

Provas de Agregação
Lição de Síntese

Método Adjunto no Cálculo das Variações e Aplicações

Anca-Maria Toader

Universidade de Lisboa

Maio de 2011

Sumário

O Método Adjunto no Cálculo das Variações começou a ser utilizado com rigor matemático na resolução de problemas de optimização governados por equações com derivadas parciais a partir da década de 1980, com os trabalhos de J. Céa, F. Murat e L. Tartar.

A autora propõe uma passagem em revista de várias aplicações do Método Adjunto no Cálculo das Variações que estudou ao longo dos últimos dez anos de investigação científica no domínio da optimização de estruturas elásticas. São abordadas aplicações do Método Adjunto a problemas de controlo, optimização de forma e optimização de topologia. Por fim é discutido um problema de optimização de valores próprios com vista à identificação de coeficientes materiais da zona fissurada numa estrutura elástica.

Começa-se por dar uma breve descrição do Método Adjunto. O problema fulcral no Cálculo das Variações é o seguinte : Dadas duas grandezas físicas u e θ que estão relacionadas $u = u(\theta)$, determinar a relação entre as suas variações. Mais precisamente, dada uma variação de θ , designada por $\delta\theta$, essa produz uma variação na grandeza u , designada por δu ; pretende-se relacionar as duas variações δu e $\delta\theta$. Quando as variações $\delta\theta$ e δu são infinitesimais, surge naturalmente a noção de derivada de u em relação a θ , havendo neste caso uma dependência linear entre δu e $\delta\theta$.

No enquadramento das aplicações, a relação entre u e θ pode ser regida por uma equação de estado, equação essa com derivadas parciais, tendo a forma variacional

$$A_\theta(u_\theta, v) = l_\theta(v), \forall v \in H, \quad (P_\theta)$$

onde A_θ representa uma aplicação bilinear, contínua e coerciva que depende de θ , l_θ representa uma aplicação linear, contínua dependente de θ , sendo H um espaço de Hilbert. À grandeza física θ chama-se controlo.

O estado u_θ depende de θ implicitamente, através do problema (P_θ) e pretende-se descrever a variação de u_θ em função da variação de θ , sob hipóteses convenientes de diferenciabilidade das famílias de operadores A_θ e l_θ relativamente a θ .

Em problemas de controlo óptimo, dado um funcional a minimizar/maximizar, o objectivo é encontrar o controlo θ que produza o estado u_θ que minimiza/maximiza o funcional. Nomeadamente, dado um funcional que depende de θ tanto directamente como através da solução u_θ do problema (P_θ) ,

$$J(\theta) = \mathcal{J}(\theta, u_\theta),$$

pretende-se encontrar θ de modo a que J seja mínimo/máximo. Como uma condição necessária de extremo é ter a derivada total de J nula,

$$\frac{dJ}{d\theta} = 0,$$

um dos ingredientes fundamentais é o cálculo analítico dessa derivada. De notar que a derivada total de J envolve a derivada de u_θ relativamente a θ :

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) \tau = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta}(\theta, u_\theta) \tau + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau. \quad (dJ)$$

A dificuldade consiste no facto de o termo $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau$ envolver $\frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau$; a salientar que u_θ depende de θ implicitamente através do problema (P_θ) . É pelo *Método Adjunto* que essa dependência implícita é transformada numa dependência explícita de τ . Considerando o problema adjunto na forma

$$A_\theta(p_\theta, w) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta)w, \forall w \in H, \quad (PA_\theta)$$

à solução $p_\theta \in H$ chama-se *estado adjunto*. Então, sob hipóteses de simetria dos operadores A_θ é possível provar que o termo implícito em (dJ) tem a forma :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau = A_\theta(p_\theta, \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau) = A_\theta(\frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau, p_\theta) = \left(-\frac{dA_\theta}{d\theta}(u_\theta, p_\theta) + \frac{dl_\theta}{d\theta}(p_\theta) \right) \tau.$$

Consequentemente, a derivada total de J tem a seguinte forma em que a dependência de τ é explícita :

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) \tau = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta}(\theta, u_\theta) - \frac{dA_\theta}{d\theta}(u_\theta, p_\theta) + \frac{dl_\theta}{d\theta}(p_\theta) \right) \tau.$$

O Cálculo das Variações fornece a derivada do funcional J num ponto θ arbitrário. No entanto nos métodos de optimização de forma e de topologia é usada apenas a derivada no ponto $\theta = 0$, uma vez que estes usam a configuração corrente do controlo para determinar a configuração da iteração seguinte.

F. Murat e L. Tartar aplicaram em [23] o Método Adjunto na teoria da homogeneização e salientaram as origens do método nos trabalhos de Pontryagin. Seguindo essa observação, na secção 1 é apresentado o Princípio de Pontryagin. Na secção 2 é apresentado o Método Adjunto versus os multiplicadores de Lagrange, sendo essa a perspectiva partilhada por J. Céa em [12].

O Método Adjunto generalizado é formalizado na secção 3.

Na secção 4 é apresentado o Método Adjunto na optimização de forma, em casos clássicos bem como a contribuição da autora no domínio [3], [4], [5], [6].

A secção 5 é dedicada ao Método Adjunto na optimização de topologia, nomeadamente optimização de microestruturas periódicas, sendo baseada nos trabalhos da autora [7], [8], [9], [33].

A aplicação do Método Adjunto na optimização de valores e vectores próprios é abordada na secção 6 seguindo o enquadramento do trabalho da autora [24].

Abstract

The Adjoint Method in the Calculus of Variations is being used in a rigorous framework in optimization problems governed by partial differential equations since the eighties, with the papers of J. Céa, F. Murat and L. Tartar.

The author proposes a review of several applications of the Adjoint Method in the Calculus of Variations that she has been studying during the last ten years of scientific research in the domain of structural optimization of elastic structures. Applications of the Adjoint Method to control problems, shape optimization and topology optimization are

discussed. A problem of optimization of the eigenvalues and eigenmodes for identifying material coefficients in a damaged zone of elastic structure, is also considered.

A brief description of the Adjoint Method is given in the sequel. The main problem in the Calculus of Variations can be stated in a simplistic way like : Given two physical quantities u and θ that are related $u = u(\theta)$, determine the relation between their variations. More precisely, given a variation of the quantity θ , denoted by $\delta\theta$, it produces a variation of the quantity u , denoted by δu ; one seeks for the relation between their variations δu and $\delta\theta$. When the variations $\delta\theta$ and δu are infinitesimal, this leads naturally to the notion of derivative of u with respect to θ , having in this case a linear dependency between δu and $\delta\theta$.

In the framework of applications, the relation of u and θ is given by a state equation, which may be a partial differential equation having the variational formulation

$$A_\theta(u_\theta, v) = l_\theta(v), \forall v \in H, \quad (P_\theta)$$

where A_θ is a bilinear, continuous and coercive application depending on θ , l_θ is a linear, continuous application depending on θ , H is a Hilbert space. The physical quantity θ is called control.

The state u_θ depends on θ in an implicit way, through the problem (P_θ) and one seeks to describe the variation of u_θ in terms of the variation of θ , under convenient differentiability hypothesis on the families of operators A_θ and l_θ with respect to θ .

In optimal control problems, given a functional to minimize/maximize, the goal is to find a control θ producing the state u_θ that minimizes/maximizes the functional. Namely, given a functional

$$J(\theta) = \mathcal{J}(\theta, u_\theta),$$

that depends on θ , in a direct mode and through the solution u_θ do problem (P_θ) , one is looking for a θ that minimizes/maximizes J . Since a necessary condition for extremum is the vanishing of the total derivative

$$\frac{dJ}{d\theta} = 0,$$

one of the most important ingredients is the analytic calculus of the above referred derivative. Note that the total derivative of J involves the derivative of u_θ with respect to θ :

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) \tau = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta}(\theta, u_\theta) \tau + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau. \quad (dJ)$$

The difficulty lays in the fact that the term $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau$ involves $\frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau$; note that u_θ depends on θ implicitly through problem (P_θ) . It is the *Adjoint Method* that allows one to transform this implicit dependency in an explicit one with respect to τ .

Consider the adjoint problem in the form

$$A_\theta(p_\theta, w) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) w, \forall w \in H, \quad (PA_\theta)$$

the solution $p_\theta \in H$ is called the *adjoint state*. Then under symmetry hypothesis on the operators A_θ it is possible to prove that the implicit term in the expression of (dJ) has the form :

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial u}(\theta, u_\theta) \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau = A_\theta(p_\theta, \frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau) = A_\theta(\frac{du_\theta}{d\theta}(\theta) \tau, p_\theta) = \left(-\frac{dA_\theta}{d\theta}(u_\theta, p_\theta) + \frac{dl_\theta}{d\theta}(p_\theta) \right) \tau.$$

Therefore, the total derivative of J writes as the following expression, where the dependency on τ is explicit :

$$\frac{dJ}{d\theta}(\theta) \tau = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \theta}(\theta, u_\theta) - \frac{dA_\theta}{d\theta}(u_\theta, p_\theta) + \frac{dl_\theta}{d\theta}(p_\theta) \right) \tau.$$

The Calculus of Variations provides the derivative of the functional J in an arbitrary point θ . However in the shape and topology optimization methods only the derivative in $\theta = 0$ is employed since these methods use the current configuration of the control in order to determine the configuration of the next iteration.

F. Murat and L. Tartar in [23] applied the Adjoint Method in the Theory of Homogenization and pointed out its origins in the works of Pontryagin. Following this assertion, in section 1 Pontryagin's Principle is presented. In section 2 the Adjoint Method is introduced from the perspective of the Lagrange multipliers. This is the point of view followed, in a practical way, by J. Céa in [12].

The generalized Adjoint Method is formalized in section 3.

In section 4 the Adjoint Method is applied to shape optimization. Classical cases are presented as well as the author's contribution in the field [3], [4], [5], [6].

Section 5 is devoted to the Adjoint Method applied to topology optimization of periodic microstructures and presents some of the results obtained by the author in [7], [8], [9], [33].

The Adjoint Method applied to optimization of eigenvalues and eigenmodes is described in section 6 following the framework presented by the author in [24].

1. Princípio de Pontryagin.

Designa-se por $AC(0, T; \mathbb{R}^m)$ o espaço das funções $y : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^m$ absolutamente contínuas.

Uma função y diz-se absolutamente contínua se for contínua ($y \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)$), derivável em quase todos os pontos de $[0, T]$ e se a sua derivada for integrável $\frac{dy}{dt} \in L^1(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Seja $H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ o espaço de Sobolev das funções y de $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ cujas derivadas distribucionais $\frac{dy}{dt}$ pertencem a $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

As seguintes inclusões estritas têm lugar $H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \subset AC(0, T; \mathbb{R}^m) \subset C([0, T]; \mathbb{R}^m)$.

