

Prática n.º 5:

Filtros passa-baixo e passa-alto; função de transferência.

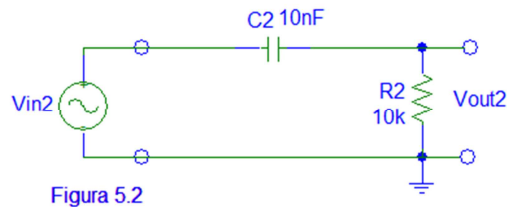
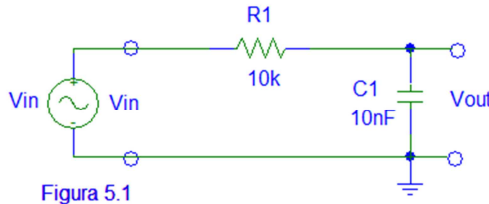
[Faça o estudo dos circuitos (cálculos e/ou simulações) antes da aula.]

1. Os circuitos RC da Fig. 5.1 e 5.2 representam filtros RC passa-baixo e passa-alto, respetivamente.

Preparação prévia: Determine a amplitude e a fase das funções de transferências de ambos os filtros, e trace os respetivos diagramas de Bode.

Realização experimental:

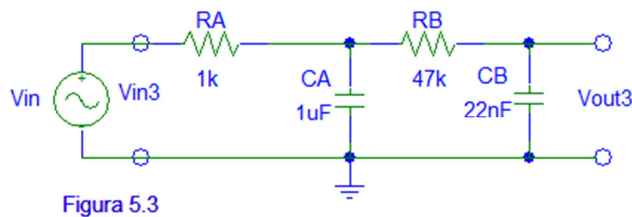
- a) Monte o circuito da Fig. 5.1 na placa de teste e aplique à entrada a tensão sinusoidal de 1 V de amplitude (V_{in}). Faça variar, em décadas, a frequência da tensão aplicada de 100 Hz até 1 MHz, e observe e registe a característica passa-baixo do circuito. Determine o valor da frequência a que corresponde a tensão de saída com amplitude V_{out} igual a $V_{in}/\sqrt{2}$. Relacione o valor obtido com o produto RC . Compare o valor das grandezas que mediu com os correspondentes valores dados pelas expressões matemáticas que determinou na fase de preparação do trabalho.
- b) Repita o exercício anterior para o circuito da Fig. 5.2.
- c) Observe, registe e interprete a resposta temporal do circuito da Fig. 5.2 quando à entrada aplica uma onda quadrada com 5 V de amplitude e com período: a) 10 vezes superior; b) igual ao; e c) 10 vezes inferior ao período correspondente à frequência de corte do circuito.



2. Considere o filtro RC passa-baixo de 2ª ordem representado no esquema da Fig. 5.3.

Preparação prévia: Tendo em conta que $R_2 \gg R_1$, determine a frequência de corte f_c do filtro.

Realização experimental: Monte o circuito na placa de teste e determine experimentalmente f_c (ajuste previamente a calibração no tempo e o ganho dos amplificadores de canal do osciloscópio). Verifique que para frequências bastante inferiores a f_c o módulo da função de transferência (FT) é aproximadamente constante e que para frequências bastante superiores a f_c o módulo da FT diminui a um ritmo de cerca de 40 dB por década (ou 12 dB por oitava).



Anexo: Leis dos Circuitos em Corrente Alternada

Na representação exponencial a tensão sinusoidal $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ escreve-se:

$$V(t) = \frac{V_0}{2j} (e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}) \equiv V e^{j\omega t};^1$$

e a corrente sinusoidal $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$ representa-se por:

$$I(t) = \frac{I_0}{2j} (e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}) \equiv I e^{j\omega t}.$$

As formas complexas da corrente e da tensão sinusoidais, V e I , designam-se por fasores de tensão e de corrente. Graças à notação complexa podemos abordar qualquer circuito com resistências, condensadores, e bobines, alimentado a corrente alternada sinusoidal, como se fosse um circuito resistivo alimentado com corrente contínua.

