti. O aparecimento destes paradoxos põe fim a uma fase ingénua de desenvolvimento da teoria dos conjuntos e dá início a uma busca dos princípios que subjazem à formação de conjuntos.

As duas primeiras tentativas sistemáticas de axiomatização da teoria dos conjuntos devem-se a Bertrand Russell e a Ernst Zermelo. A tentativa de Russell baseia-se na suposição de que os paradoxos são fruto de violações do Princípio do Círculo Vicioso e que, para as evitar, é mister distinguir-se duma forma sistemática vários *tipos* lógicos (o que deu origem à Teoria dos Tipos). Deve, no entanto, apontar-se que a teoria dos tipos de Russell não é, literalmente, uma teoria de conjuntos: é antes uma teoria lógica de funções proposicionais. A ideia da teoria de Zermelo é totalmente diferente: é a de que os paradoxos surgem por que se admitem agregados demasiado *grandes* (uma ideia similar também ocorreu a Russell em 1906). Modernamente, a teoria de Zermelo formula-se na linguagem do Cálculo de Predicados com igualdade munida de um símbolo relacional binário não lógico $\in$ (o símbolo de *pertença*), cuja interpretação intuitiva é "ser elemento de". A teoria de Zermelo-Fraenkel ZF é hoje amplamente aceite pelos especialistas da teoria dos conjuntos. Antes de passar a descrever com um certo detalhe esta teoria (e outras a ela associadas), queremos brevemente mencionar a existência de mais quatro teorias dos conjuntos. Duas delas, NBG e MK, são extensões de ZF especialmente fabricadas para admitir colecções *grandes* – as classes. As outras duas, devidas a Willard Quine, não são extensões de ZF e, nas suas raízes, baseiam-se ainda na intuição original de Russell no que diz respeito ao papel do Princípio do Círculo Vicioso. Sobre estas duas últimas teorias, NF (*New Foundations*) e ML aplica-se exemplarmente o seguinte comentário de Russell: "nem o mais inteligente dos lógicos teria pensado nelas se não soubesse das contradições".

A pedra de toque da axiomática de Zermelo de 1908 é o Axioma de Separação (*Aussonderungsaxiom*). Este axioma é, na formulação moderna, um axioma esquema:

$$\forall w \exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow (\pi(x) \wedge x \in w))$$

onde $\pi(x)$ é uma fórmula da linguagem na qual a variável y não ocorre livre. Este esquema de axiomas (um para cada fórmula π) diz-nos que dado um conjunto w e uma fórmula π, é possível separar os elementos de w em dois conjuntos – no conjunto dos elementos de w que satisfazem π e no conjunto dos elementos de w que não satisfazem π (esta última parte obtem-se da formulação acima com a fórmula $\neg\pi$ em vez de π). Ao contrário do princípio da abstracção que leva a contradições, o *Aussonderungsaxiom* evita as contradições conhecidas ao limitar *a priori* por um conjunto dado w o tamanho do conjunto y a formar. É claro que o Axioma da Separação só é eficaz se houver muitos destes conjuntos w para começar, ou seja, só temos realmente uma teoria de conjuntos digna desse nome se assegurarmos a existência dum suprimento razoável de conjuntos à partida e modos de formar conjuntos. É esse o papel dos chamados axiomas de existência de ZF. São eles os seguintes:

3. Axioma dos Pares: $\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$
4. Axioma da União: $\forall x \exists y \forall z (\exists w (w \in x \wedge z \in w) \Rightarrow z \in y)$
5. Axioma das Partes: $\forall x \exists y \forall z (z \subseteq x \Rightarrow z \in y)$
6. Axioma do Infinito: $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x))$

Os axiomas 1 e 2, conspícuos pela sua ausência, são respectivamente o Axioma de Extensionalidade e o *Aussonderungsaxiom.* Por motivos técnicos, consideramos também um axioma 0, de existência do conjunto vazio: o axioma '$\exists x \forall y (y \notin x)$'. A leitura dos axiomas 3, 4 e 5 é simples: eles permitem-nos, respectivamente, formar (com a ajuda do Axioma da Separação) os conjuntos $\{x, y\}$, $\bigcup x$ e $\mathcal{P}(x)$. O Axioma do Infinito permite-nos formar o conjunto ω dos números naturais.

Em 1922, Thoralf Skolem e Abraham Fraenkel (independentemente) propuseram um novo axioma esquema, denominado *Axioma Esquema da Substituição.* Dada uma fórmula $\phi(x, y)$ da linguagem da teoria dos conjuntos e um conjunto w, dizemos que a fórmula $\phi(x, y)$ tem carácter *funcional* em w se, para qualquer elemento $x \in w$, existir um e um só elemento y tal que $\phi(x, y)$ vale. O Axioma da Sustituição diz-nos que, neste caso, podemos constituir como conjunto a colecção dos elementos y para os quais existe $x \in w$ tal que $\phi(x, y)$ vale. Simbolicamente, para cada fórmula $\phi(x, y)$ da linguagem da teoria dos conjuntos na qual a variável z não ocorre livre, tem-se o axioma:

2'. Axioma da Substituição: $\forall w(\forall x \in w \exists^1 y\, \phi(x,y) \Rightarrow \exists z \forall y(y \in z \Leftrightarrow \exists x \in w\, \phi(x,y)))$

Tanto Skolem como Fraenkel observaram que, sem este axioma, não se pode demonstrar a existência dum conjunto de cardinalidade $\aleph_\omega$. Mais tarde, John von Neumann (1928) desenvolveu uma teoria dos ordinais usando à saciedade o Axioma da Substituição (sem este axioma não é possível construir o ordinal de von Neumann $\omega+\omega$, nem é possível mostrar que toda a boa-ordem é isomorfa a um ordinal). Na teoria dos ordinais de von Neumann, um ordinal α é igual ao conjunto dos seus predecessores e a relação de ordem entre ordinais é a relação de pertença. Finalmente, na presença do Axioma da Substituição o *Aussonderungsaxiom* é redundante (deve, contudo, observar-se que isto não é o caso para certas formulações alternativas do Axioma da Substituição).