Considera-se o seguinte problema clássico na teoria do controlo :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = A(t, y(t), \theta(t)), & t \in]0, T[, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde θ , o controlo, pertence a $L^\infty(0, T; [0, 1])$. Quer-se minimizar o funcional

$$F(\theta) = \int_0^T B(t, y(t), \theta(t)) dt, \quad (1.2)$$

em que a aplicação $B : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável nas variáveis y e θ e contínua na variável t .

O Princípio de Pontryagin fornece uma condição necessária de optimalidade, ou seja uma condição necessária para que uma função θ minimize o funcional F .

Para θ fixo, (1.1) é um problema de Cauchy cuja solução y depende de θ . Se a aplicação $A : [0, T] \times \mathbb{R}^m \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^m$ for continuamente diferenciável nas variáveis y e θ e contínua na variável t , então a aplicação $\theta \mapsto y(\theta)$, que a cada $\theta \in L^\infty(0, T; [0, 1])$ faz corresponder a solução $y \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ do problema (1.1), é continuamente diferenciável (conforme Teorema A.2 do Anexo A). Então uma variação $\delta\theta$ de θ induzirá na solução y uma variação $\delta y = \frac{dy}{d\theta}(\theta)\delta\theta$, que é solução do problema :

$$\begin{cases} \frac{d(\delta y)}{dt}(t) = \frac{\partial A}{\partial y}(t, y(t), \theta(t))\delta y(t) + \frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t))\delta\theta(t), & t \in]0, T[, \\ \delta y(0) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Este último problema pode obter-se directamente, derivando o problema (1.1) em θ , ou então usando a formulação variacional do problema (1.1). Neste último caso, tendo em conta que a formulação variacional de (1.1) é

$$\begin{cases} \text{procura-se } y \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \text{ com a propriedade} \\ - \int_0^T y(s) \frac{dv}{dt}(s) ds = \int_0^T A(s, y(s), \theta(s)) v(s) ds + y_0 v(0), \\ \forall v \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m), \text{ com } v(T) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

a variação $\delta y \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ verifica o seguinte problema

$$\begin{aligned} - \int_0^T \delta y(s) \frac{dv}{dt}(s) ds &= \int_0^T \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) \delta\theta(s) + \frac{\partial A}{\partial y}(s, y(s), \theta(s)) \delta y(s) \right) v(s) ds, \\ &\forall v \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m), \text{ com } v(T) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, a formulação variacional do problema (1.3) que define δy é

$$\begin{cases} - \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}(s) + \frac{\partial A}{\partial y}(s, y(s), \theta(s)) v(s) \right) \delta y(s) ds = \int_0^T \frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) v(s) \delta\theta(s) ds, \\ \forall v \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m), \text{ com } v(T) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Por outro lado, a variação $\delta\theta \in L^\infty(0, T; \mathbb{R})$ de θ determina uma variação no funcional F ,

$$\delta F = \int_0^T \left[\frac{\partial B}{\partial y}(s, y(s), \theta(s)) \delta y(s) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) \delta\theta(s) \right] ds. \quad (1.6)$$

Para tornar explícita a dependência linear de $\delta\theta$ do termo $\int_0^T \frac{\partial B}{\partial y}(s, y(s), \theta(s))\delta y(s)ds$, procura-se a solução $p \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ do seguinte problema, chamado problema adjunto :

$$\begin{cases} -\left(\frac{dp}{dt}(s) + \frac{\partial A}{\partial y}(s, y(s), \theta(s))p(s)\right) = \frac{\partial B}{\partial y}(s, y(s), \theta(s)), \\ p(T) = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Se p for o estado adjunto, a variação δF em (1.6), substituindo o termo que envolve a derivada de B em y , reescreve-se

$$\delta F = \int_0^T \left[-\left(\frac{dp}{dt}(s) + \frac{\partial A}{\partial y}(s, y(s), \theta(s))p(s)\right)\delta y(s) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s))\delta\theta(s) \right] ds. \quad (1.8)$$

Como a variação δy verifica (1.5) para toda a função teste v , em particular para $v = p$, tem-se

$$-\int_0^T \left(\frac{dp}{dt}(s) + \frac{\partial A}{\partial y}(s, y(s), \theta(s))p(s)\right)\delta y(s)ds = \int_0^T \frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s))p(s)\delta\theta(s)ds,$$

e conseqüentemente, substituindo em (1.8), a variação δF assume a forma

$$\delta F = \int_0^T \left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s))p(s) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) \right] \delta\theta(s)ds. \quad (1.9)$$

Obteve-se uma expressão da variação de F em que a dependência linear da variação de θ é explícita.

O Princípio de Pontryagin pode ser enunciado como

Proposição 1.1. *Sejam A e B as aplicações acima introduzidas com as propriedades suplementares de A ser linear no terceiro argumento e B ser convexa no terceiro argumento. Se $\theta^* \in L^\infty(0, T; [0, 1])$ for solução do problema de minimização do funcional (1.2), onde y é solução do problema (1.1), então, para quase todo $t \in [0, T]$, a função*

$$\tau \in [0, 1] \mapsto p(t)A(t, y(t), \tau) + B(t, y(t), \tau) \quad (1.10)$$

atinge o mínimo em $\tau = \theta^(t)$, onde a função p é solução do problema adjunto (1.7).*

Demonstração: Como θ^* minimiza o funcional

$$F(\theta) = \int_0^T B(t, y(t), \theta(t))dt$$

resulta que as variações $\delta\theta$ a partir do mínimo θ^* induzem no funcional F variações δF positivas. Tem-se, usando a expressão (1.9) de δF :

$$\delta F = \int_0^T \left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s))p(s) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) \right] \delta\theta(s)ds \geq 0, \quad (1.11)$$

$$\forall \delta\theta = \theta^* - \theta.$$

Resulta que, dado $\delta\theta = \theta^* - \theta$ arbitrariamente fixo, para quase todo $t \in [0, T]$ (relativamente à medida de Lebesgue) tem-se

$$\left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t))p(t) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t)) \right] \delta\theta(t) \geq 0. \quad (1.12)$$

Prova-se (1.12) por absurdo : Sopõe-se que existe um intervalo $[t_0, t_1] \subset [0, T]$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t))p(t) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t)) \right] (\theta^*(t) - \theta(t)) < -\varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.13)$$

Escolha-se $\tilde{\theta} = \begin{cases} \theta^*(t), & t \notin [t_0, t_1] \\ \theta(t), & t \in [t_0, t_1] \end{cases}$. Então de (1.9) resulta

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_0^T \left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s))p(s) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) \right] (\theta^*(s) - \tilde{\theta}(s)) ds, \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial A}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s))p(s) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(s, y(s), \theta(s)) \right] (\theta^*(s) - \theta(s)) ds < -\varepsilon(t_1 - t_0) < 0. \end{aligned}$$

Obeve-se uma contradição com (1.11) o que prova a afirmação (1.12).

De (1.12) obtemos as seguintes conclusões :

Nos conjuntos em que $\theta(t) = 0$, como $\theta^*(t) \geq 0$, tem-se $\frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t))p(t) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t)) \geq 0$.

Nos conjuntos em que $\theta(t) = 1$, como $\theta^*(t) \leq 1$, tem-se $\frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t))p(t) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t)) \leq 0$.

Nos conjuntos em que $0 < \theta(t) < 1$, como $\theta^*(t) \in [0, 1]$, tem-se $\frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t))p(t) + \frac{\partial B}{\partial \theta}(t, y(t), \theta(t)) = 0$.

Como A é linear em τ e B é convexo em τ resulta que a expressão $p(t)A(t, y(t), \tau) + B(t, y(t), \tau)$ é convexa em τ . Consequentemente, as três afirmações acima implicam que para $t \in [0, T]$ fixo, $\theta^*(t)$ minimiza a função $\tau \in [0, 1] \mapsto p(t)A(t, y(t), \tau) + B(t, y(t), \tau)$. \square

Observação 1.2. O estado directo y e o estado adjunto p pertencem naturalmente ao mesmo espaço de Hilbert $H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$. Ao tentar enfraquecer o espaço de procura da solução y , necessariamente devem ser usadas funções teste com mais regularidade. Neste caso, visto que a formulação variacional (1.5) é usada com o estado adjunto p como função teste, p deve ter a respectiva regularidade. Esse facto não é natural nem é possível garanti-lo sem o impor artificialmente.

2. Multiplicadores de Lagrange sobre espaços de Banach.

O seguinte resultado sobre multiplicadores de Lagrange demonstrado em [34] (secção 4.14) pode ser aplicado para obter o estado adjunto. A observar que este enquadramento não abrange o caso em que o controlo pertence a $L^\infty(0, T; [0, 1])$ (conjunto não aberto de $L^\infty(0, T)$) mas apenas fornece o resultado para o caso em que o controlo pertence a $L^\infty(0, T)$ (ou a um subconjunto aberto deste).

Teorema 2.1. *Sejam dois espaços de Banach reais X e Y e seja $U \subset X$ um subconjunto aberto de X . Consideram-se duas aplicações continuamente diferenciáveis, $f : U \mapsto \mathbb{R}$, que representa a função a minimizar/maximizar e $g : U \mapsto Y$, que representa o constrangimento. Se u_0 for ponto de extremo da restrição de f a $g^{-1}(0)$ e se a derivada de g em u_0 , designada por $Dg(u_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$, for sobrejectiva, então existe uma aplicação $\lambda \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$, chamada multiplicador de Lagrange, com a propriedade*

$$Df(u_0) = \lambda \circ Dg(u_0), \text{ ou, equivalente, } Df(u_0) = (Dg(u_0))^*(\lambda),$$

onde $(Dg(u_0))^* : \mathcal{L}(Y, \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, $(Dg(u_0))^*(\lambda) = \lambda \circ Dg(u_0)$ é a aplicação adjunta de $Dg(u_0)$.

Considera-se o problema de controlo da secção 1, na sua forma variacional : Pretende-se minimizar/maximizar o funcional $F : L^\infty(0, T) \mapsto \mathbb{R}$, definido por

$F(\theta) = \int_0^T B(t, y(t), \theta(t)) dt$, onde y depende do controlo $\theta \in L^\infty(0, T)$ através do problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{procura-se } y \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \text{ tal que} \\ - \int_0^T y(s) \frac{dv}{dt}(s) ds = \int_0^T A(s, y(s), \theta(s)) v(s) ds + y_0 v(0), \\ \forall v \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m), \text{ com } v(T) = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

O problema (2.1) acima é o mesmo que o problema variacional (1.4) da secção 1.