Lei de Ohm Generalizada

Em corrente alternada sinusoidal, a relação $V = R \cdot I$ toma a forma $V = Z \cdot I$: **lei de Ohm generalizada** (V , Z , e I são, em geral, grandezas complexas); a grandeza Z designa-se **impedância**. Ter em atenção que quer a tensão, quer a corrente, deve ser expressa de forma consistente, i.e., ambas referidas aos valores de pico, aos valores eficazes, ou aos valores “médios”. A **impedância** de uma resistência R ideal é igual a $Z_R = R$; a impedância de um condensador ideal (C) é dada por $Z_C = -j/\omega C$; e a impedância de uma bobine/indutância ideal (L) é $Z_L = j\omega L$. A impedância Z de um circuito contendo resistências e/ou bobines, é, em geral, função da frequência do sinal sinusoidal ω , i.e., $Z = Z(\omega)$, mesmo que o valor das resistências R não dependa de ω (desprezam-se aqui os comportamentos não-lineares dos componentes). A grandeza impedância $Z(\omega) = F(\omega) + jX(\omega)$ é, em geral, uma função complexa, em que a parte real $F(\omega)$ corresponde à componente resistiva do elemento ou associação de elementos, e a parte imaginária $X(\omega)$ é o resultado das componentes capacitiva (reactância capacitiva), $X_C = -1/(\omega C)$, e/ou indutiva (reactância indutiva), $X_L = \omega L$, do elemento ou associação de elementos.

Associação de Impedâncias

A impedância equivalente Z_{eq} da **associação série** de impedâncias é dada pela soma das impedâncias individuais: $Z_{eq} = Z_1 + \dots + Z_n$.

Na **associação em paralelo** o inverso da impedância equivalente, $1/Z_{eq}$ é igual à soma dos inversos das impedâncias individuais: $1/Z_{eq} = 1/Z_1 + \dots + 1/Z_n$.

Notar o paralelo com a associação de resistências em corrente contínua.

Circuito RLC série: É sempre possível, mediante transformações oportunas, converter ou reduzir uma rede de CA a um circuito simples formado por uma resistência, uma autoindução e uma capacidade ligados em série. A forma geral da impedância de um circuito RLC série é:

¹ $j = \sqrt{-1}$.

$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$. Para determinados circuitos de corrente alternada sinusoidal, existe uma frequência particular, a **frequência de ressonância**

$$f_0 = f_R = \frac{\omega}{2\pi} = 1/(2\pi\sqrt{LC}),$$

à qual a componente imaginária da impedância do circuito é nula ou infinita.

Análise de Circuitos de Corrente Alternada

As leis dos circuitos elétricos de corrente contínua aplicam-se da mesma forma aos circuitos em corrente alternada (ca), com a ressalva de que a tensão e a corrente devem ser expressas de forma consistente, i.e., ambas referidas aos valores de pico, aos valores eficazes, aos valores médios, e por aí adiante. As resistências dos elementos são substituídas pelas respetivas impedâncias.

Filtros

Nos circuitos elétricos com resistências, capacidades e indutâncias, a relação entre a intensidade de corrente e a tensão aos terminais dos diversos componentes é linear. Estes circuitos/elementos designam-se por circuitos/elementos **lineares**.

Aplicando a um circuito linear um sinal sinusoidal, a resposta, em regime estacionário, é também um sinal sinusoidal, i.e., o sinal de saída tem a mesma forma que o sinal de entrada, podendo, no entanto, a amplitude do sinal ser diferente. Esta característica é exclusiva dos sinais sinusoidais. Para nenhuma outra forma de onda, periódica ou não, isto se verifica (em geral, o sinal de saída pode nem ter qualquer semelhança com o sinal de entrada).