A axiomática da teoria dos conjuntos ZF (de Zermelo-Fraenkel) consiste nos axiomas 0, 1, 2', 3, 4, 5, 6 e no seguinte axioma, denominado de Axioma da Fundação (*Fundierungsaxiom*):

7. Axioma da Fundação: $\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)))$

Este axioma aparece num trabalho de Zermelo de 1930 e baseia-se em ideias anteriores de von Neumann (1928) e Dimitry Mirimanoff (1917). O Axioma da Fundação espelha fielmente a chamada *concepção iterativa dos conjuntos*. De acordo com esta concepção, um conjunto é uma colecção que aparece nalguma das seguintes etapas. A etapa 0 é formada pelo conjunto dos átomos ou protoelementos ("Urelemente"). A etapa 1 contém os protoelementos (as etapas acumulam) e todos os conjuntos de protoelementos. Por exemplo, se houverem dois protoelementos a e b, a etapa zero é o conjunto $\{a,b\}$ e a etapa 1 é o conjunto $\{a,b,\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Se não houver protoelementos, a etapa 0 reduz-se ao conjunto vazio e a etapa 1 ao conjunto $\{\emptyset\}$. A etapa 2 é constituida pelos elementos da etapa 1 e por todos os conjuntos formados com estes elementos. E assim sucessivamente. Para cada número natural temos definido um conjunto E_n das entidades formados até à etapa n. A seguir a todas as etapas indexadas pelos números naturais, define-se a etapa E_ω que consiste na reunião de todas estas etapas, i.e.,

$$E_\omega = \bigcup_n E_n\,.$$

E continuamos, definindo-se a etapa $E_{\omega+1}$ como aquela cujos elementos são os da etapa anterior (a etapa E_ω) em reunião com todos os seus subconjuntos; depois vêem as etapas $E_{\omega+2}$, $E_{\omega+3}$, *etc.*, $E_{\omega+\omega}$, $E_{\omega+\omega+1}$, ... Vamos tentar ser um pouco mais sistemáticos. Para além da etapa inicial – a dos protoelementos – há dois princípios geradores de etapas. O primeiro princípio diz que existe uma etapa imediatamente a seguir a uma dada etapa e que esta última se obtém da precedente juntando aos seus elementos os conjuntos que se podem formar com esses elementos. O segundo princípio permite passar dum segmento inicial de etapas sem máximo, previamente formado, para a etapa que lhe vem imediatamente a seguir – a qual consiste na união de todas as etapas anteriores.

A concepção iterativa dos conjuntos – em que estes são as colecções que aparecem, mais cedo ou mais tarde, numa das etapas atrás descritas – é menos simples que a concepção ingénua – ligada ao uso irrestrito do princípio da abstração – mas, ao contrário desta, evita os paradoxos conhecidos. A concepção iterativa pode espelhar-se formalmente na teoria ZF: nesta formalização, os índices das etapas são os números ordinais e as etapas (denotadas frequentemente por V_α) definem-se por Recorrência Transfinita:

1. $V_0 = \emptyset$;
2. $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;
3. Dado α um ordinal limite, $V_\alpha = \bigcup_{\lambda<\alpha} V_\lambda$.

(Demonstra-se que $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$ e que, portanto, esta hierarquia é cumulativa.) O *Fundierungsaxiom* é, na presença dos restantes axiomas de ZF, equivalente a dizer que todo o conjunto está nalgum V_α, para algum ordinal α. Simbolicamente:

$$\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha).$$

A teoria ZF é uma teoria *pura* de conjuntos, ao passo que a axiomática de Zermelo de 1908 permitia a existência protoelementos. Por outro lado, Zermelo também incluiu outro axioma de existência na sua axiomática: o denominado Axioma da Escolha. A existência ou não de protoelementos não levanta problemas conceptuais de maior, ao contrário do Axioma da Escolha que é polémico pelo seu carácter não construtivista. Modernamente, se quisermos incluir o Axioma da Escolha numa teoria de conjuntos é costume notacional juntar à sua sigla a letra “C”(de *choice*): a teoria ZFC é a teoria ZF com o Axioma da Escolha.

Em 1938, Kurt Gödel demonstra a consistência relativa do Axioma da Escolha e da Hipótese do Contínuo (HC). Gödel define, por recorrência transfinita, a denominada hierarquia dos conjuntos *construtíveis*:

1. $L_0 = \emptyset$
2. $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$
3. Dado α um ordinal limite, $L_\alpha = \bigcup_{\lambda<\alpha} L_\lambda$

onde $\mathcal{D}(X)$ é uma noção técnica de definibilidade: $\mathcal{D}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos de X que são definíveis com parâmetros em X por uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos (relativizada a X). A classe,

$$L = \bigcup_{\alpha} L_\alpha$$

denomina-se universo dos conjuntos *construtíveis*. Gödel mostrou que L satisfaz todos os axiomas de ZF, i.e., L é um *modelo* (denominado, tecnicamente, de *interno*) da teoria dos conjuntos ZF. Mais precisamente, Gödel mostrou que as *relativizações* dos axiomas da teoria dos conjuntos ZF a L (i.e., substituindo-se sistematicamente nos axiomas as quantificações $\forall x$ e $\exists x$ por, respectivamente, $\forall x \in L$ e $\exists x \in L$) são demonstráveis em ZF. Adicionalmente, as relativizações do Axioma da Escolha e da Hipótese Generalizada do Contínuo também se demonstram em ZF. É este o cerne das demonstrações de consistência de Gödel.