Tomando $U = X = H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \times L^\infty(0, T)$ e $f : H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \times L^\infty(0, T) \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(y, \theta) = \int_0^T B(t, y(t), \theta(t)) dt \quad (2.2)$$

e tomando $Y = L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ e $g : H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \times L^\infty(0, T) \mapsto L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$,

$$g(y, \theta) = \left(\frac{dy}{dt}(t) - A(t, y(t), \theta(t)), \quad y(0) - y_0 \right), \quad (2.3)$$

f e g são continuamente diferenciáveis (devido às propriedades de A e de B). De observar que, como $H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \subset C([0, T]; \mathbb{R}^m)$, a segunda componente de g faz sentido.

Seja (y_0, θ_0) um ponto de extremo de f sujeito ao constrangimento $g(y_0, \theta_0) = 0 \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$. A sobrejectividade da aplicação $Dg(y_0, \theta_0)$, $Dg(y_0, \theta_0) \in \mathcal{L}(H^1(0, T; \mathbb{R}^m) \times L^\infty(0, T), L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m)$, definida por

$$Dg(y_0, \theta_0)(\delta y, \delta \theta) = \begin{pmatrix} \frac{d(\delta y)}{dt}(t) - \frac{\partial A}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta y - \frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta \theta \\ \delta y(0) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

demonstra-se sem dificuldade tendo em conta que reduz-se à resolução duma equação diferencial ordinária linear com condição inicial. Mais precisamente, dados $(\alpha(t), \beta) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ pode-se tomar $\delta \theta = 0$ e δy é a solução pertencente a $H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ do problema

$$\begin{cases} \frac{d(\delta y)}{dt}(t) - \frac{\partial A}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta y = \alpha(t), & t \in]0, T[, \\ \delta y(0) = \beta, \end{cases}$$

ou seja $\delta y(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial A}{\partial y}(s, y_0(s), \theta_0(s))ds} \left(\int_0^t \alpha(s) e^{-\int_0^s \frac{\partial A}{\partial y}(\gamma, y_0(\gamma), \theta_0(\gamma))d\gamma} ds + \beta \right)$.

Aplicando o Teorema 2.1 acima, resulta que existe um multiplicador de Lagrange $\lambda \in \mathcal{L}(L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$, ou seja, tendo em conta que $L^2(0, T; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^m$ é espaço de Hilbert, existem $\lambda_1 \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R}^m$ com a propriedade

$$\begin{aligned} \int_0^T \lambda_1(t) \left[\frac{d}{dt}(\delta y)(t) - \frac{\partial A}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta y - \frac{\partial A}{\partial \theta}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta \theta \right] dt + \\ + \lambda_2 \delta y(0) = \int_0^T \left[\frac{\partial B}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta y + \frac{\partial B}{\partial \theta}(t, y_0(t), \theta_0(t))\delta \theta \right] dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

para todo $\delta y \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$ e todo $\delta \theta \in L^\infty(0, T)$. Em particular, para $\delta \theta = 0$ e para todo $\delta y \in \mathcal{D}(]0, T[; \mathbb{R}^m)$, obtemos

$$\int_0^T \lambda_1(t) \frac{d}{dt}(\delta y)(t) dt = \int_0^T \lambda_1(t) \left[\frac{\partial A}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t)) + \frac{\partial B}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t)) \right] \delta y(t) dt.$$

Como $\frac{\partial A}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t))$ e $\frac{\partial B}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t))$ pertencerem a $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$, λ_1 verifica

$$\int_0^T \lambda_1(t) \frac{d}{dt}(\delta y)(t) dt = \int_0^T q(s) \delta y(t) dt$$

onde q designa uma função de $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^m)$. Pela definição da derivada fraca resulta que a função λ_1 possui derivada fraca, em particular, $\lambda_1 \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$. Tomando $\delta \theta = 0$ em (2.5) obtém-se, para $\delta y \in H^1(0, T; \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\frac{d\lambda_1}{dt}(t) + \lambda_1(t) \frac{\partial A}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t)) + \frac{\partial B}{\partial y}(t, y_0(t), \theta_0(t)) \right) \delta y(t) + \\ + \lambda_1(T)(\delta y(T)) + (-\lambda_1(0) + \lambda_2)(\delta y)(0) = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente devem ser satisfeitas as equações

$$\begin{cases} \lambda_1(T) = 0, \\ - \left(\frac{d\lambda_1}{dt}(s) + \frac{\partial A}{\partial y}(s, y_0(s), \theta_0(s))\lambda_1(s) \right) = \frac{\partial B}{\partial y}(s, y_0(s), \theta_0(s)) \text{ em }]0, T[, \end{cases} \quad (2.6)$$

e ainda a condição $\lambda_2 = \lambda_1(0)$. A solução λ_1 de (2.6) é de facto o estado adjunto designado por p na secção 1 e é solução do problema (1.7) que coincide com (2.6).

No entanto, como o constrangimento considerado no Teorema 2.1 é de tipo igualdade, não é possível aplicar este resultado no caso em que o controlo θ pertence a $L^\infty(0, T; [0, 1])$, que é um constrangimento de tipo desigualdade.

3. Método Adjunto generalizado.

O enquadramento descrito na presente secção é inspirado nas ideias de J. Céa (ver [12]) e constitui uma generalização ao Método Adjunto utilizado em [18]. Os resultados foram publicados em [33].

Seja V um espaço de Hilbert, seja V_0 um subespaço fechado de V e seja $K = \gamma + V_0$ uma variedade afim, fechada de V , onde γ é um elemento fixo de V .

O seguinte Lema, introduzido em [33], representa uma generalização do Lema Lax-Milgram e torna-se necessário quando a forma bilinear é coerciva apenas num subespaço fechado de V .

Lema 3.1. *Dada uma forma bilinear, simétrica e contínua $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, cuja restrição a $V_0 \times V_0$ é coerciva, e uma forma linear contínua $l : V \rightarrow \mathbb{R}$, o problema*

$$\begin{cases} \text{procurar } u \in K \text{ tal que} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

tem uma solução única.

Demonstração : O problema (3.1) é equivalente ao seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} \text{procurar } u_0 \in V_0 \text{ tal que} \\ a(u_0, v) = l(v) - a(\gamma, v) \quad \forall v \in V_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

De notar que u é solução de (3.1) se e só se $u_0 = u - \gamma$ for solução do problema auxiliar (3.2). Como $l - a(\gamma, \cdot)$ é uma forma linear contínua sobre V_0 , pode-se aplicar o Lema Lax-Milgram ao problema auxiliar. Resulta que existe e é única a solução u_0 do problema (3.2). Consequentemente existe e é única a solução u do problema (3.1). \square

Seja um parâmetro $\rho > 0$ e uma família de formas $a_\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineares, simétricas, uniformemente contínuas (com a constante M) e coercivas apenas no subespaço V_0 (com a constante $\alpha > 0$) :

$$a_\rho(u, v) \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in V, \quad (3.3)$$

$$a_\rho(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V_0. \quad (3.4)$$

Seja uma família de formas lineares $l_\rho : V \rightarrow \mathbb{R}$, uniformemente contínuas (com a constante $L > 0$) :

$$|l_\rho(v)| \leq L \|v\| \quad \forall v \in V. \quad (3.5)$$

Supõe-se que existe uma função $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ com a propriedade

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = 0,$$

para a qual as seguintes estimativas se verificam

$$\|a_\rho - a_0 - f(\rho)\delta_a\|_{\mathcal{L}^2(V)} = o(f(\rho)), \quad (3.6)$$

$$\|l_\rho - l_0 - f(\rho)\delta_l\|_{\mathcal{L}(V)} = o(f(\rho)), \quad (3.7)$$

onde $\delta_a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, simétrica e contínua, e $\delta_l : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear contínua. $\mathcal{L}(V)$ representa o espaço das formas lineares e contínuas sobre V e $\mathcal{L}^2(V)$ representa o espaço das formas bilineares e contínuas sobre V .

Segundo o Lema 3.1, para um parâmetro $\rho > 0$ arbitrariamente fixo, o problema

$$\begin{cases} \text{procurar } u^\rho \in K \text{ tal que} \\ a_\rho(u^\rho, v) = l_\rho(v) \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

tem uma solução única.

O resultado seguinte descreve o comportamento das soluções u^ρ em termos da solução u_0 do problema não perturbado :

Lema 3.2. *Se u^ρ for solução do problema (3.8) e u^0 for solução do problema :*

$$\begin{cases} \text{procurar } u^0 \in K \text{ tal que} \\ a_0(u^0, v) = l_0(v) \quad \forall v \in V_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

tem-se

$$\|u^\rho - u^0\| = O(f(\rho)).$$

Demonstração : Para u^0 e u^ρ em K , $u^\rho - u^0 \in V_0$ e pela coecividade de a_ρ tem-se

$$\begin{aligned} \alpha \|u^\rho - u^0\|^2 &\leq a_\rho(u^\rho - u^0, u^\rho - u^0) = \\ &a_\rho(u^\rho, u^\rho - u^0) - a_\rho(u^0, u^\rho - u^0) = l_\rho(u^\rho - u^0) - a_\rho(u^0, u^\rho - u^0) = \\ &l_0(u^\rho - u^0) + (l_\rho - l_0)(u^\rho - u^0) - a_\rho(u^0, u^\rho - u^0) = \\ &a_0(u^0, u^\rho - u^0) - a_\rho(u^0, u^\rho - u^0) + (l_\rho - l_0)(u^\rho - u^0) = \\ &f(\rho) (\delta_a(u^0, u^\rho - u^0) + \delta_l(u^\rho - u^0)) + o(f(\rho)) \|u^\rho - u^0\| (\|u^0\| + 1) \leq \\ &O(f(\rho)) \|u^\rho - u^0\| (\|u^0\| + 1). \end{aligned}$$

Na última desigualdade acima usou-se a continuidade da forma bilinear δ_a e a continuidade da forma linear δ_l . Conseqüentemente tem-se

$$\|u^\rho - u^0\| \leq O(f(\rho))(\|u^0\| + 1)$$

de onde resulte a estimativa do enunciado. \square

O objectivo é estudar o problema de minimização

$$\min j(\rho) \text{ onde } j(\rho) = J_\rho(u^\rho),$$

O resultado principal da presente secção permite o cálculo da derivada de $j(\rho)$ supondo que o funcional J_ρ admite o desenvolvimento assimpótico (3.10) relativamente ao parâmetro ρ .

De observar que no caso em que $V = V_0 = K$ obtém-se o Teorema 2.2 de [18].