Um **filtro** é um dispositivo/circuito eletrónico que permite a passagem/transmissão de potência numa determinada banda de frequências, dificultando/rejeitando a passagem/transmissão de potência às frequências que estão fora dessa banda, eliminando, por exemplo, sinais indesejáveis, melhorando, por exemplo, a resolução de imagem e/ou fidelidade de som;

Em geral, os filtros são constituídos por componentes passivos, em particular por condensadores e bobines, para além de resistências. Há certos arranjos destes componentes que servem para selecionar a transmissão, entre dois circuitos, de sinais sinusoidais em função do valor da sua frequência, permitindo a passagem exclusiva de sinais em determinada banda de frequências.

Quanto ao comportamento em frequência, existem quatro tipos básicos de filtros: **passa-baixo**, **passa-alto**, **passa-banda** e **rejeita-banda**.

Função de Transferência (FT)

Em geral, os filtros lineares são circuitos com dois pares de terminais (um dos quais se considera como entrada do circuito e o outro como a saída), Fig. 1, e cuja resposta, isto é, a relação entre as variáveis de entrada V_{in} e I_{in} e as de saída V_{out} e I_{out} é dependente da frequência.

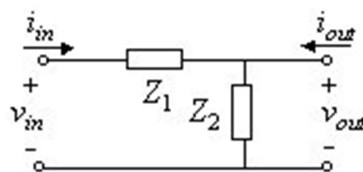


Fig. 1: Filtro linear constituído por dois componentes de espécies diferentes.

A razão $T(\omega) = V_{out} / V_{in}$, com $I_{out} = 0$, é designada por ganho (atenuação) do circuito, por função de transmissão do circuito, ou por **função de transferência** (FT) do circuito. $T(\omega) = V_{out} / V_{in}$ é, em geral, uma quantidade complexa.² Neste trabalho estudaremos a resposta em frequência de circuitos contendo condensadores e resistências.

Decibel (dB)

Para exprimir razões de potências, tensões, etc., é frequente usar-se o **decibel** (dB). Se a potência, a corrente e a tensão de entrada de um circuito são dadas por P_{in} , I_{in} e V_{in} , respetivamente, e a potência, a corrente e a tensão de saída representadas por P_{out} , I_{out} e V_{out} , então a atenuação (ou ganho) do circuito, expresso em potência, é:

$$T(\omega) = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\frac{V_{out}^2}{Z_{out}}}{\frac{V_{in}^2}{Z_{in}}}$$

Assumindo $Z_{out} = Z_{in} = R_0$ (impedâncias puramente resistivas),³ tem-se:

$$T(\omega) = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{V_{out}^2}{V_{in}^2}$$

Normalmente expressa-se o módulo da FT em dB:

$$\eta(\text{dB}) = 10 \log |T(\omega)| = 10 \log |P_{out} / P_{in}| = 20 \log |V_{out} / V_{in}|$$

Se η é positivo, o circuito apresenta ganho (amplificador); se η é negativo, o circuito atenua o sinal de saída (atenuador). Usando o decibel, grandezas muito grandes ou muito pequenas são representadas através de números com poucos dígitos. Outra vantagem é que as atenuações (ou ganhos) em dB de circuitos ligados em sucessão se somam, uma vez que o logaritmo do produto é igual à soma do logaritmo dos fatores.

Largura de Banda de um Circuito

Em corrente alternada (ca), a impedância de um filtro/circuito varia com a frequência. Define-se **largura de banda** de um circuito, como o espectro de frequências no qual o módulo da função de transferência (em tensão ou corrente), $|V_{out} / V_{in}|$ ou $(|I_{out} / I_{in}|)$, é maior ou igual a $(\sqrt{2})^{-1} \approx 0.707$ (ou -3 dB) do seu valor máximo (i.e., é o intervalo de frequências para qual a função de transferência é igual ou superior a 70% do seu valor máximo), ou o intervalo de frequências no qual a potência de saída é maior ou igual a metade (ou -3 dB) da potência máxima do sinal de saída, Fig. 2. Também se

² As grandezas e as funções complexas, como a impedância Z , os fasores de tensão e de corrente (V e I), a função resposta em frequência H , representam-se em estilo romano. No entanto, o módulo e a fase das grandezas complexas, como, por exemplo, da impedância, são representados em itálico (Z , ψ).