A construção de Gödel mostra, mais fortemente, que o *Axioma da Construtibilidade* (denotado na literatura pela sigla $V = L$),

$$\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$$

é consistente relativamente a ZF. Este resultado deve-se ao facto da definição de L ser *absoluta* em qualquer modelo interno, i.e., se interpretarmos a definição de L num modelo interno W obtemos uma classe $L_W \subseteq W$ que coincide com L. Em particular, $L_L = L$, i.e., o Axioma da Construtibilidade vale em L. (Um exemplo duma noção não absoluta é a noção "ser cardinal". É possível que um ordinal seja um cardinal em L sem que o seja no universo, pois o universo pode conter bijecções que não estão em L.)

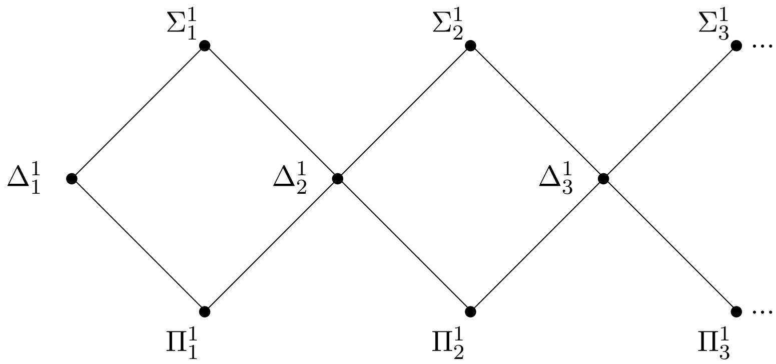
O Axioma da Construtibilidade veio esclarecer parcialmente algumas questões pendentes em Teoria Descritiva dos Conjuntos, a disciplina da teoria dos conjuntos que se debruça sobre conjuntos de números reais e funções reais de variável real que se podem definir de modo "explícito". Não estaremos muito longe da verdade se dissermos que a disciplina da teoria descritiva dos conjuntos se fundou em 1905 com a memória de Henri Lebesgue *Sur les fonctions représentables analytiquement.* Nesta memória encontram-se dois resultados notáveis. Primeiro, o de que a hierarquia de Borel é uma hierarquia própria (Lebesgue não formulou exactamente assim o resultado, mas para a nossa discussão isso pouco importa). Os conjuntos Borelianos (*viz.*, os conjuntos da menor σ-álgebra nos reais que contém os conjuntos abertos) podem classicar-se através duma hierarquia indexada nos ordinais contáveis (não nulos):

1. $\Sigma^0_1 = \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ é aberto}\}$;
2. $\Pi^0_\alpha = \{X \subseteq \mathbb{R} : \mathbb{R} \setminus X \in \Sigma^0_\alpha\}$;
3. $\Sigma^0_{\alpha+1} = \{X \subseteq \mathbb{R} : X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \text{ onde cada } X_n \in \Pi^0_\alpha\ \}$;
4. Dado α um ordinal limite, $\Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\lambda<\alpha} \Sigma^0_\lambda$.

A família dos conjuntos fechados é a família Π^0_1, enquanto que os conjuntos Σ^0_2 e Π^0_2 são também conhecidos por conjuntos F_σ e G_δ, respectivamente. O resultado de Lebesgue é o de que se $\alpha < \beta$ são ordinais contáveis (não nulos), então Σ^0_α está contido *propriamente* em Σ^0_β. Este é o primeiro resultado duma longa lista de resultados de *hierarquia* – peculiares à lógica matemática, à teoria dos conjuntos e a outras disciplinas da matemática – tendo sido obtido por meio dum uso engenhoso das técnicas de enumeração e diagonalização de Cantor. O segundo resultado de Lebesgue – e correspondente demonstração – também é seminal em teoria descritiva dos conjuntos. Lebesgue define *explicitamente* um conjunto que é mensurável à Lebesgue mas que não é Boreliano. Nessa definição, Lebesgue encara pela primeira vez os números reais como "codificações"de outros objectos, nomeadamente de ordens bem-fundadas. Esta manobra antecipa um método de demonstração que entretanto se tornou muito importante em lógica matemática e teoria dos conjuntos.