Teorema 3.3. *Supõe-se que existe $\delta_J : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$J_\rho(v) - J_0(u) = DJ(u)(v - u) + f(\rho)\delta_J(u) + o(\|v - u\| + f(\rho)), \forall u, v \in V, \quad (3.10)$$

onde $DJ(u)$ é a derivada de Gâteaux de J_0 relativamente à variável u . Então, o funcional $j(\rho)$ tem o seguinte desenvolvimento assimpótico

$$j(\rho) = j(0) + f(\rho) (\delta_J(u) + \delta_a(u, v) - \delta_l(v)) + o(f(\rho)), \quad (3.11)$$

e o estado adjunto p é solução do seguinte problema adjunto

$$\begin{cases} \text{procurar } p \in V_0 \text{ tal que} \\ a_0(w, p) = -DJ(u^0)w, \quad \forall w \in V_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Demonstração : Como u^ρ é solução de (3.8) e u^0 é solução de (3.9), tem-se

$$\begin{aligned} j(\rho) - j(0) &= J_\rho(u^\rho) - J_0(u^0) \\ &= J_\rho(u^\rho) - J_0(u^0) + a_\rho(u^\rho, v) - a_0(u^0, v) + l_\rho(v) - l_0(v) \\ &= DJ(u^0)(u^\rho - u^0) + a_\rho(u^\rho, v) - a_0(u^0, v) + f(\rho)(\delta_J(u^0) - \delta_l(v)) + o(f(\rho)), \end{aligned}$$

em que a última igualdade resulta da hipótese (3.10) e da estimativa do Lema 3.2.

Tomando v igual ao estado adjunto $v = p$, que é solução do problema adjunto (3.12), obtém-se

$$\begin{aligned} j(\rho) - j(0) &= -a_0(u^\rho - u^0, p) + a_\rho(u^\rho, p) - a_0(u^0, p) + f(\rho)(\delta_J(u^0) - \delta_l(p)) + o(f(\rho)) \\ &= a_\rho(u^\rho, p) - a_0(u^0, p) + f(\rho)(\delta_J(u^0) - \delta_l(p)) + o(f(\rho)). \end{aligned}$$

Usando a estimativa (3.6) e o Lema 3.2 resulta que

$$\begin{aligned} j(\rho) - j(0) &= f(\rho)\delta_a(u^\rho, p) + f(\rho)(\delta_J(u^0) - \delta_l(p)) + o(f(\rho)) \\ &= f(\rho) (\delta_J(u) + \delta_a(u, v) - \delta_l(v)) + o(f(\rho)). \square \end{aligned}$$

Observação 3.4. Nos trabalhos de J. Céa e na literatura daí emergente é usado um funcional auxiliar designado por Lagrangeano $\mathcal{L}_\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, definido por :

$$\mathcal{L}_\rho(u, v) = J_\rho(u) + a_\rho(u, v) - l_\rho(v).$$

No entanto na abordagem acima não foi utilizado o Lagrangeano, esse sendo apenas um utensílio auxiliar e não uma característica essencial do problema.

4. A otimização de forma e o Método Adjunto.

A otimização de forma aplicada a estruturas elásticas constitui um assunto muito importante para aplicações e é bastante popular. A ideia geral é variar a forma duma estrutura elástica (o domínio) dentro da mesma classe de homotopia, ou seja, variando o domínio através de transformações homotópicas. A primeira abordagem remonta historicamente a 1908, à apresentação do trabalho de J. Hadamard [19]. Os métodos clássicos na otimização de forma foram desenvolvidos por F. Murat e J. Simon [22],[28], O. Pironneau [25], J.Sokołowski e J. P. Zolesio [30].

Considera-se o seguinte problema modelo na elasticidade linearizada, estudado em [3], [4], [5], [6]: Dado um domínio aberto e limitado, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 2$ ou 3 , ocupado por um material elástico isotrópico cuja lei de Hook é

$$A\zeta = 2\mu\zeta + \lambda(\text{tr}\zeta)I \quad (4.1)$$

onde μ e λ são as constantes de Lamé, o campo de deslocamentos u sobre Ω é solução do sistema de equações da elasticidade linearizada :

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(u)) = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_D, \\ Ae(u)n = g \text{ sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.2)$$

O tensor das extensões é notado por $e(u)$ e representa a parte simétrica do gradiente de u , ou seja, $e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$. A fronteira do domínio Ω está dividida em dois subconjuntos disjuntos Γ_D e Γ_N , sobre Γ_D estão aplicadas as condições de Dirichlet e sobre Γ_N estão aplicadas as condições de Neumann :

$$\partial\Omega = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N. \quad (4.3)$$

A função f , que representa as forças volúmicas aplicadas à estrutura, pertence a $(L^2(\Omega))^d$ e a função g pertence a $(H^2(\Omega))^d$, e representa as forças superficiais, no sentido em que trata-se do traço de g sobre Γ_N . Assumindo que $\Gamma_D \neq \emptyset$, é conhecido que existe e é única a solução $u \in (H^2(\Omega))^d$ do sistema (4.2).

Pretende-se minimizar o *funcional objetivo* $J(\Omega)$ quando o domínio Ω varia, mantendo o volume constante igual a V ($V > 0$, dado). O problema modelo em otimização de forma é procurar

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega, u(\Omega)), \quad (4.4)$$

onde \mathcal{U}_{ad} representa o conjunto dos domínios admissíveis :

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ \Omega \subset D, \int_{\Omega} dx = V \right\}, \quad (4.5)$$

$D \subset \mathbb{R}^d$ sendo um aberto limitado fixo dentro do qual Ω varia. No entanto a escolha natural (4.5) para o conjunto de domínios admissíveis torna o problema (4.4) mal posto. A existência da solução do problema (4.4) foi provada para alguns subconjuntos de \mathcal{U}_{ad} por D. Chenais [14], F. Murat e J. Simon [22], e mais recentemente por A. Chambolle [13].

No trabalho [4] é estudado um problema modelo na elasticidade linearizada em que a condição de Neumann é de tipo pressão hidrostática, ou seja

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u)) = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_D, \\ Ae(u)n = p_h n \text{ sobre } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde p_h pertence a $H^2(D)$ e é uma função escalar dada. De observar que devido à variação do domínio Ω , o problema de optimização (4.4), para u solução de (4.6), não é um caso particular do caso em que u verifica um problema da forma (4.2), onde a condição de Neumann corresponde a um campo vectorial g dado, fixo, cujos valores não dependem da posição do domínio Ω . No caso da pressão hidrostática, num dado ponto, o valor da força superficial depende do valor p_h dado e da normal ao domínio no respectivo ponto. Em função da orientação da fronteira do domínio, no mesmo ponto, a força superficial aplicada poderá ser outra, mantendo-se sempre normal à fronteira do domínio.

As técnicas de cálculo da derivada de forma desenvolvidas em [3], [4], [5] e [6] têm um carácter geral e podem ser usadas para qualquer funcional objectivo $J(\Omega, u(\Omega))$ com u solução em Ω do sistema de equações da elasticidade linearizada. Na subsecção 4.1 é introduzida a definição da derivada de forma e algumas propriedades relacionadas. Na subsecção 4.2 são enunciados alguns resultados clássicos sobre derivadas de forma enquanto que nas subsecções 4.3, 4.4 e 4.5 são enunciados os resultados teóricos que estão na base dos trabalhos [3], [4], [5], [6]. A demonstração do Teorema 4.8 é esboçada na subsecção 4.4 e permite uma visão geral sobre as técnicas utilizadas. As fórmulas das derivadas obtidas nos Teoremas 4.7, 4.8 e 4.9 constituem um ingrediente essencial dos algoritmos numéricos propostos em [3], [4], [5] e [6].

4.1. Derivação relativamente ao domínio.

Para definir uma noção de derivada é necessário introduzir um tipo de parametrização da forma. Ao longo da presente subsecção será seguido o enquadramento descrito por F. Murat e J. Simon em [22] e [28].

Seja Ω_0 um domínio de referência, aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 . Considera-se o conjunto de formas admissíveis obtidas pela deformação de Ω_0

$$\mathcal{U}_{ad}^1 = \left\{ \Omega \subset D, \int_{\Omega} dx = V, \text{ tal que existe } T \in \mathcal{T} \text{ com } \Omega = T(\Omega_0) \right\}, \quad (4.7)$$

onde \mathcal{T} é o espaço de difeomorfismos sobre \mathbb{R}^d definido por

$$\mathcal{T} = \{ T \text{ tal que } T \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), T^{-1} \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \}. \quad (4.8)$$

Para definir uma noção de diferenciabilidade em Ω_0 consideram-se os difeomorfismos que são próximos da identidade, ou seja,

$$T = I + \theta \text{ com } \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \quad \|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)} < 1,$$

e os conjuntos por eles transportados

$$\Omega_\theta := (I + \theta)\Omega = \{x + \theta(x) \mid x \in \Omega_0\}.$$

O seguinte Lema garante que para θ “suficientemente pequeno”, $T = I + \theta$ é um difeomorfismo e pertence a \mathcal{T} .

Lema 4.1. *Para todas as funções $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ que verificam*

$$\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)} < 1,$$

a função $T = I + \theta$ é uma bijecção de \mathbb{R}^d que pertence ao conjunto \mathcal{T} definido em (4.8).

Definição 4.2. *Seja uma aplicação $J : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que J é diferenciável relativamente ao domínio, em Ω_0 , se a função*

$$\theta \mapsto J((I + \theta)\Omega_0) \tag{4.9}$$

é diferenciável em 0 no espaço de Banach $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

A derivada de forma de J é definida como a derivada de Fréchet da aplicação (4.9), isto é, uma forma linear contínua L sobre $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ tal que

$$J((I + \theta)(\Omega_0)) = J(\Omega_0) + L(\theta) + o(\theta), \text{ com } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0, \text{ onde } L = J'(\Omega_0).$$

Dado que a representação dum domínio Ω de \mathcal{U}_{ad}^1 por um difeomorfismo não é única (podem existir $\theta_1 \neq \theta_2$ tais que $(I + \theta_1)(\Omega_0) = (I + \theta_2)(\Omega_0)$, basta tomar $\theta_2 - \theta_1$ de suporte compacto em Ω_0 e de norma suficientemente pequena), prova-se que a derivada $J'(\Omega_0)$ depende apenas da componente normal de θ sobre a fronteira de Ω_0 :

Proposição 4.3. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 . Seja $J : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em Ω_0 . Então se $\theta_1, \theta_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ são tais que $\theta_2 - \theta_1 \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ e verificam*

$$\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n \text{ sobre } \partial\Omega_0,$$

a derivada $J'(\Omega_0)$ satisfaz

$$J'(\Omega_0)(\theta_1) = J'(\Omega_0)(\theta_2).$$

O resultado anterior é fundamental para aplicações uma vez que implica que a derivada de forma depende apenas da componente normal da variação da forma sobre a fronteira do domínio.

