Teórico-prática n.º 7
Funções e Portas lógicas. Álgebra Booleana.

1. Simplifique a expressão algébrica recorrendo aos teoremas/regras da álgebra booleana.

$$y = \overline{A} \,.\, \overline{B} \,.\, C + C \,.\, B \,.\, \overline{A} + B \,.\, A \,.\, C + A \,.\, \overline{C} \,.\, \overline{B} + A \,.\, C \,.\, \overline{B}$$

   Res: $y = A \,.\, \overline{B} + C$ (expressão simplificada)

2. Considere a expressão lógica: F = A·B·C+(B+C)·(D+C). Desenhe o diagrama lógico que permite representar a expressão algébrica.

3. Considere a expressão algébrica:

$$F = \overline{A \,.\, B \,.\, C + B \,.\, C \,.\, D + C \,.\, A}$$

   i) Minimize (simplifique) a expressão.
   ii) Desenhe o diagrama lógico que permite representar a expressão algébrica simplificada.

4. Considere os circuitos lógicos das Fig. 1. Para cada circuito: i) Escreva a expressão algébrica para X (saída do circuito lógico). ii) Use os teoremas/regras da álgebra booleana para simplificar X (ver tabelas no final da ficha). iii) Construa a tabela de verdade do circuito.

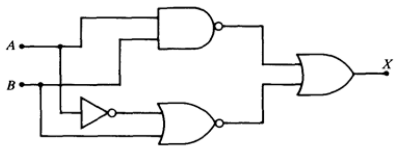


Fig. 1(a)

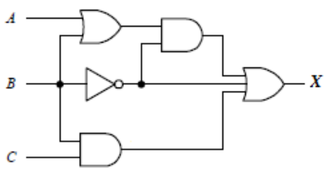


Fig. 1(b)

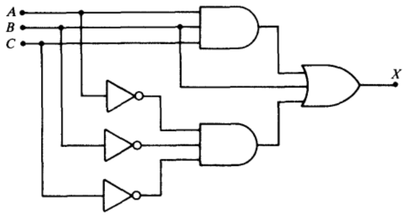


Fig. 1(c)

5. Um procedimento comum no desenho de circuitos digitais é gerar uma afirmação ou função lógica que descreve o circuito sem estar preocupado com a sua complexidade, e depois manipular a função usando as regras e teoremas da lógica booleana até que se atingir um equivalente que requeira o número mínimo de portas lógicas. Considere um circuito que realize a seguinte função lógica:
   a. Se A, B, e C estão todos presentes (i.e são iguais a 1, verdadeiro), então o processo ocorre (saída é 1, X=1)
   b. Se A, B, e C estão ausentes (i.e. São iguais a 0, falso), então o processo ocorre (X=1)
   c. Se B está presente (B=1), então o processo ocorre (X=1)
   d. Para qualquer outra combinação de A, B, e C, o processo não ocorre (X=0).

   i) Obtenha a expressão para a função lógica do circuito e desenhe o circuito correspondente.
   ii) Manipule a expressão lógica obtida de forma a simplificar o circuito (requerendo assim poucas portas lógicas), e desenho o novo circuito.

6. Um processo sistemático de construir uma função lógica consiste em gerar uma tabela onde se identificam todas as interceções (combinações de E que são verdade), sendo a função lógica igual à união (combinação OU) de todas as interceções. A partir o enunciado do

problema anterior gere a tabela de verdade da função lógica do circuito e desenhe o diagrama do circuito lógico considerando (como limite prático) portas OR com 4 entradas no máximo.

7. Projete, da maneira que considerar mais simples, circuitos que implementem as tabelas de verdade das Fig. 8.2(a), (b) e (c).

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Fig. 2(a)

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Fig. 2(b)

A	B	C	D	X
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

Fig. 2(c)

8. Construa a tabela de verdade para as funções lógicas:

$a)\ F_1 = A \cdot \bar{B} + A \cdot B$ $\qquad$ $b)\ F_2 = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B}$

9. Implemente a função lógica $F = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$: i) usando apenas porta lógicas NOR; ii) Implemente a função lógica $F = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$ usando apenas porta lógicas NAND.

10. Mostre, para o caso de três variáveis, que portas NAND podem ser interligadas para formarem o equivalente a uma porta OU.