A memória de Lebesgue também contém um erro famoso, descoberto dez anos mais tarde por Mikhail Suslin, um jovem estudante de Nikolai Luzin em Moscovo. O erro está num lema que afirma um conjunto de números reais que é projecção dum Boreliano do plano é, também ele, Boreliano. Suslin chamou conjuntos *analíticos* aos conjuntos que são projecções de conjuntos Borelianos (de facto, toda a imagem contínua dum Boreliano é um conjunto analítico). Rapidamente, Suslin demonstra as propriedades essenciais dos conjuntos analíticos. Por exemplo, os conjuntos analíticos são mensuráveis à Lebesgue (anteriormente, em 1905, Vitali tinha mostrado que havia conjuntos não mensuráveis à Lebesgue – Vitali não definiu explicitamente um tal conjunto, antes utilizou o Axioma da Escolha para provar a sua existência). Também, a família dos conjuntos analíticos tem a *propriedade do subconjunto perfeito*, i.e., todo o conjunto analítico infinito não numerável contém um subconjunto perfeito (um conjunto de números reais diz-se *perfeito* se for não vazio e coincidir com o conjunto dos seus pontos de acumulação). A noção de conjunto perfeito tinha sido definida por Cantor no âmbito do seu programa (falhado e, hoje sabemos, impossível) de demonstrar a Hipótese do Contínuo. Com efeito, Cantor mostrara que os conjuntos perfeitos têm a cardinalidade do contínuo. Assim, se se pudesse demonstrar que todo o subconjunto infinito não numerável de reais continha um subconjunto perfeito, então a Hipótese do Contínuo seria verdadeira. O próprio Cantor demonstrou em 1884 que a família dos conjuntos fechados tem a propriedade do subconjunto perfeito (bastante mais tarde, em 1916, outro estudante de Lusin, Pavel Aleksandrov, estende este resultado à família dos conjuntos Borelianos). Não obstante, em 1908, Felix Bernstein mostra que existem conjuntos infinitos não numeráveis sem nenhum subconjunto perfeito. O exemplo de Bernstein, tal como o de Vitali, não era explícito, antes provinha duma aplicação do Axioma da Escolha. Naturalmente, põe-se a questão de saber se os contraexemplos de Vitali e Bernstein poderiam ou não surgir em conjuntos definidos "explicitamente". Doutro modo: será que os subconjuntos de números reais definidos de forma "explícita"têm boas propriedades de *regularidade*, i.e., são mensuráveis à Lebesgue e têm a propriedade do subconjunto perfeito? O resultado de Suslin mostra que a família dos conjuntos analíticos (que inclui propriamente a família dos Borelianos) tem estas propriedades de regularidade. E o que se passa com a família dos conjuntos *co-analíticos* (i.e., conjuntos complementares de conjuntos analíticos)? Claro que também é constituída por conjuntos mensuráveis à Lebesgue. Apesar de muito esforço, Luzin e Suslin (que entretanto falece em 1925 de tifo, aos vinte e cinco anos) não conseguem mostrar que a família dos conjuntos co-analíticos tem a propriedade do subconjunto perfeito. Nem tão pouco se sabia se as projecções de conjuntos co-analíticos eram mensuráveis à Lebesgue.

Em 1925, Luzin e Sierpínski (independentemente) definem e estudam a família dos conjuntos *projectivos*: um subconjunto dos números reais diz-se projectivo se se obtém a partir dos conjuntos Borelianos de $\mathbb{R}^n$ por meio de aplicações repetidas das operações de complementação e de projecção. A família dos conjuntos projectivos de $\mathbb{R}^n$ estrutura-se numa hierarquia natural: um conjunto diz-se Σ^1_0 se for Boreliano, diz-se Π^1_n se for o complementar dum conjunto Σ^1_n, e diz-se Σ^1_{n+1} se for a projeção dum conjunto em Π^1_n. Assim, os conjuntos analíticos são os conjuntos Σ^1_1, os co-analíticos são os Π^1_1 e as projecções destes últimos constituem a família Σ^1_2. Adaptando o argumento de enumeração e diagonalização de Lebesgue de 1905, Luzin e Sierpínski demonstram que a hierarquia projectiva é própria. Na seguinte figura, Δ^1_n é a intersecção das famílias Σ^1_n e Π^1_n (um resultado clássico de Suslin afirma que Δ^1_1 é a família dos conjuntos Borelianos – dito de outra forma: um conjunto é Boreliano se, e somente se, for simultaneamento analítico e co-analítico):



A hierarquia projectiva

Num papel de 1925, Luzin desabafa a propósito dos esforços falhados em mostrar que a família Π^1_1 tem a propriedade do subconjunto perfeito: a respeito da família dos conjuntos projectivos "não sabemos nem nunca viremos a saber"se ela tem a propriedade do subconjunto perfeito, ou se todos os seus membros são mensuráveis à Lebesgue. De algum modo, Luzin tinha razão. Havia como que uma barreira que impedia uma decisão sobre a propriedade do subconjunto perfeito para a família Π^1_1 e sobre a mensurabilidade à Lebesgue dos conjuntos em Σ^1_2. A barreira não era imaginária, e tinha raízes lógicas profundas. Se admitirmos o Axioma da Construtibilidade, o conjunto dos reais pode ser bem-ordenado por uma relação cuja complexidade é Δ^1_2. Deste facto decorre que há conjuntos Δ^1_2 (e, portanto há conjuntos Σ^1_2) que não são mensuráveis à Lebesgue. Com um pouco de mais trabalho também se conclui de $V = L$ que a família Π^1_1 não tem a propriedade do conjunto perfeito. É, pois, consistente com ZFC supor que os conjuntos projectivos não têm boas propriedades de regularidade. Por outro lado, desde que se admita a existência de um cardinal inacessível (ver adiante), também se pode supor consistentemente que os conjuntos projectivos têm as propriedades de regularidade atrás discutidas. Em suma, por si só a axiomática ZFC não decide sobre as propriedades de regularidade dos conjuntos projectivos. Nisto consiste a barreira de Luzin!

O trabalho em teoria dos conjuntos esteve num impasse relativo desde os resultados de Gödel até 1963. Uma ilustração desse impasse é a descoberta por John Sheperdson, no início da década de cinquenta, de que o método dos modelos internos (usado por Gödel para demonstrar as consistências relativas do Axioma da Escolha e da Hipótese do Contínuo) nunca poderia providenciar uma demonstração da independência relativa da Hipótese do Contínuo. Em 1963, um brilhante novo método foi inventado por Paul Cohen, um novato em teoria dos conjuntos (o seu método valeu-lhe uma medalha Fields em 1966). Ao contrário do método dos modelos internos que restringe o universo, o novo método de *forcing* "expande" o universo. Esta "expansão" merece ser comentada, pois põe-se o problema conceptual de expandir o universo de *todos* os conjuntos. Há várias maneiras de tornear esta dificuldade conceptual. Por exemplo, o que o método do *forcing* realmente faz é obter expansões de modelos de partes finitas da axiomática ZF (a teoria ZF não demonstra a existência de modelos de *todos* os axiomas de ZF a menos que seja inconsistente, pois tal implicaria que ZF demonstraria a sua própria consistência, o que contradiz o segundo Teorema da Incompletude de Gödel). Ora, para se obterem resultados de independência basta trabalhar com subconjuntos finitos arbitrários da axiomática, pois se uma asserção é consequência dum conjunto de axiomas, então é consequência duma parte finita desse conjunto.