4.2. A derivada de forma. Alguns casos clássicos.

As duas proposições seguintes fornecem a derivada de forma para dois casos particulares de funções J em que o funcional não depende do estado directo u que é a solução do problema (4.2). As fórmulas das derivadas, obtidas por F. Murat e J. Simon em [22] e [28] e que são apresentadas nas Proposições 4.4 a 4.6, realçam a dependência dessas da componente normal da variação do domínio sobre a fronteira.

Proposição 4.4. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 . Seja $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ e seja $J : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Então J é diferenciável em Ω_0 e

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\Omega_0} \operatorname{div}(\theta(x)f(x)) dx_0 = \int_{\partial\Omega_0} \theta(x) \cdot n(x) f(x) ds,$$

para todo $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, onde n representa a normal exterior ao domínio Ω_0 .

Proposição 4.5. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^2 . Seja $f \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ e seja $J : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f(x) dx.$$

Então J é diferenciável em Ω_0 e

$$J'(\Omega_0)(\theta) = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial f}{\partial n} + \operatorname{div} n f \right) \theta \cdot n ds,$$

para todo $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, onde n representa a normal exterior ao domínio Ω_0 .

Em geral, para uma função J qualquer, aplica-se o seguinte resultado. De notar que a dependência de J da forma do domínio Ω pode-se traduzir pela dependência de J do estado directo u , que por sua vez depende de Ω pelo problema (4.2) de que é solução.

Proposição 4.6. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 . Seja uma aplicação $\phi : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$. Defina-se $\tilde{\phi} : W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$ por*

$$\tilde{\phi}(\theta) = \phi((I + \theta)(\Omega_0)) \circ (I + \theta),$$

por hipótese derivável em $\theta = 0$. Então a aplicação $J : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \phi(\Omega) dx.$$

é diferenciável em Ω_0 e tem-se

$$\frac{dJ}{d\Omega}(\theta)(\tau) |_{\theta=0} = \int_{\partial\Omega_0} \left(\phi(\Omega_0) \operatorname{div} \tau + \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta}(\theta)(\tau) |_{\theta=0} \right) dx$$

para todo $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Se, por hipótese $\tilde{\phi}$ como aplicação de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ para $L^1(\partial\Omega_0)$, for diferenciável, então a aplicação J definida por

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(\Omega) ds,$$

é diferenciável em Ω_0 e tem-se

$$\frac{dJ}{d\Omega}(\theta)(\tau) |_{\theta=0} = \int_{\partial\Omega_0} \left[\phi(\Omega_0) (\operatorname{div} \tau - \nabla \tau n \cdot n) + \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta}(\theta)(\tau) |_{\theta=0} \right] ds.$$

4.3. A derivada de forma do funcional de flexibilidade.

Na otimização de estruturas elásticas, é habitual otimizar, em primeiro lugar, a flexibilidade duma estrutura uma vez que ao minimizar a flexibilidade maximiza-se a rigidez dessa. O funcional objectivo designado por flexibilidade (em inglês *compliance*) tem a forma

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot u ds \quad (4.10)$$

onde u é solução do problema (4.2).

O seguinte resultado, que fornece a derivada de forma do funcional de flexibilidade J_1 , foi enunciado em [3] e provado em [4].

Teorema 4.7. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 , e seja $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Supondo $f \in H^1(\Omega)^d$, $g \in H^2(\Omega)^d$ e a solução u de (4.2) pertence a $H^2(\Omega)^d$, a derivada de forma em Ω_0 do funcional (que representa a flexibilidade da estrutura) $J_1 : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por (4.10) é*

$$\begin{aligned} J_1'(\Omega_0)(\tau) &= \int_{\Gamma_{0N}} \left[2 \left(\frac{\partial(g \cdot u)}{\partial n} + H g \cdot u + f \cdot u \right) \right] \tau \cdot n ds - \\ &\quad - \int_{\Gamma_{0N}} (Ae(u) \cdot e(u)) \tau \cdot n ds + \int_{\Gamma_{0D}} (Ae(u) \cdot e(u)) \tau \cdot n ds \end{aligned}$$

onde Γ_{0N} e Γ_{0D} representam as partes da fronteira de Ω_0 onde são aplicadas as condições de Neumann e de Dirichlet respectivamente, $\partial\Omega_0 = \bar{\Gamma}_{0N} \cup \bar{\Gamma}_{0D}$ e $H = \operatorname{div} n$ representa a curvatura média de $\partial\Omega_0$.

4.4. A derivada de forma no caso da pressão hidrostática.

Quando o problema modelo envolve uma condição de tipo pressão hidrostática (4.6), a variação do domínio implica uma variação nas forças superficiais aplicadas, no sentido em que essas “seguem” o domínio, permanecendo normais à fronteira de Ω . Este caso foi estudado em [4] onde foi provado o seguinte resultado.

Teorema 4.8. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 , e seja $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Supondo que a solução u de (4.6) pertence a $H^2(\Omega)^d$, a derivada de forma do funcional (que representa a flexibilidade da estrutura) $J_1 : \mathcal{U}_{ad}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$J_1(\Omega) = \int_{\Omega} f \cdot u dx + \int_{\Gamma_N} p_h n \cdot u ds$$

em Ω_0 é

$$J_1'(\Omega_0)(\tau) = \int_{\Gamma_{0N}} [2(f \cdot u + \text{div}(p_h u)) - Ae(u) \cdot e(u)] \tau \cdot n ds + \int_{\Gamma_{0D}} Ae(u) \cdot e(u) \tau \cdot n ds,$$

onde Γ_{0N} e Γ_{0D} representam as partes da fronteira de Ω_0 onde são aplicadas as condições de Neumann e de Dirichlet respectivamente, e $\partial\Omega_0 = \bar{\Gamma}_{0N} \cup \bar{\Gamma}_{0D}$.

Uma demonstração diferente da publicada em [4] é esboçada em seguida : Usando técnicas semelhantes às empregues em [22] e [28], a derivada do funcional pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} J_1'(\Omega_0)(\tau) = & \int_{\Omega_0} f_{i,j} u_i \tau_j + \int_{\Omega_0} f_i u_i \tau_{j,j} + \int_{\partial\Omega_0} p_h n_i u_i (\tau_{\alpha,\alpha} - \tau_{\alpha,\beta} n_\alpha n_\beta) \\ & + \int_{\partial\Omega_0} p_{h,j} n_i u_i \tau_j - \int_{\partial\Omega_0} p_h u_i n_\alpha (\eta_\beta \eta_i [+ \gamma_\beta \gamma_i]) \tau_{\alpha,\beta} \\ & + \int_{\Omega_0} f_i \delta \tilde{u}_i + \int_{\partial\Omega_0} p_h n_i \delta \tilde{u}_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\delta \tilde{u}$ representa a derivada de \tilde{u} relativamente a θ : $\delta \tilde{u} = \frac{d\tilde{u}}{d\theta} |_{\theta=0}(\tau)$, sendo \tilde{u} a transportada de u , solução no domínio deformado Ω , sobre Ω_0 : $\tilde{u} = u \circ (I + \theta)$. De notar que \tilde{u} depende apenas de θ e de Ω_0 . Para $d = 3$, η e γ representam dois vectores tangentes a $\partial\Omega$ que juntamente com a normal n formam uma base ortonormada e para $d = 2$, η e n formam uma base ortonormada. Na fórmula da derivada do funcional J_1 e no resto da demonstração, a parcela que se encontra entre parênteses rectos aparece apenas no caso tridimensional. O problema variacional que define $\delta \tilde{u} \in H^1(\Omega_0)$, com $\delta \tilde{u} |_{\Gamma_{0D}} = 0$, é :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} A_{ijkl} u_{k,l} \delta \tilde{u}_{i,j} = & \int_{\Omega_0} A_{ijkl} (u_{k,\alpha} u_{i,j} \tau_{\alpha,l} - u_{k,l} u_{i,j} \tau_{\alpha,\alpha} - u_{k,l} u_{i,\alpha j} \tau_\alpha) \\ & + \int_{\Omega_0} (f_i u_i \tau_j)_{,j} + \int_{\partial\Omega_0} A_{ijkl} u_{k,l} u_{i,\alpha} \tau_\alpha n_j + \int_{\Gamma_{0N}} p_{h,j} u_i n_i \tau_j \\ & + \int_{\Gamma_{0N}} p_h u_i n_i \tau_{j,j} - \int_{\Gamma_{0N}} p_h u_i (n_i n_k + \eta_i \eta_k [+ \gamma_i \gamma_k]) n_j \tau_{j,k} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por outro lado, o estado adjunto P é solução do seguinte problema adjunto :

$$\int_{\Omega_0} A_{ijkl} P_{k,l} w_{i,j} = \int_{\Omega_0} f_i w_i + \int_{\partial\Omega_0} p_h n_i w_i, \quad (4.13)$$

qualquer que seja $w \in H^1(\Omega_0)$ com $w|_{\Gamma_{0D}} = 0$. De facto o problema (4.13) coincide com a formulação variacional do problema (4.6) colocado no domínio Ω_0 e consequentemente o problema é auto-adjunto, sendo o estado adjunto P o mesmo que o estado directo u : $P = u$. Em particular, para $w = \delta\tilde{u}$ obtém-se :

$$\int_{\Omega_0} A_{ijkl} u_{k,l} \delta\tilde{u}_{i,j} = \int_{\Omega_0} f_i \delta\tilde{u}_i + \int_{\partial\Omega_0} p_h n_i \delta\tilde{u}_i. \quad (4.14)$$

Tendo em conta (4.14) e (4.13) é possível substituir na derivada (4.11) de J_1 os termos que envolvem δu obtendo :

$$\begin{aligned} J'_1(\Omega_0)(\tau) = & 2 \int_{\Gamma_{0N}} f_i u_i \tau_j n_j - \int_{\Gamma_{0N}} A_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} \tau_\alpha n_\alpha + \int_{\Gamma_{0D}} A_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} \tau_\alpha n_\alpha \\ & + 2 \int_{\Gamma_{0N}} (p_h u_i n_i \tau_{j,j} - p_h u_i n_j \tau_{j,i} + p_{h,j} u_i n_i \tau_j + p_h u_{i,j} n_i \tau_j). \end{aligned}$$

Usando a seguinte identidade integral

$$\int_{\Gamma_{0N}} (p_h u_i n_i \tau_{j,j} - p_h u_i n_j \tau_{j,i} + p_{h,j} u_i n_i \tau_j + p_h u_{i,j} n_i \tau_j) = \int_{\Gamma_{0N}} (p_h u_i)_{,i} \tau_j n_j, \quad (4.15)$$

resulta a fórmula do enunciado. A identidade (4.15) é equivalente à seguinte consequência do teorema de Stokes

$$\int_{\Gamma_{0N}} (p_h u_i \tau_j)_{,j} n_i = \int_{\Gamma_{0N}} (p_h u_i \tau_j)_{,i} n_j. \square$$

4.5. A derivada de forma no caso de um funcional distância.

Um problema importante para aplicações à optimização de estruturas flexíveis é o de obter numa estrutura um deslocamento u mais próximo de um deslocamento alvo \bar{u} . O funcional a minimizar

$$J_2(\Omega) = \left(\int_{\Omega} k(x) |u(x) - \bar{u}(x)|^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad (4.16)$$

onde $\alpha \geq 2$, $\bar{u} \in L^\alpha(\Omega)$ e $k \in L^\infty(\Omega)$, foi proposto em [2] e [27] para modelar o comportamento de mecanismos flexíveis. O seguinte resultado apresentado em [4] (ver também [3]) fornece a derivada de forma do funcional J_2 definido em (4.16).