Bases numéricas e conversões entre bases

11. Converter os seguintes números binários/decimais em números decimais/binários:
    a. 01010110_2 (⇔01010110B, a letra B indica base binária) (R: 86_{10})
    b. 1011.1010_2 (R: 11.625_{10})
    c. 133_{10} (R: 10000101_2)
    d. 122_{10} (R: 01111010_2)
    e. 152_{10} (R: 10011000_2)

12. Converter os seguintes números binários/hexadecimais em números hexadecimais/binários:
    a. 01101101_2 (R: $6D_{16}$)
    b. $A9_{16}$ (R: 10101001_2)
    c. $2A6_{16}$ (R: 1010100110_2)

13. Converter os seguintes números decimais/hexadecimais em números hexadecimais/decimais:
    a. 678_{10} (R: $2A6_{16}$)
    b. $A9_{16}$ (R: 169_{10})
    c. $2A6_{16}$ (R: 678_{10})
    d. 151_{10} (R: 97_{16})
    e. 496_{10} (R: $1F2_{16}$)

14. Converter os seguintes números para octal:

a. 1011011_2 (R: 133_8)
b. $55{,}5_{10}$ (R: $67{,}4_8$)
c. 58_{16} (R: 130_8)

15. Converter os seguintes números BCD/decimais em números decimais/BCD:
 a. 496_{10} (R: $0100\ 1001\ 0110_{BCD}$)
 b. $0111\ 0101\ 1000_{BCD}$ (R: 758_{10})
 c. $0110\ 0100\ 1011_{BCD}$ (R: Impossível)

16. Indique a opção correta: Para a maioria dos trabalhos digitais, um osciloscópio deve ser usado no modo/acoplamento: a) DC; b) GND/Terra; c) AC; d) Nenhuma das anteriores.

Circuitos Elétricos e Sistemas Digitais
Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
1.º Semestre 2019/2020
L4 CESDig
25.09.2019

1. Vertical Controls

Position and Volts-Per-Division (Volts/Div)

- The vertical position control allows you to move the waveform up and down on the display.
- The volts-per-division (volts/div) setting varies the size of the waveform on the screen. The volts/div setting is a scale factor. If the volts/div setting is 5 volts, then each vertical division represents 5 volts and an entire screen of 8 divisions can display 40 volts from top to bottom.

Input Coupling

Determines which part of the signal presented to the oscillscope's input is displayed on the screen.

- DC coupling shows all of an input signal.
- AC coupling blocks the DC component of a signal so that you see the waveform centered around zero volts.
- Ground coupling disconnects the input signal from the vertical system, which lets you see where zero volts is located on the screen.

2. Horizontal Controls

Position and Seconds-Per-Division (Sec/Div)

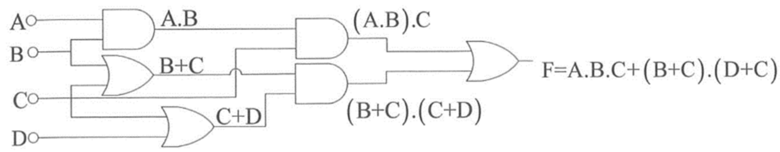
- The horizontal position control allows you to move the waveform left and right on the display.
- The seconds-per-division (sec/div) setting varies the rate at which the waveform is drawn across the screen (also known as the time base setting or sweep speed). The sec/div setting is a scale factor. If the setting is 1 ms, then each horizontal division represents 1 ms and the entire screen of 10 divisions represents 10 ms.

Soluções

(Soluções/Resoluções resumidas)

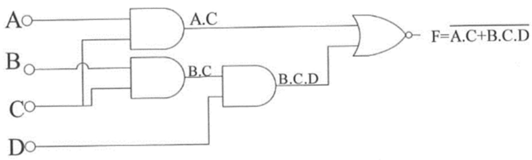
As soluções/resoluções apresentadas incluem, na maior parte dos casos, apenas algumas das componentes da resposta, e devem ser consideradas essencialmente como ajudas para obter a resposta completa.