³ Note que nas medições dos pares I_{out} e I_{in} e V_{out} e V_{in} , se deve usar o mesmo valor de impedância, i.e., $Z_{in} = Z_{out}$.

costuma designar a largura de banda como a **banda passante** do circuito.



Fig. 2: Resposta espectral de um circuito. Largura de banda. Pontos -3 dB.

Na Fig. 2, ω_{ci} e ω_{cs} , representam as frequências de corte inferior e superior (frequências às quais a função de transferência é igual a $(\sqrt{2})^{-1}$ do seu valor máximo, 70% do seu valor máximo), respetivamente. Há circuitos em que a frequência de corte inferior é zero (**circuitos passa-baixo**), e circuitos em que a frequência de corte superior é infinita (**circuitos passa-alto**). Num circuito **rejeita-banda**, os sinais com frequências compreendidas entre ω_{ci} e ω_{cs} são atenuados.

Filtros RC

Os filtros RC são, normalmente, formados por uma resistência (condensador) em série e um condensador (resistência) em paralelo, tal como se mostra na Fig. 3. Recorde-se que a reactância capacitiva, i.e., a resistência que uma capacidade oferece à corrente alternada depende da frequência do sinal: é grande a frequências baixas e é pequena a frequências altas.

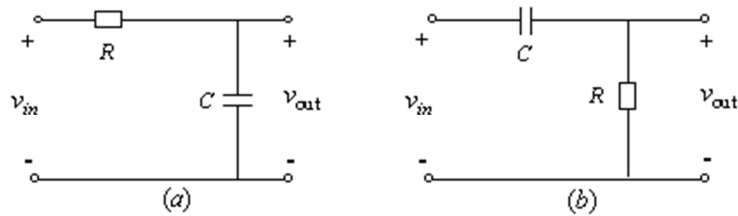


Fig. 3: a) Circuito RC passa-baixo. b) Circuito RC passa-alto.

A frequência de corte de um filtro RC corresponde à frequência para a qual o valor da reactância do condensador iguala o valor da resistência $(\omega_c C)^{-1} = R$, ou $\omega_c = (RC)^{-1}$. O comportamento da função de transferência para frequências acima (passa-baixo) ou abaixo (passa-alto) da frequência de corte apresenta um declive de 20 dB/década (ou 6 dB/oitava).

Filtros LC, frequência de ressonância e impedância característica

Os filtros LC são usados principalmente, mas não exclusivamente, em aplicações de alta frequência. Os dois tipos principais de filtros LC são o filtro série (Fig. 4a) e o filtro paralelo (Fig. 4b), filtros passa-banda e rejeita-banda, respetivamente. Nas figuras, R representa a resistência da bobine. A ação destes circuitos é consequência do comportamento das reactâncias do condensador e

da bobine, com a frequência.

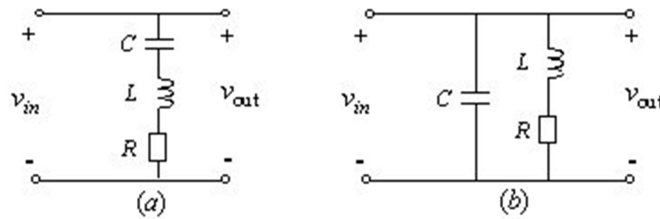


Fig. 4: Filtros LC (a) série e (b) paralelo.

No caso do circuito série (o caso paralelo é análogo), a impedância de entrada do circuito é igual à diferença entre estas duas reactâncias, mais a resistência R (R representa, por exemplo, a resistência da bobine). A ação do circuito é tal que a reactância do condensador diminui e a da bobine aumenta, com o aumento da frequência, e vice-versa.