O método inventado por Cohen revelou-se muito fecundo, pois não só permitiu mostrar a independência relativa da Hipótese do Contínuo e do Axioma da Escolha, como também permitiu responder a uma série de outras questões de independência. Um exemplo notável da utilização do método de *forcing* foi a construção em 1965, por parte de Robert Solovay, de um modelo de ZF em que todo o conjunto de reais é mensurável à Lebesgue e tem a propriedade do subconjunto perfeito (supondo que existe um cardinal inacessível no universo de partida). Claro que neste modelo falha o Axioma da Escolha, se bem que nele seja verdadeiro o mais fraco Axioma das Escolhas Dependentes. Sabe-se empíricamente que esta forma de escolha é suficiente para praticamente toda a análise matemática em espaços métricos separáveis. (O Axioma das Escolhas Dependentes diz que se se tiver uma relação binária ϕ tal que para todo $x \in A$ existe $y \in A$ com $x\phi y$, então existe uma sucessão $(x)_n$ de elementos de A tal que $x_n \phi x_{n+1}$, para todo o número natural n.) Pode dizer-se, sem exagero, que um modelo destes é um paraíso para os analistas! Deve também observar-se que Robert Solovay construiu o modelo acima mencionado como um submodelo interno dum modelo de ZFC em que todos os conjuntos projectivos são mensuráveis à Lebesgue e têm a propriedade do subconjunto perfeito (donde decorre o resultado de consistência referido há dois parágrafos atrás).

Se nos colocarmos numa perspectiva meramente *dedutivista* ("if-thenism"), um resultado de independência relativa duma asserção diz o seguinte: é uma questão de gosto ou arbítrio adicionar essa asserção à teoria, ou adicionar a negação dessa asserção. Assim, (à parte questões de gosto) seria arbitrário trabalhar na *teoria Cantoriana* ZFC+HC ou na *teoria não-Cantoriana* ZFC+¬HC. Porém, já no final da década de quarenta Gödel insurgia-se contra esta posição. Segundo Gödel, a independência relativa da Hipótese do Contínuo mostra que a axiomática ZFC não descreve completamente a realidade do universo dos conjuntos. Esta posição realista (ou platonista) de Gödel tem moldado a investigação em teoria dos conjuntos nas últimas três décadas, nomeadamente na consideração cuidadosa de novos candidatos a axiomas para a teoria dos conjuntos. Como mais recentemente disse Donald Martin (1976) "embora os axiomas de ZFC sejam insuficientes para decidir HC, não há nada de sagrado nestes axiomas, e podemos esperar encontrar novos axiomas ...". O próprio Gödel tinha em mente um determinado tipo de axiomas: os axiomas que postulam a existência de cardinais inacessíveis (ou grandes cardinais).

Um cardinal κ diz-se *inacessível* se a estrutura $(V_\kappa, \in)$ é modelo de ZFC. Diz-se, neste caso, que o segmento inicial V_κ do universo é modelo de ZFC. Há dois géneros (interligados) de intuição que geralmente são apresentados como justificação destes cardinais. Em primeiro lugar, se aceitamos a teoria ZFC é por que estamos convencidos de que ela é consistente (ainda que não possamos demonstrar a consistência de ZFC em ZFC). Sendo assim, seria natural exigir que houvesse no universo dos conjuntos um modelo de ZFC. A existência dum cardinal inacessível permite obter tal universo. Em segundo lugar, um cardinal κ é inacessível se, e somente se,

1. $\kappa > \aleph_0$;
2. κ é *regular*, i.e., κ não é a cardinalidade de uma união de menos de κ conjuntos, cada qual com menos de κ elementos;
3. sempre que $\lambda < \kappa$, então $2^\lambda < \kappa$.

O cardinal $\aleph_0$ satisfaz as duas últimas condições acima. Tendo isto em conta, podemos encarar a existência de um cardinal inacessível como um postulado de infinitude (uma generalização natural do Axioma do Infinito). Os mesmos argumentos permitem inferir que o universo dos conjuntos deve ter "muitos"cardinais inacessíveis. Por exemplo, se existe um cardinal inacessível, então esta asserção deveria ser válida num segmento inicial V_τ do universo e, por consequência, haveriam dois cardinais inacessíveis κ e τ. Iterando o argumento, chegamos à conclusão que o número de cardinais inacessíveis é infinito. Por sua vez, esta asserção deveria ser verdadeira num certo segmento inicial do universo, etc.

A existência dum cardinal inacessível (ou de dois, ou de um número infinito, ou mesmo de um número inacessível de cardinais inacessíveis) é compatível com o Axioma da Construtibilidade (no seguinte sentido: se existir um cardinal inacessível κ no universo, então κ ainda é um cardinal inacessível em L). Um cardinal infinito não-numerável κ diz-se *mensurável* se existir um ultrafiltro não principal κ-completo em κ (um ultrafiltro diz-se κ-completo se a intersecção de menos que κ-elementos do ultrafiltro ainda é um elemento do ultrafiltro). A existência de tal ultrafiltro é equivalente à existência de uma medida binária (i.e., que toma os valores 0 ou 1) não trivial e κ-aditiva no conjunto das partes de κ (um conjunto tem medida 1 se, e somente se, esse conjunto está no ultrafiltro). Os cardinais mensuráveis são inacessíveis. Aliás, são muito maiores que o primeiro cardinal inacessível – um cardinal mensurável κ é, por exemplo, o κ-ésimo cardinal inacessível. Mas mais importante do que a enorme "altura"do universo na presença de um cardinal mensurável, é o facto da existência de um cardinal mensurável "alargar"o universo. Com efeito, no final dos anos cinquenta, Dana Scott demonstra que o Axioma da Construtibilidade é incompatível com a existência dum cardinal mensurável. Para demonstrar este resultado, Scott utilizou a seguinte caracterização alternativa de mensurabilidade: um cardinal κ é mensurável se, e somente se, existe uma classe M e uma (classe) função π tal que:

1. M é modelo interno de ZFC;
2. $\pi : V \to M$ é uma imersão elementar (ou seja, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ é verdadeira no universo se, e somente se, $\phi(\pi(x_1), \ldots, \pi(x_n))$ é verdadeira em M).
3. κ é o *ponto crítico* de π (i.e., $\pi(\lambda) = \lambda$ para $\lambda < \kappa$ e $\pi(\kappa) > \kappa$).

Scott raciocinou do seguinte modo. Suponhamos, por absurdo, que κ é o menor cardinal mensurável e que $V = L$. Esta última hipótese implica que o único modelo interno de ZFC é L. Logo $V = L = M$. Como π é uma imersão elementar então em M é verdade que $\pi(\kappa)$ é o menor cardinal mensurável (aplica-se o ponto 2 à fórmula "x é um cardinal mensurável". Como M é o universo inteiro, $\pi(\kappa)$ é realmente o menor cardinal mensurável. Isto é absurdo, pois $\pi(\kappa) > \kappa$.

Mais tarde (1969), Solovay demonstrou que a existência dum cardinal mensurável implica que a família Σ^1_2 tem a propriedade do subconjunto perfeito (em particular, Π^1_1 também a tem) e que todo o membro desta família é mensurável à Lebesgue. Observe-se que este resultado de Solovay não é um mero resultado de consistência: ele não diz apenas que na presença de cardinais mensuráveis é consistente supor que as propriedade de regularidade atrás mencionadas são válidas para a família Σ^1_2. Ele afirma que as propriedades de regularidade em questão são consequência lógica da existência dum cardinal mensurável. Assim, o Axioma da Construtibilidade e a existência de cardinais mensuráveis têm consequências para o contínuo real, mas consequências *diferentes*! Há nesta altura uma bifurcação importante em teoria dos conjuntos. Por um lado, temos o Axioma da Construtibilidade, o qual evita suposições de existência supérfluas. Este axioma é filosoficamente atraente para os adeptos da "navalha de Ockham". Por outro lado, há o postulado da existência de cardinais mensuráveis, o qual alarga o universo. Este último axioma é filosóficamente atraente para aqueles que acham que o universo deve conter "tantos conjuntos quanto for possível". Qual o caminho a escolher? O "mainstream"da teoria dos conjuntos opta pela segunda hipótese (iremos adiante ver razões para tal). Ronald Jensen simpatiza com o Axioma da Construtibilidade e vê na bifurcação "construtibilidade *versus* mensurabilidade"a manifestação de um antigo conflito entre dois pontos de vista – quase que entre dois estados emocionais – que sempre existiram em matemática: o ponto de vista aritmético (representado pelos aderentes da *construtibilidade*) e o ponto de vista geométrico (representado pelos aderentes da *mensurabilidade*).

Gustav Dirichlet descreve exemplarmente a visão aritmética da matemática com a seguinte frase: "todo o teorema da álgebra e da análise superior, por mais remoto que seja, pode ser expresso como um teorema acerca de números naturais". Claro que se aceitarmos a teoria dos conjuntos, então somos obrigados a abandonar a visão aritmética da matemática tal como Dirichlet a descreve, pois Cantor mostrou que há mais números reais que números naturais. Não obstante, podemos ver os números ordinais como uma extensão natural do conceito de ser número natural e, neste caso, o Axioma da Construtibilidade afirma que – num certo sentido – o universo dos conjuntos se reduz ultimamente aos ordinais através de definições apropriadas. Assim, o axioma $V = L$ pode ser visto como subscrevendo a visão aritmética da matemática. Por sua vez, o ponto de vista geométrico encara o *continuum* real como uma vastidão imensa, cujos membros não podem ser encapsulados totalmente por nenhum princípio gerador. Para cada princípio gerador de reais, há sempre um real que lhe escapa. Na presença dum cardinal mensurável, não só o universo não se esgota em L como de facto $L \cap \mathbb{R} \neq \mathbb{R}$, i.e., há números reais que não são construtíveis. (Utilizando teoria de conjuntos muito difícil, Haim Gaifman e Jack Silver demonstraram na segunda metade dos anos sessenta que, na presença dum cardinal mensurável, $L \cap \mathbb{R}$ é numerável.) Meu caro leitor, para que lado é que pende nesta disputa?

O "mainstream"em teoria dos conjuntos não se fica somente pela existência de cardinais mensuráveis. Como observámos, um cardinal κ é mensurável se, e somente se, existir um modelo interno M e uma (classe) função π que satisfaça as condições 1, 2 e 3 acima. Chamamos a κ o cardinal associado à imersão elementar π. Um cardinal associado a uma imersão do tipo discutido é tanto mais poderoso quanto mais parecido M for com o universo V de todos os conjuntos. Não se pode, porém, exigir que M seja igual a V: em 1971, Kenneth Kunen mostrou que tal é contraditório. Um cardinal diz-se *superforte* se estiver associado a uma imersão elementar π que satisfaz os três pontos acima e tal que $V_{\pi(\kappa)} \subseteq M$. Que se saiba, este axioma não leva a contradições ... Ultimamente, os cardinais superfortes têm desempenhado um papel importante em teoria dos conjuntos devido às suas conexões com um novo tipo de axiomas, denominados de axiomas de *determinação*.