Exercício 2:

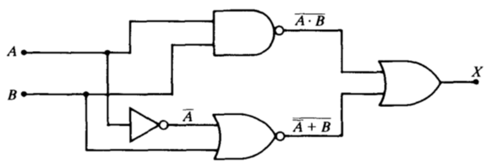


Exercício 3:

$F = \overline{A\,.\,C + B\,.\,C\,.\,D} = \bar{A}\,.\,\bar{B} + \bar{A}\,.\,\bar{D} + \bar{C}$ (expressão simplificada)



Ex. 4, Fig. 1(a)**:** (i) Primeiro determinam-se as saídas nas portas lógicas intermédias, e obtém-se



a expressão algébrica para a saída *X*:

$$X = \overline{A \cdot B} + \overline{\bar{A} + B}$$

(ii) Simplificação: usam-se os "teoremas" da álgebra booleana (ver tabela no fim da ficha), obtendo-se, $X = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{\bar{A}} \cdot \bar{B}) = \bar{A} + \bar{B}$

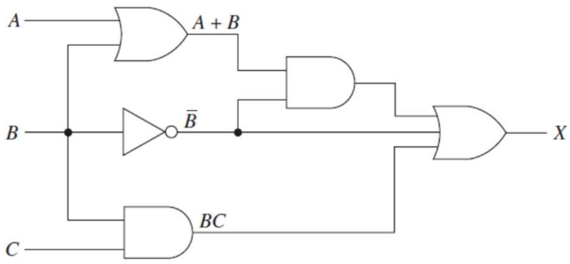
o que é equivalente a (ver tabela no fim da ficha): ou $X = \overline{A \cdot B}$.

(iii) Tabela de verdade com valores intermédios:

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{\bar{A} + B}$	X
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

Como se pode ver pela tabela de verdade ou pela solução acima, o circuito lógico da Fig. 1(a) pode ser substituído por uma única porta NAND.

Fig. 1(b)**:** Mesmo procedimento …



Solution: The Boolean equation for X is

$$X = (A + B)\overline{B} + \overline{B} + BC$$

To simplify, first apply *Law 3* [$(A + B)\overline{B} = A\overline{B} + B\overline{B}$]:

$$X = A\overline{B} + B\overline{B} + \overline{B} + BC$$

Apply *Rule 7* ($B\overline{B} = 0$):

$$X = A\overline{B} + 0 + \overline{B} + BC$$

Apply *Rule 3* ($A\overline{B} + 0 = A\overline{B}$):

$$X = A\overline{B} + \overline{B} + BC$$

Factor a $\overline{B}$ from terms 1 and 2:

$$X = \overline{B}(A + 1) + BC$$

Apply *Rule 4* ($A + 1 = 1$):

$$X = \overline{B} \cdot 1 + BC$$

Apply *Rule 2* ($\overline{B} \cdot 1 = \overline{B}$):

$$X = \overline{B} + BC$$

Apply *Rule 10(b)* ($\overline{B} + BC = \overline{B} + C$):

$$X = \overline{B} + C \quad \leftarrow \textit{simplified equation}$$

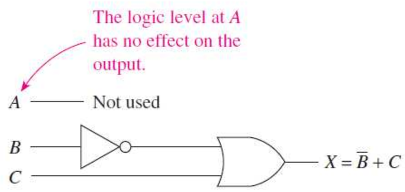
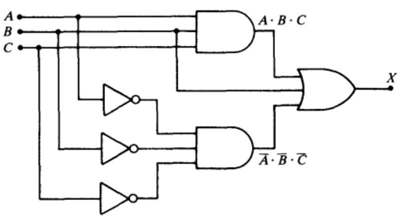


Fig. 1(c)**:**



$$X = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + B$$

Ex. 5: A expressão que comporta todas as combinações que levam à execução do processo (saída igual a 1) é:

$$X = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + B$$

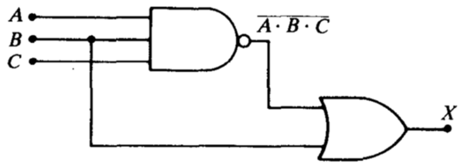
Circuito lógico: ver circuito lógico da Fig. 1(c).