A uma frequência particular, **frequência de ressonância** $f_R = (2\pi\sqrt{LC})^{-1}$, as reactâncias do condensador e da bobine são iguais, e a impedância de entrada efetiva é igual a R . Os módulos das impedâncias da bobine Z_L e do condensador Z_C , à frequência f_R , são iguais e correspondem ao valor da **impedância característica** do circuito Z_0 , i.e., $Z_L = Z_C = Z_0 = \sqrt{L/C}$.

Supondo que tal ocorre quando as reactâncias do condensador e a da bobine são iguais a $1\text{ k}\Omega$ e a resistência R do RLC é igual a $10\ \Omega$, a impedância vista da entrada cairá para $10\ \Omega$, e a tensão aos terminais de R , V_{out} , será igual à tensão de entrada V_{in} . A corrente através de R , contudo, percorre L e C , que apresentam individualmente reactâncias 100 vezes superiores à impedância de R , conseqüentemente o sinal de tensão aos terminais de C e de L , V_C e V_L , será 100 vezes superior à tensão aos terminais de R , V_R ; este “ganho” em tensão é conhecido como o **Q do circuito** e o seu valor dado por $Q = Z_0 / R$. (Note que as tensões através de L e C estão em oposição de fase e por isso a tensão gerada através da série L - C é nula, portanto.)

É também possível desenhar filtros LC que funcionam como filtros passa-baixo ou passa-alto. O filtro LC passa-baixo (passa-alto) é formado, normalmente, “vendo” a tensão de saída aos terminais do condensador (indutância), tal como se mostra na Fig. 5.

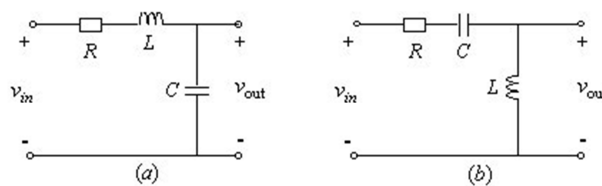


Fig. 5: Filtros LC (a) passa-baixo e (b) passa-alto.

Estes filtros só atuam como verdadeiros filtros passa-baixo ou passa-alto se a impedância do gerador de sinal ou do seu equivalente de Thévenin, for igual a Z_0 .⁴ Por exemplo, o circuito passa-baixo (passa-alto) é de facto um filtro ressonante série com a saída tirada aos terminais do

⁴ Os filtros LC passa-baixo/alto possuem a vantagem da função de transferência apresentar um declive de $\sim 12\text{ dB/oitava}$ (ou 40 dB/década), em comparação com 6 dB/oitava dos filtros RC.

condensador (bobine).

Ter em atenção que se os circuitos da Fig. 5 forem alimentados por uma fonte de baixa impedância (baixa resistência interna), a saída irá produzir um pico à frequência de ressonância f_R . A magnitude desse pico é proporcional ao valor do Q do circuito. Contudo, o circuito pode ser modificado de forma a funcionar como um verdadeiro filtro passa baixo (passa-alto). Basta adicionar ao circuito, em série com a bobine (condensador), uma resistência tal que a sua soma com a resistência do gerador iguale a impedância característica do circuito Z_0 . A adição desta resistência reduz o valor de Q à unidade, e o novo filtro passa-baixo (passa-alto) produz uma saída sem pico.

Impedâncias características “padrão”:

Após o advento do radar [técnica de localização e determinação de distância de um objeto afastado (avião, submarino etc.) por meio da emissão de ondas radioelétricas e a deteção e análise do pulso refletido pelo objeto], a indústria sentiu necessidade de definir uma “impedância padrão” para os sistemas de transmissão, em particular para os cabos coaxiais usados para conduzir os sinais. O padrão mais usado corresponde à **impedância de 50 Ω** , e este valor resulta da satisfação do compromisso entre dois requisitos: i) perdas de transmissão mínimas; ii) capacidade de transmitir a maior potência possível.