Teorema 4.9. *Seja Ω_0 um aberto de \mathbb{R}^d , limitado e regular de classe C^1 , e seja $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Supondo que $f \in H^1(\Omega)^d$, $g \in H^2(\Omega)^d$ e a solução u de (4.2) pertence a $H^2(\Omega)^d$, a derivada de forma do funcional definido em (4.16) é*

$$J'_2(\Omega_0)(\tau) = \int_{\Gamma_{0N}} \left(\frac{C_0}{\alpha} k |u - \bar{u}|^\alpha + Ae(p) \cdot e(u) - f \cdot p - \frac{\partial(g \cdot p)}{\partial n} - Hg \cdot p \right) \tau \cdot n \\ + \int_{\Gamma_{0D}} \left(\frac{C_0}{\alpha} k |u - \bar{u}|^\alpha - Ae(p) \cdot e(u) \right) \tau \cdot n, \quad (4.17)$$

onde $H = \text{div } n$ representa a curvatura média de $\partial\Omega_0$ e p é o estado adjunto, que supõe-se pertencer a $H^2(\Omega_0)^d$, definido como solução do problema adjunto

$$\begin{cases} -\text{div}(Ae(p)) = -C_0 k |u - \bar{u}|^{\alpha-2} (u - \bar{u}) \text{ em } \Omega_0, \\ p = 0 \text{ sobre } \Gamma_{0D}, \\ Ae(p)n = 0 \text{ sobre } \Gamma_{0N}. \end{cases} \quad (4.18)$$

e C_0 é uma constante dada por

$$C_0 = \left(\int_{\Omega_0} k(x) |u(x) - \bar{u}(x)|^\alpha \right)^{1/\alpha-1}.$$

De notar que no caso do funcional distância (4.16), o problema adjunto é diferente do problema (4.2) que define o estado directo u . A solução p de (4.18), designada por estado adjunto, é distinta da solução u . O problema de minimização do funcional distância (4.16) não é auto-adjunto.

5. A otimização de topologia e o Método Adjunto.

A otimização de topologia de estruturas elásticas constitui outra aplicação do Cálculo das Variações, que, juntamente com a otimização de forma, completa o quadro geral da otimização de estruturas. Se, no caso da otimização de forma, as variações do domínio são efectuadas na mesma classe de homotopia, não sendo permitidas variações de topologia, na otimização de topologia as variações são feitas na topologia do domínio. Mais precisamente, é estudada a influência da posição duma perfuração infinitesimal virtual a nuclear no domínio, sobre o funcional que se quer minimizar/maximizar. Este problema surgiu primeiro em Engenharia, a nível macroscópico, com o trabalho de H. Eschenauer, V. Kobelev e A. Schumacher [17] e foi estudado com rigor matemático em [18], [20], [21] e [29]. No entanto, a nível microscópico, nomeadamente no caso das microestruturas periódicas, apesar de já haver trabalhos numéricos sobre a otimização de topologia de microestruturas, a validação de ponto de vista matemático dos métodos utilizados foi proposta em [32] e concretizada muito recentemente em [33]. Na subsecção 5.1 são apresentadas algumas noções de homogeneização necessárias para enunciar os

resultados sobre derivadas topológicas contidos na subsecção 5.2. As fórmulas das derivadas topológicas obtidas no Teorema 5.7 e no Corolário 5.8 constituem um ingrediente essencial dos algoritmos numéricos propostos em [8] e [9].

5.1. Microestruturas periódicas.

Supõe-se que em cada ponto dum corpo elástico dado, o material é obtido homogeneizando uma microestrutura periódica formada por uma mistura de material e vazio, ou seja uma microestrutura porosa. Então, no ponto escolhido do corpo o material homogeneizado, mais precisamente o seu tensor homogeneizado, caracteriza-se em termos de um problema celular que será detalhado de seguida.

Torna-se necessária a introdução duma noção de periodicidade generalizada (ver [33]), que contenha qualquer outra noção de periodicidade em \mathbb{R}^d .

Definição 5.1. *Considera-se \mathcal{G} um subgrupo aditivo de \mathbb{R}^d com d geradores linearmente independentes (uma látice). Uma função $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se \mathcal{G} -periódica se*

$$\varphi(x + \vec{g}) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall \vec{g} \in \mathcal{G}.$$

De observar que qualquer translação pode ser identificada com um vector de \mathbb{R}^d e a composição de translações corresponde à soma dos respectivos vectores, consequentemente qualquer noção de periodicidade pode ser descrita por um subgrupo aditivo de \mathbb{R}^d com d geradores linearmente independentes.

A noção de \mathcal{G} -periodicidade não depende do conjunto de geradores escolhidos. De facto existe uma infinidade de células de periodicidade uma vez que cada conjunto de geradores linearmente independentes define uma célula de periodicidade. Torna-se natural então restringir a família de células de periodicidade introduzindo a noção de célula de periodicidade minimal.

Definição 5.2. *Dado um subgrupo aditivo \mathcal{G} de \mathbb{R}^d com d geradores linearmente independentes, a célula de periodicidade minimal associada é um paralelepípede $\{\sum_{i=1}^d \alpha_i \vec{g}_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1\}$ onde $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_d\}$ é um conjunto de geradores de \mathcal{G} com a propriedade que minimiza o somatório $|\vec{g}_1| + \dots + |\vec{g}_d|$ entre todos os conjuntos de geradores linearmente independentes.*

De observar que a definição anterior não assegura, para um subgrupo \mathcal{G} dado, a unicidade da célula de periodicidade minimal.

Seja \mathcal{G} um subgrupo de \mathbb{R}^d e seja Y uma célula de periodicidade associada a \mathcal{G} , não necessariamente minimal.

Considera-se um conjunto compacto T com fronteira Lipschitziana tal que $T \subset \overset{\circ}{Y}$. Supõe-se que na célula de periodicidade Y , o conjunto $Y \setminus T$ corresponde a um material cujo tensor de elasticidade é C , enquanto que T corresponde a vazio, não existindo material no conjunto T .

Pela \mathcal{G} -periodicidade, o espaço \mathbb{R}^d é perfurado periodicamente com buracos obtidos como translações do conjunto T obtendo

$$\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T) = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (T + k_1 \vec{g}_1 + \dots + k_d \vec{g}_d). \quad (5.1)$$

Na Figura 5.1 é representado o conjunto $\mathbb{R}_{\text{perf}}^2(T)$ para a periodicidade hexagonal. A zona ocupada pelo material é representada em cinzento e os buracos em branco.

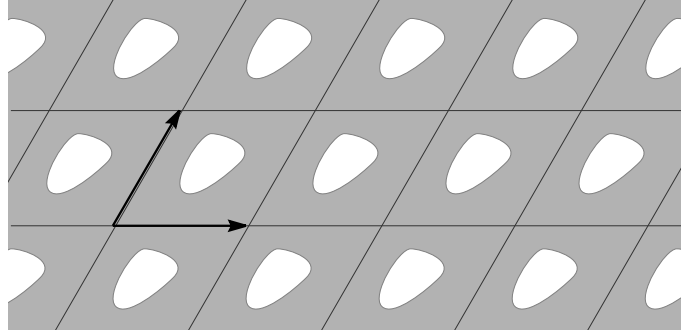


Figura 5.1. $\mathbb{R}_{\text{perf}}^2(T)$ correspondente à periodicidade hexagonal.

Dado um parâmetro pequeno $\varepsilon > 0$, efectuando uma homotetia de razão ε ao domínio $\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)$ obtém-se um novo domínio dependente de ε . Este novo domínio é preenchido pelo material com o tensor elástico igual a C . Quando o parâmetro ε tende para zero, o comportamento efectivo da microestrutura correspondente é caracterizado pelo tensor homogeneizado C^H . Conforme a teoria da homogeneização, ver o trabalho de D. Cioranescu e J. Saint Jean Paulin [16], e mais especificamente, usando a H -convergência para domínios perfurados, ver o trabalho de M. Briane, A. Damlamian and P. Donato [11], o tensor homogeneizado C^H pode ser caracterizado em termos das soluções do problema celular :

Teorema 5.3. *Dada uma extensão efectiva A , ou seja uma matriz em $\mathcal{M}^d(\mathbb{R})$, o tensor homogeneizado C^H caracteriza-se do seguinte modo*

$$C^H A = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} C e(u_A) dx \quad (5.2)$$

onde u_A é a solução do seguinte problema celular :

$$\begin{cases} -\text{div}(C e(u_A)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T) \\ C e(u_A) n = 0 \text{ sobre } \partial T \\ u_A(x) = Ax + \phi_A(x), \quad \phi_A \text{ função } \mathcal{G}\text{-periódica.} \end{cases} \quad (5.3)$$

Outra caracterização de C^H , envolvendo produtos de tipo energia, é

$$\langle C^H A, B \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle C e(u_A), e(u_B) \rangle dx. \quad (5.4)$$

onde u_A e u_B são soluções do problema celular (5.3) para duas extensões efectivas diferentes A e B .

Para a demonstração do teorema anterior ver [16] e [11].

Designa-se por $H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)$ o completamento do espaço de funções $C^\infty(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)$ que são \mathcal{G} -periódicas, na norma do espaço $H^1(Y \setminus T, \mathbb{R}^d)$.

Seja $LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$ o espaço das funções lineares mais deslocamentos periódicos, definidas em $\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)$:

$$LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) = \{u : \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T) \rightarrow \mathbb{R}^d \mid u(x) = Ax + \varphi(x), \\ A \in \mathcal{M}_d^s(\mathbb{R}), \varphi \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)\}, \quad (5.5)$$

onde $\mathcal{M}_d^s(\mathbb{R})$ designa o espaço das matrizes de dimensão $d \times d$, simétricas, com elementos reais. $LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$ é um espaço de Hilbert sendo uma soma directa entre um espaço de dimensão finita e $H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)$.