Simplificação da expressão anterior:

$$X = A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + B$$

$$X = A \cdot B \cdot C + \overline{A + B + C} + B$$

$$X = (B + A \cdot B \cdot C) + \overline{A + B + C} = B + \overline{A + B + C}$$



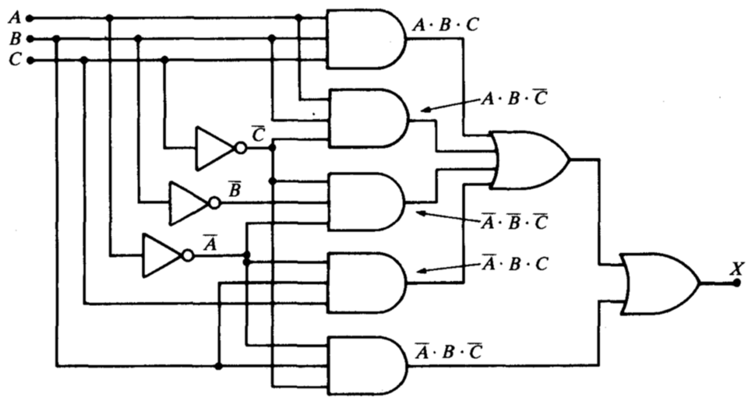
Conclui-se que o circuito da direita é equivalente ao circuito da esquerda, sendo muito mais simples.

Ex. 6: A tabela abaixo mostra todas as combinações das variáveis de entrada, bem como todas as interseções que satisfazem as condições a-d do problema 6.

A	B	C	Intersections
0	0	0	$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
0	0	1	
0	1	0	$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$
0	1	1	$\bar{A} \cdot B \cdot C$
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	$A \cdot B \cdot \bar{C}$
1	1	1	$A \cdot B \cdot C$

A união das interseções é: $X = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$

O circuito lógico correspondente à expressão acima, usando portas lógicas com apenas 4 entradas, é:



Ex. 9: (a) $F_1 = A \cdot \bar{B} + A \cdot B$, **(b)** $F_2 = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{B}$

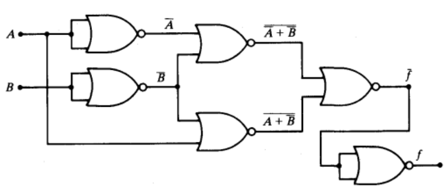
A	B	$A\cdot\bar B$	$A\cdot B$	f_1
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

A	B	C	$\bar A\cdot B\cdot C$	$\bar A\cdot\bar B$	f_2
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Ex. 9: Implemente a função lógica $F = A\cdot B + \bar A\cdot B$ usando apenas portas lógicas NOR.

$$\bar f = \overline{\overline{A\cdot B+\bar A\cdot B}} = \overline{(\overline{A\cdot B})\cdot(\overline{\bar A\cdot B})} = \overline{(\bar A+\bar B)\cdot(A+\bar B)} = \overline{(\bar A+\bar B)}+\overline{(A+\bar B)}$$

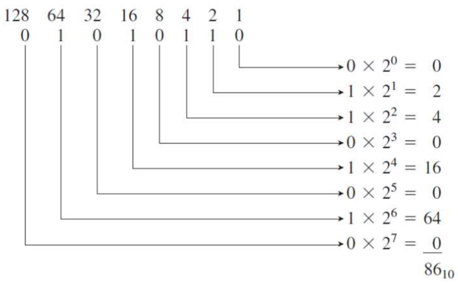
$$f = \bar{\bar f} = \overline{\bar f+\bar f}$$



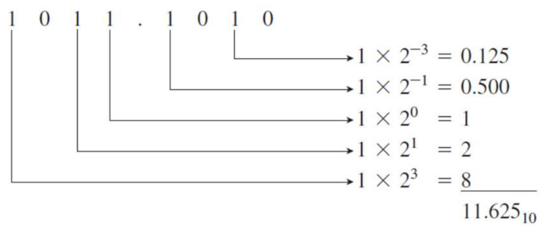
Comentário: ter presente que $A\cdot B+\bar A\cdot B = B$. Portanto, F pode ser realizada sem qualquer porta NOR (ou qualquer outra porta), tomando diretamente o sinal B.