Atualmente, os sistemas de medição e caracterização mais avançados em eletrónica e optoelectrónica, particularmente para circuitos e sistemas de alta frequência (das radiofrequências até aos terahertz), empregam componentes (equipamentos, cabos, conectores, circuitos, etc.) cuja impedâncias de entrada (e de saída) e/ou característica é 50 Ω .

Alguns dos osciloscópio e geradores de sinais mais comuns permitem definir as impedâncias de entrada e de saída, respetivamente, em função da análise que se pretende fazer. Antes de começar a utilizar um dado equipamento devemos verificar qual é a impedância que está a ser considerada pelo equipamento.

No campo da radiofrequência, das micro-ondas e das ondas milimétricas os sistemas são desenhados, quase sem exceção com impedâncias de entrada e de saída (sempre que for aplicável) de 50 Ω , e transmissão guiada de sinais é feita usando linhas de transmissão (cabos coaxiais, linhas “micro-strip”, linhas “coplanar waveguide (CPW)”, etc.) com impedância característica de 50 Ω .

Impedância dos cabos de vídeo:

Os sinais de vídeo são geralmente transmitidos usando cabos coaxiais com impedância característica de 75 Ω , fazendo com que 75 Ω se tenha tornado um padrão quase universal para os cabos coaxiais para vídeo.

Impedância de altifalantes e colunas:

As impedâncias dos alto-falantes são mantidas relativamente baixas em comparação com outros componentes de áudio, de modo que a potência de áudio necessária possa ser transmitida sem o uso inconveniente (e, eventualmente perigoso) de tensões elevadas. A impedância nominal mais comum para alto-falantes é 8 Ω .

Regime Transitório

Os fenómenos transitórios que se observam nos circuitos RC, RL e RLC, são fundamentalmente idênticos na medida em que, em todos os casos, haverá uma dependência exponencial no tempo da propriedade a medir (corrente, tensão ou carga). O fenómeno transitório, ou seja, o estabelecimento do regime estacionário da grandeza em questão, ocorre num intervalo de tempo significativamente próximo da chamada constante de tempo do circuito, τ , segundo as equações:

$$g(t) = g_0 e^{-t/\tau}$$

$$f(t) = f_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Dada esta identidade formal, analisaremos apenas um desses fenómenos transitórios: variação da tensão de carga e de descarga de um condensador, Fig. 6.

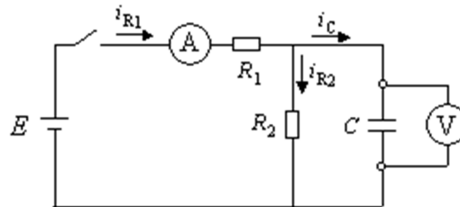


Fig. 6: Circuito RC. E : força eletromotriz do gerador; A: amperímetro; V: voltímetro.

Quando se fecha o interruptor, o condensador vai carregar-se através do paralelo das resistências R_1 e R_2 , $R_{//} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Quando se abre o interruptor, o condensador descarrega-se apenas através da resistência R_2 . As expressões que traduzem a variação da tensão aos terminais do condensador são as seguintes:

$$v(t) = E \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad \tau_{cg} = R_{//} C, \quad \text{carga}$$

$$v(t) = E \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-t/\tau}, \quad \tau_{dcg} = R_2 C, \quad \text{descarga}$$

A constante de tempo τ é muitas vezes usada como a unidade de tempo para os fenómenos em causa. Na fase de carga, a tensão aos terminais do condensador atinge aproximadamente 63% da tensão máxima τ segundos após o seu início, e mais de 99% da carga máxima para $t = 5\tau$ s. Na descarga de um condensador a tensão aos seus terminais para $t = \tau$ s é cerca de 37% do valor de tensão inicial, e pode considerar-se descarregado ao fim de $t = 5\tau$ s.