O Axioma de Determinação foi introduzido em 1962 por Jan Mycielsky e Hugo Steinhaus. Para o melhor motivar, fixemos um número natural n e consideremos X um conjunto de sequências binárias (i.e., de zeros e uns) de comprimento n. Vamos descrever um jogo $\mathcal{G}_X^n$ entre dois jogadores I e II: os jogadores escolhem alternadamente 0 ou 1 e a iniciativa pertence ao jogador I. No caso de n ser par o jogo tem o seguinte aspecto:

$$\begin{array}{llcccccc} \text{I} & \text{escolhe} & s_0 & & s_2 & \dots & s_{n-2} & \\ \text{II} & \text{escolhe} & & s_1 & & s_3 \ \dots & & s_{n-1} \end{array}$$

Diz-se que I *ganha* o jogo $\mathcal{G}_X^n$ se a sequência resultante,

$$s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n-2}, s_{n-1}$$

estiver em X. Caso contrário, é o jogador II que ganha. Diz-se que o jogador I tem uma *estratégia vencedora* para o jogo $\mathcal{G}_X^n$ se há x_0 (0 ou 1) tal que para qualquer escolha x_1 de II, há x_3 tal que para qualquer escolha x_4 de II, ..., etc. a sequência $x_0, x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}$ está em X. I.e., se:

$$(1) \qquad \exists x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \dots \exists x_{n-2} \forall x_{n-1} (x_k)_{k<n} \in X$$

Analogamente, diz-se que o jogador II tem uma estratégia vencedora para o jogo $\mathcal{G}_X$ se:

$$(2) \qquad \forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \forall x_{n-2} \exists x_{n-1} (x_k)_{k<n} \notin X$$

Observe-se que as asserções (1) e (2) são a negação uma da outra. Conclusão: ou o jogador I tem uma estratégia vencedora para o jogo $\mathcal{G}_X^n$, ou o jogador II tem uma estratégia vencedora para o jogo $\mathcal{G}_X^n$.

Seja agora X um conjunto de sucessões ("sequências infinitas"ou "ω-sequências") binárias. Neste caso o jogo $\mathcal{G}_X$ tem um número infinito de jogadas:

$$\begin{array}{lllllllll} \text{I} & \text{escolhe} & s_0 & & s_2 & & \ldots & s_{n-2} & & \ldots \\ \text{II} & \text{escolhe} & & s_1 & & s_3 & \ldots & & s_{n-1} & \ldots \end{array}$$

De maneira análoga ao caso finito, I ganha se a sucessão alternada de jogadas $(s_k)_{k\in\omega}$ estiver em X. Caso contrário ganha II. Há uma maneira formal de definir estratégia vencedora para I e estratégia vencedora para II que segue os traços intuitivos do caso finito. Observe-se, no entanto, que no caso infinito não se pode formular o conceito de estratégia vencedora através duma sequência alternada de quantificações existenciais e universais, pois tal sequência é infinita e, portanto, não constitui uma fórmula da linguagem da teoria dos conjuntos. Em particular, não se pode argumentar como no caso finito para mostrar que ou I tem uma estratégia vencedora ou II tem. Nesta conformidade, diz-se que o conjunto X é *determinado* se no jogo $\mathcal{G}_X$ algum dos jogadores tem uma estratégia vencedora.

O Axioma da Determinação é a asserção de que todo o conjunto X de sucessões binárias é determinado. Este axioma implica que *todo* o conjunto de números reais é mensurável à Lebesgue (Jan Mycielski e Stanislaw Swierczkowski em 1964) e tem a propriedade do subconjunto perfeito (Morton Davis, também em 1964). No entanto, ele é incompatível com o Axioma da Escolha, pelo que para muitos é inaceitável (Yiannis Moschovakis no seu tratado *Descriptive Set Theory* de 1980, classifica o Axioma da Determinação de "blatantly false"). Tal não impede que formas mais fracas do Axioma da Determinação não possam ser compatíveis com o Axioma da Escolha e, ainda assim, ter muitas consequências desejáveis. Uma destas formas é o denominado Axioma da Determinação Projectiva (cuja sigla é PD). Cada sucessão de zeros e uns pode considerar-se um elemento do espaço de Cantor (e vice-versa), i.e., do subconjunto do intervalo unitário obtido pela remoção consecutiva dos intervalos abertos terços centrais que vão sucessivamente restando. PD é (equivalente a) a asserção de que todo o conjunto projectivo do espaço de Cantor é determinado. Acontece que PD implica que todo o conjunto projectivo é mensurável à Lebesgue e tem a propriedade do subconjunto perfeito. Mais fortemente, nos finais da década de sessenta e durante a década de setenta, os trabalhos de Alexander Kechris, Moschovakis e outros mostraram que os métodos mais profundos de Lusin e Sierpínski em teoria descritiva dos conjuntos se podem generalizar e estender a toda a hierarquia projectiva na presença de PD. Por sua vez, em 1975, Martin demonstrou em ZFC o difícil teorema de que todo o conjunto Boreliano é determinado (curiosamente, a demonstração deste teorema faz uso essencial do Axioma da Substituição). Em 1978, no *Handbook of Mathematical Logic*, Martin escreve as seguintes linhas:

> É PD verdadeiro? Não é, certamente, auto-evidente. Alguns investigadores de teoria dos conjuntos consideram os axiomas dos cardinais inacessíveis auto-evidentes, ou pelo menos que se seguem de princípios *a priori* que são consequência do conceito de conjunto. Formas fracas de PD (...) são consequência de certos axiomas de cardinais inacessíveis. É mesmo possível que PD seja consequência de cardinais inacessíveis, mas isso ainda não foi demonstrado.
>
> O autor considera PD uma hipótese com estatuto similar às hipóteses teóricas da física. Têm-se produzido três tipos de evidência quase-empírica para PD.
>
> (1) O mero facto de ainda não se ter refutado uma asserção tão poderosa constitui alguma evidência para a sua verdade. (2) Alguns casos particulares de PD foram verificados (...). (3) As consequências de PD no domínio da teoria descritiva dos conjuntos são tão plausíveis e coerentes que elas dão plausibilidade ao princípio que as implica.