Bases numéricas

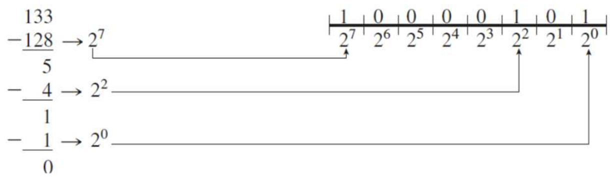
Ex. 11: (a)



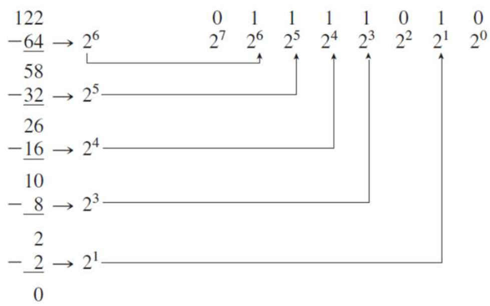
(b)



(c)



(d)



$122 \div 2 = 61$ with a remainder of 0 (LSB)
$61 \div 2 = 30$ with a remainder of 1
$30 \div 2 = 15$ with a remainder of 0
$15 \div 2 = 7$ with a remainder of 1
$7 \div 2 = 3$ with a remainder of 1
$3 \div 2 = 1$ with a remainder of 1
$1 \div 2 = 0$ with a remainder of 1 (MSB)

Ex. 12:

a) $\underbrace{0\,1\,1\,0}_{6}\ \underbrace{1\,1\,0\,1_2}_{D} = 6D_{16}$

(b) $\overbrace{1\,0\,1\,0}^{A}\ \overbrace{1\,0\,0\,1}^{9} = 10101001_2$

(c) 2 A 6

$6 \times 16^0 = 6 \times 1 = 6$
$A \times 16^1 = 10 \times 16 = 160$
$2 \times 16^2 = 2 \times 256 = \underline{512}$
678_{10}

Ex. 13 $\overbrace{0010}^{2}\ \overbrace{1010}^{A}\ \overbrace{0110}^{6} = 2 + 4 + 32 + 128 + 512 = 678_{10}$

$151 \div 16 = 9$ remainder 7 (LSD)
$9 \div 16 = 0$ remainder 9 (MSD)
$151_{10} = 97_{16}$

97_{16}
$7 \times 16^0 = 7$
$9 \times 16^1 = \underline{144}$
151 √

$498 \div 16 = 31$ remainder 2 (LSD)
$31 \div 16 = 1$ remainder 15 (= F)
$1 \div 16 = 0$ remainder 1 (MSD)
$498_{10} = 1\ F\ 2_{16}$

$1\ F\ 2_{16}$
$2 \times 16^0 = 2 \times 1 = 2$
$F \times 16^1 = 15 \times 61 = 240$
$1 \times 16^2 = 1 \times 256 = \underline{256}$
498 √

Ex. 14 $\overbrace{0100}^{4}\ \overbrace{1001}^{9}\ \overbrace{0110}^{6} = 0100\ 1001\ 0110_{BCD}$

$\underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0101}_{5}\ \underbrace{1000}_{8} = 758_{10}$

$\underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{0100}_{4}\ \underbrace{1011}_{*}$

Impossível: 1011 não é um número BCD válido

Table 12-1 Boolean Algebra Theorems

Number	Theorem	Name
1	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$	commutative law
2	$(A + B) + C = A + (B + C)$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	associative law
3	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	distributive law
4	$A + A = A$ $A \cdot A = A$	identity law
5	$\bar{\bar{A}} = A$	negation law
6	$A + A \cdot B = A$ $A \cdot (A + B) = A$	redundancy law
7	$0 + A = A$ $1 \cdot A = A$ $1 + A = 1$ $0 \cdot A = 0$	Boolean postulates
8	$\bar{A} + A = 1$ $\bar{A} \cdot A = 0$	
9	$A + \bar{A} \cdot B = A + B$ $A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$	
10	$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$	DeMorgan's laws

TABLE 5–2 Boolean Laws and Rules for the Reduction of Combinational Logic Circuits

Laws
1 $A + B = B + A$
$AB = BA$
2 $A + (B + C) = (A + B) + C$
$A(BC) = (AB)C$
3 $A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)(C + D) = AC + AD + BC + BD$

Rules
1 $A \cdot 0 = 0$
2 $A \cdot 1 = A$
3 $A + 0 = A$
4 $A + 1 = 1$
5 $A \cdot A = A$
6 $A + A = A$
7 $A \cdot \bar{A} = 0$
8 $A + \bar{A} = 1$
9 $\bar{\bar{A}} = A$
10 (a) $A + \bar{A}B = A + B$
(b) $\bar{A} + AB = \bar{A} + B$