Para $A \in \mathcal{M}_d^s(\mathbb{R})$ arbitrariamente fixo, designa-se por $LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$ o conjunto das funções lineares mais deslocamentos periódicos, tendo a parte linear igual a Ax :

$$LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) = \{u : \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T) \rightarrow \mathbb{R}^d \mid u(x) = Ax + \varphi(x), \varphi \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)\}. \quad (5.6)$$

Consequentemente a última equação de (5.3) é equivalente a ter $u_A \in LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$.

De observar que $LP_0(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) = H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)$ é um subespaço fechado de $LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$ e para uma extensão arbitrariamente dada $A \in \mathcal{M}_d^s(\mathbb{R})$ o conjunto $LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$ é uma translação de $LP_0(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T))$: $LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) = A + LP_0(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) = A + H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T), \mathbb{R}^d)$. Mais ainda,

$$LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) = \bigcup_{A \in \mathcal{M}_d^s(\mathbb{R})} LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)).$$

O problema celular (5.3) pode ser escrito, usando uma formulação em extensões, do seguinte modo :

Dada uma extensão A , ou seja uma matriz simétrica em $\mathcal{M}_d^s(\mathbb{R})$, a função u_A é solução de

$$\left\{ \begin{array}{l} u_A \in LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)) \\ -\text{div}(Ce(u_A)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T) \\ Ce(u_A)n = 0 \text{ sobre } \partial T \\ \frac{1}{|Y|} \left(\int_{Y \setminus T} e(u_A) dx - \int_{\partial T} u_A \vee n ds(x) \right) = A, \end{array} \right. \quad (5.7)$$

em que o símbolo \vee designa a parte simétrica do produto tensorial.

Teorema 5.4. *O problema celular (5.3) é equivalente ao problema celular na formulação em extensões (5.7).*

O resultado anterior foi provado em [7], para onde remete-se a demonstração.

A formulação em tensões do problema celular (5.3), escreve-se do seguinte modo : Dada uma tensão σ , ou seja uma matriz simétrica em $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, a função w_σ é solução do problema

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\sigma \in LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T)), \\ -\text{div}(Ce(w_\sigma)) = 0 \text{ in } \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T) \\ Ce(w_\sigma)n = 0 \text{ on } \partial T \\ \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} Ce(w_\sigma) dx = \sigma. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

De observar que a formulação em extensões do problema celular (5.7) é equivalente à formulação em tensões (5.8), no seguinte sentido :

Teorema 5.5 *Dada uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}^d(\mathbb{R})$ a solução u_A do problema (5.7) é também solução do problema (5.8) para $\sigma = C^H A$. Reciprocamente, dada uma matriz simétrica $\sigma \in \mathcal{M}^d(\mathbb{R})$ a solução w_σ do problema (5.8) é também solução do problema (5.7) para $A = (C^H)^{-1}\sigma$, onde $(C^H)^{-1}$ é o tensor inverso do tensor homogeneizado C^H , chamado tensor de flexibilidade homogeneizado.*

Um resultado análogo para o caso de misturas periódicas de dois materiais foi provado por P.M. Suquet em [31]. A demonstração do Teorema 5.5 foi apresentada em [7].

5.2. A derivada topológica dos coeficientes elásticos homogeneizados.

Dadas as matrizes (as extensões effectivas) A e B numa base do espaço das matrizes simétricas, o funcional em baixo fornece cada um dos coeficientes homogeneizados (as entradas do tensor homogeneizado na base escolhida).

$$j(Y \setminus T) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u_A), e(u_B) \rangle dx. \quad (5.9)$$

Ao criar uma perfuração infinitesimal, esférica, de raio ρ a tender para 0, no ponto x_0 pertencente a uma zona do domínio previamente preenchido com material, o problema (5.7) transforma-se no seguinte problema perturbado :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}(Ce(u_A^\rho)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, \rho)) \\ Ce(u_A^\rho)n = 0 \text{ sobre } \partial T \\ Ce(u_A^\rho)n = 0 \text{ sobre } \partial B(x_0, \rho) \\ u_A^\rho(x) = Ax + \phi_A^\rho(x), \quad \phi_A^\rho \text{ função } \mathcal{G}\text{-periódica.} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

O domínio varia com o parâmetro ρ e na fronteira da perfuração introduzida é aplicada uma condição de Neumann homogénea; conseqüentemente a solução u^ρ do problema celular perturbado depende de ρ . Essa dependência incide sobre o funcional j , cujo desenvolvimento assintótico em ρ pretende-se obter :

$$j(Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, \rho))) = j(Y \setminus T) + f(\rho)D_T j(x_0) + o(f(\rho)), \quad (5.11)$$

onde $\lim_{\rho \rightarrow 0} f(\rho) = 0$, $f(\rho) > 0$.

O segundo termo do desenvolvimento assintótico envolve a derivada topológica $D_T j$ em x_0 . Do ponto de vista da optimização, quando se quer minimizar um coeficiente homogeneizado, é criada uma perfuração infinitesimal no ponto x_0 em que a derivada topológica tem mínimo negativo. Esta ideia está na base do algoritmo de optimização desenvolvido em [8] que usa a derivada topológica como uma das direcções alternadas. De observar que a teoria aplica-se para perfurações infinitesimais, sendo que a variação de perfurações existentes é modelada usando a derivada de forma.

Do ponto de vista da teoria do controlo, os coeficientes homogeneizados são controlados pela localização x_0 do centro duma perfuração $\bar{B}(x_0, \rho)$, de raio infinitesimal $\rho \rightarrow 0$.

O cálculo da derivada topológica enquadra-se no contexto das aplicações do Método Adjunto generalizado descrito na secção 3. No entanto, para aplicar os Lemas 3.1 e 3.2 e o Teorema 3.3, introduz-se o seguinte problema baseado num operador Dirichlet-para-Neumann (ver Anexo B), cuja solução está definida num espaço fixo ($R > 0$ sendo um número fixo) :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ce(u_\rho)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)) \\ Ce(u_\rho)n = 0 \text{ sobre } \partial T \\ Ce(u_\rho)n = \mathcal{T}_\rho u_\rho \text{ sobre } \partial B(x_0, R) \\ u_\rho(x) = Ax + \phi_A^R(x), \quad \phi_A^R \text{ função } \mathcal{G}\text{-periódica.} \end{cases}$$

O problema acima enunciado, designado por (b.1) no Anexo B, é equivalente ao problema (5.10).

Tomando os espaços $V = LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)))$ e $V_0 = H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d)$, usando as notações da secção 3, a forma bilinear a_ρ é definida por

$$a_\rho(u, v) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, R))} \langle Ce(u), e(v) \rangle dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_\rho uv ds(x). \quad (5.12)$$

onde \mathcal{T}_ρ representa o operador Dirichlet-para-Neumann definido no Anexo B. Então a_ρ verifica as estimativas do tipo (3.6) :

$$\|a_\rho - a_0 - \rho^d \delta_a\|_{\mathcal{L}^2(V)} = o(\rho^d), \quad (5.13)$$

onde $a_0 : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ pode ser definida por (ver Anexo B)

$$a_0(u, v) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u), e(v) \rangle dx, \quad (5.14)$$

e a forma bilinear δ_a é definida por

$$\delta_a(u, v) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} uv ds(x). \quad (5.15)$$

Tomando as formas lineares l_ρ e l_0 identicamente iguais a zero, uma estimativa do tipo (3.7) :

$$\|l_\rho - l_0 - f(\rho)\delta_l\|_{\mathcal{L}(V)} = o(f(\rho))$$

é verificada para δ_l igual a zero.

Considerando a variedade afim fechada $K = LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)))$ do espaço $LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)))$, a solução fraca u_A^ρ do problema perturbado (5.10) é solução do seguinte problema variacional (ver o problema (b.4) do Anexo B)

$$\begin{cases} \text{procurar } u_A^\rho \in LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \text{ tal que} \\ a_\rho(u_A^\rho, v) = 0, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (5.16)$$

e a solução fraca u_0 do problema não perturbado (5.3), reescrito na forma (5.7), é solução do problema variacional (ver o problema (b.7) do Anexo B)

$$\begin{cases} \text{procurar } u_0 \in LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \text{ tal que} \\ a_0(u_0, v) = 0, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (5.17)$$

Pode-se então aplicar o Lema 3.2 de onde resulta que é verificada a estimativa

$$\|u_A^\rho - u_0\|_{LP(\mathbb{R}^d_{\text{perf}}(T \cup \bar{B}(x_0, R)))} = O(\rho^d). \quad (5.18)$$

Para obter o desenvolvimento assintótico (5.11) aplicar-se-á o Teorema 3.3 com os funcionais J_0 e $J_\rho : LP(\mathbb{R}^d_{\text{perf}}(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \rightarrow \mathbb{R}$, definidos por

$$J_\rho(u) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, R))} \langle Ce(u), e(u) \rangle + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_\rho u u ds(x) \quad (5.19)$$

e respectivamente

$$\begin{aligned} J_0(u) &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, R))} \langle Ce(u), e(u) \rangle + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_0 u u ds(x) \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u), e(u) \rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

A Proposição 5.6 abaixo, garante para o caso em estudo uma estimativa do tipo (3.10).

Proposição 5.6 *O funcional J_ρ satisfaz :*

$$\begin{aligned} J_\rho(v) - J_0(u) &= \frac{2}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u), e(v - u) \rangle dx + \\ &+ \rho^d \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} u u ds(x) + o(\|v - u\| + \rho^d). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Demonstração : A diferença

$$J_\rho(v) - J_0(u) - \frac{2}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u), e(v - u) \rangle dx$$

pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(v - u), e(v - u) \rangle dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_\rho v v ds(x) - \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_0 v v ds(x),$$

que, usando a estimativa (b.8) do Anexo B, fica igual a

$$\frac{1}{|Y|} \rho^d \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} v v ds(x) + o(\|v - u\|^2) + o(\rho^d).$$

Tomando $v = u + (v - u)$ e usando a linearidade e a continuidade do operador $\delta_{\mathcal{T}}$, a expressão acima pode ser escrita como

$$\frac{1}{|Y|} \rho^d \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} u u ds(x) + o(\|v - u\| + \rho^d),$$

que conclui a estimativa (5.21) do enunciado. \square

Segundo o Método Adjunto generalizado apresentado na secção 3, o problema adjunto tem a forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{procurar o estado adjunto } p \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d) \text{ tal que} \\ a_0(w, p) = -DJ(u_0)w, \forall w \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d). \end{array} \right.$$

Tendo em conta que a derivada Gâteaux do funcional J_0 é

$$DJ_0(u)(w) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u), e(w) \rangle dx$$

e usando a definição de a_0 e a sua propriedade de simetria, resulta que o estado adjunto p verifica

$$a_0(w, p) = -2a_0(w, u_0) \text{ para todo } w \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d).$$

Como u_0 é solução de (5.17), resulta que $a_0(w, p) = 0$ para todo w em $H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d)$, o que implica $p = 0$, ou seja o problema é nulo-adjunto (*null-adjoint problem* em inglês).