Quando Martin escreveu estas linhas, o estudo da exacta relação entre cardinais inacessíveis e postulados de determinação encontrava-se num impasse. A primeira indicação de que os cardinais inacessíveis estavam relacionados com postulados de determinação tinha surgido na segunda metade dos anos sessenta: consistiu num resultado de Solovay a demonstrar que PD implica a existência dum modelo interno com um cardinal mensurável. Tal resultado mostra que PD é uma asserção muito poderosa, pois implica a consistência da existência dum cardinal mensurável em ZFC. Em 1970, Martin demonstra que a existência dum cardinal mensurável implica que os conjuntos Π^1_1 são determinados. Durante os dez anos seguintes foi feito um esforço considerável para deduzir a partir da existência de grandes cardinais que os conjuntos Π^1_2 são determinados. Sem sucesso. Depois de algumas falsas partidas e volte-faces surpreendentes (em que intervieram Martin, Matthew Foreman, Menachem Magidor, Saharon Shelah e Hugh Woodin), no final dos anos oitenta Martin e John Steel demonstram que PD é consequência da existência dum cardinal superforte. Hoje em dia, a construção de modelos internos "naturais"em que "grandes"cardinais existem é um assunto em voga em teoria dos conjuntos. Recentemente (1994), Woodin escreveu:

> Há escassa evidência *a priori* de que PD é um axioma plausível ou mesmo de que é consistente. No entanto, a teoria que se segue de PD

é tão rica que, *a posteriori*, o axioma é consistente e verdadeiro. Esta é uma importante lição. Os axiomas não necessitam de ser verdadeiros *a priori*.

Termino, no entanto, com uma nota baixa. Ao contrário do que Gödel pensava, estas investigações não lançaram uma luz definitiva sobre a Hipótese do Contínuo. Com efeito, sabe-se que um cardinal superforte não decide a Hipótese do Contínuo. Como um cardinal superforte implica PD, decorre que PD não decide a Hipótese do Contínuo. A Hipótese do Contínuo continua, portanto, a constituir um desafio intrigante ...

Breve Bibliografia Anotada

Sobre a história da teoria dos conjuntos e sobre referências bibliográficas aos trabalhos originais, o leitor pode consultar,

- Hallett, M. 1984: *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford.
- Kanamori, A. 1996: "The Mathematical Development of Set Theory from Cantor to Cohen", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2, pp. 1-71.

Gödel defende a posição realista (ou platonista) a respeito dos conjuntos num seu muito citado artigo de 1947 intitulado "What is Cantor's Continuum Problem". Este artigo pode encontrar-se no segundo volume das suas obras completas e foi traduzido para português por Manuel Lourenço (na mesma colectânea, Lourenço também traduz a célebre monografia de Cohen *Set Theory and the Continuum Hypothesis*).

- Gödel, K.: *Collected Works*, volume II, organizado por Solomon Feferman e *et al.*, Oxford University Press, 1990.
- Gödel, K., Cohen, P. e outros: *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*, traduções e organização de Manuel Lourenço. Fundação Gulbenkian, Lisboa 1979.

O leitor interessado em filosofia da matemática e suas escolas, pode consultar o nosso,

- Ferreira, F. 1995: "No Paraíso sem Convicção ... (uma Explicação do Programa de Hilbert)", in *Matemática e Cultura II*, organização de João Furtado Coelho. Centro Nacional de Cultura e SPB Editores, pp. 87-121.

Hoje, o "mainstream" da teoria dos conjuntos está predominantemente localizado na Califórnia (EUA), especialmente na University of California at Los Angeles (UCLA) e na University of California at Berkeley. A voz filosófica mais articulada deste "mainstream" é Penelope Maddy. O quinto capítulo do primeiro título abaixo distingue-se por ser uma exposição particularmente acessível do moderno trabalho (e correspondentes motivações) em teoria dos conjuntos. O segundo título, apresenta as últimas reflexões de Maddy sobre a filosofia da teoria dos conjuntos.

- Maddy, P. 1990: *Realism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.
- Maddy, P. 1997: *Naturalism in Mathematics*, Oxford, Clarendon Press.

Sobre a história da teoria descritiva dos conjuntos o leitor pode consultar o papel de Kanamori já citado, a introdução e as notas históricas do tratado de Moschovakis ou o papel de Noa Golding abaixo (este último foca o problema da mensurabilidade à Lebesgue).

- Moschovakis, Y. 1980: *Descriptive Set Theory*, North-Holland.
- Goldring, N. 1995: "Measures: Back and Forth Between Point Sets and Large Sets", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, pp. 170-188.

A maioria dos resultados mencionados neste papel encontram-se demonstrados em:

- Jech, T. 1978: *Set Theory*, Academic Press.

Sobre grandes cardinais, há um livro recente:

- Kanamori, A. 1994: *The Higher Infinite*, Springer-Verlag.

Sobre os resultados mais recentes também nos socorremos da introdução de

- Martin, D. & Steel, J. 1989: "A Proof of Projective Determinacy", *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 2, pp. 71-125.

Neste artigo demonstra-se que PD é consequência da existência dum cardinal superforte. Finalmente, sobre a história dos modelos internos da teoria dos conjuntos até às tentativas recentes de construir modelos internos "naturais"para cardinais muito grandes, o leitor deve consultar,

- Jensen, R. 1995: "Inner Models and Large Cardinals", *The Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 1, pp. 393-407.