Com as notações $j(\rho) := J_{\rho}(u_A^{\rho})$ e $j(0) := J_0(u_0)$ o seguinte Teorema fornece a derivada topológica do funcional definido em (5.9) no caso em que as extensões efectivas A e B são iguais.

Teorema 5.7. *O funcional*

$$j(\rho) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, \rho))} \langle Ce(u_A^{\rho}), e(u_A^{\rho}) \rangle dx \quad (5.22)$$

admite o seguinte desenvolvimento assintótico

$$j(\rho) = j(0) + \rho^d D_T j(x_0) + o(\rho^d), \quad (5.23)$$

onde a derivada topológica $D_T j$ em x_0 escreve-se em termos do operador \mathcal{T} como

$$D_T j(x_0) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} u_0 u_0 ds(x)$$

onde u_0 é solução de (5.17).

Demonstração : Aplica-se o Teorema 3.3 uma vez que todas as hipóteses são verificadas. O funcional j admite um desenvolvimento assintótico do tipo (3.11) em que $f(\rho) = \rho^d$, $\delta_l = 0$ e $\delta_a(u_0, p) = 0$ uma vez que o estado adjunto $p = 0$. Da Proposição

5.6 resulta conseqüentemente que $\delta_J(u_0) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} u_0 u_0 ds(x)$. \square

Supondo que o tensor elástico C da subsecção 5.1 corresponde a um material isótropo com as constantes de Lamé λ e μ , pode-se deduzir a seguinte fórmula explícita para a derivada topológica do funcional (5.9) :

Corolário 5.8. *Considera-se o funcional $j(\rho) := j(Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, \rho)))$, ou seja*

$$j(\rho) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, \rho))} \langle Ce(u_A^\rho), e(u_B^\rho) \rangle dx$$

onde u_A^ρ e u_B^ρ são as respectivas soluções do problema celular (5.16) com as extensões efectivas A e B , respectivamente. Então j admite o desenvolvimento assíntótico

$$j(\rho) = j(0) + \rho^d D_T j(x_0) + o(\rho^d),$$

onde a derivada topológica $D_T j$ em x_0 para $d = 2$, tem a forma:

$$D_T j(x_0) = -\frac{\pi}{|Y|} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left[4\mu e(u_A(x_0))e(u_B(x_0)) + \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2}{\mu} \text{tre}(u_A(x_0)) \text{tre}(u_B(x_0)) \right]. \quad (5.24)$$

Para $d = 3$ a derivada topológica tem a forma

$$D_T j(x_0) = -\frac{\pi}{|Y|} \frac{\lambda + 2\mu}{9\lambda + 14\mu} \left[40\mu e(u_A(x_0))e(u_B(x_0)) + \frac{9\lambda^2 + 20\lambda\mu - 4\mu^2}{\mu} \text{tre}(u_A(x_0)) \text{tre}(u_B(x_0)) \right]. \quad (5.25)$$

Demonstração : Pelo Lema 5 de [33] a solução u_A^ρ depende linearmente da extensão efectiva A . Consequentemente verifica-se a identidade :

$$\int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, \rho))} \langle Ce(u_A^\rho), e(u_B^\rho) \rangle dx = \frac{1}{4} (J_\rho(u_{A+B}^\rho) - J_\rho(u_{A-B}^\rho))$$

Aplicando o Teorema 5.7 com os funcionais de tipo (5.22) com as extensões efectivas $A + B$ e $A - B$, respectivamente, e tendo em conta a dependência linear das soluções das matrizes $A + B$ e $A - B$, obtém-se

$$D_T j(x_0) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} u_A u_B ds(x).$$

A expressão do operador $\delta_{\mathcal{T}}$ foi obtida em [18] (ver a fórmula (4.17) e a Tabela 3.1 para o caso das condições de Neumann na fronteira da perfuração). Para obter as fórmulas (5.24)

e (5.25) basta observar a seguinte propriedade de $\delta_{\mathcal{T}}$ para um tensor de elasticidade C correspondente a um material isótropo :

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} \varphi \psi ds(x) = -\pi \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \left[4\mu e(\varphi(x_0)) e(\psi(x_0)) + \frac{\lambda^2 + 2\lambda\mu - \mu^2}{\mu} \operatorname{tr} e(\varphi(x_0)) \operatorname{tr} e(\psi(x_0)) \right], \quad (5.26)$$

em duas dimensões ($d = 2$), e

$$\frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \delta_{\mathcal{T}} \varphi \psi ds(x) = -\pi \frac{\lambda + 2\mu}{9\lambda + 14\mu} \left[40\mu e(\varphi(x_0)) e(\psi(x_0)) + \frac{9\lambda^2 + 20\lambda\mu - 4\mu^2}{\mu} \operatorname{tr} e(\varphi(x_0)) \operatorname{tr} e(\psi(x_0)) \right], \quad (5.27)$$

em três dimensões ($d = 3$). \square

As fórmulas (5.26) e (5.27) foram implementadas com sucesso num algoritmo de optimização de forma e de topologia de microestruturas e os resultados numéricos foram publicados em [8] e [9].

É interessante observar que as expressões obtidas em (5.26) e (5.27) são formalmente as mesmas com as obtidas em [18] mas com sinal oposto. Isso deve-se ao facto de derivar a energia interna armazenada que no caso macroscópico tratado em [18] coincide com o funcional de flexibilidade e no caso microscópico abordado em [32] e tratado em [33] coincide com a rigidez (oposto da flexibilidade).

6. A optimização de valores e vectores próprios e o Método Adjunto.

Dada uma estrutura que ocupa um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, constituída por um material de tensor elástico C , que varia de ponto para ponto, pretende-se encontrar a “melhor” distribuição de material em Ω que minimize um funcional objectivo. Nesta abordagem enquadra-se o problema inverso estudado em [24] em que pretende-se minimizar um funcional de tipo distância

$$F_1(C) = \sum_{i=1}^k |\lambda_i - \bar{\lambda}_i|^2$$

entre os primeiros k valores próprios medidos da estrutura dada $\bar{\lambda}_i$, $1 \leq i \leq k$, e os valores próprios λ_i , $1 \leq i \leq k$, obtidos como soluções do problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ce(u)) = \lambda u \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \Gamma_D, \\ Ce(u)n = 0 \text{ sobre } \Gamma_N. \end{cases} \quad (6.1)$$

Γ_D e Γ_N são as partes da fronteira de Ω em que estão aplicadas as condições de Dirichlet e respectivamente as condições de Neumann. Ao minimizar o funcional F_1 com o intuito

de obter o valor mínimo igual a zero, quer-se encontrar a distribuição de material em cada ponto da estrutura que corresponde aos valores próprios medidos, ou seja correspondente à situação $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$. Este tipo de método permite identificar materiais em estruturas dadas e faz parte dos chamados métodos não destrutivos de identificação de parâmetros, que actualmente têm um papel fulcral em Engenharia.

Mais precisamente, o campo tensorial $C : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ define os tensores elásticos em cada ponto do domínio Ω como um elemento do conjunto dos tensores elásticos de quarta ordem, simétricos e coercivos com a constante de coercividade $\alpha > 0$

$$\mathcal{E} = \{A \text{ tensor de quarta ordem} \mid A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jikl}, \\ A_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij} \geq \alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \forall \varepsilon \text{ tensor de segunda ordem}\}.$$

Supõe-se ainda que o campo tensorial C depende de um parâmetro s , que pode ser escalar ou vectorial, $s \in S$ onde S é um intervalo compacto de \mathbb{R}^m . Tem-se então $C : S \times \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ como é habitual na optimização com livre escolha de material conforme descrita por M. P. Bendsøe, no terceiro capítulo de [10]. Então o problema (6.1) depende de s e conseqüentemente as suas soluções $(\lambda_i, u_i) = (\lambda_i(s), u_i(s))$ dependem do parâmetro s . As considerações que se seguem têm como hipótese o facto de os valores próprios $\lambda_i(s)$ serem simples (ver a Observação 6.1 para o caso dos valores próprios múltiplos).

Por abuso de notação, pondo em evidência a dependência do funcional F_1 do parâmetro s , esse escreve-se na forma

$$F_1(s) = \sum_{i=1}^k |\lambda_i(s) - \bar{\lambda}_i|^2 \quad (6.2)$$

e minimiza-se em s pertencente a S . Calcula-se a derivada de F_1 relativamente a s , que envolve a derivada $\frac{d\lambda_i}{ds}$ dos valores próprios $\lambda_i(s)$ relativamente a s . A derivabilidade dos valores próprios e dos vectores próprios em relação a um parâmetro foi provada num enquadramento mais abstrato por D. Chenais e B. Rousselet em [15]. Assumindo que a dependência do tensor C relativamente ao parâmetro s é suave (diferenciável), resulta que as soluções $(\lambda_i(s), u_i(s))$ são diferenciáveis em relação a s e $\frac{du_i}{ds}(s) \in V$ onde $V = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0\}$. A formulação variacional do problema (6.1) é

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{procurar } (\lambda(s), u(s)) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} C(s)e(u(s))e(v)dx = \lambda(s) \int_{\Omega} u(s) \cdot v, \quad \forall v \in V, \end{array} \right. \quad (6.3)$$

e tem um papel fundamental na obtenção de $\frac{d\lambda}{ds}$ e de $\frac{du}{ds}$. É habitual normalizar os vectores próprios u , ou seja impôr-se-á a condição $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

De observar que o problema variacional (6.3) tem uma natureza essencialmente diferente do problema P_θ do sumário e dos problemas tratados nas Secções 3, 4 e 5, sendo que o termo $\lambda(s) \int_{\Omega} u(s) \cdot v$ em (6.3) não é uma aplicação linear nem bilinear. No entanto é possível aplicar as ideias directoras do método adjunto, como será apresentado em seguida.

Ao escolher a função teste v igual a u_i em (6.3) resulta que o valor próprio λ_i pode ser escrito como :

$$\lambda_i(s) = \int_{\Omega} C(s)e(u_i(s))e(u_i(s))dx. \quad (6.4)$$

Então a derivada $\frac{d\lambda_i}{ds}$ obtém-se de (6.4) :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i}{ds}(s) &= \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i(s))e(u_i(s))dx + 2 \int_{\Omega} C(s)e\left(\frac{du_i}{ds}(s)\right)e(u_i(s))dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i(s))e(u_i(s))dx + 2\lambda(s) \int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s)u_i(s)dx \\ &= \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i(s))e(u_i(s))dx, \end{aligned}$$

onde usou-se a formulação variacional (6.3) com a função teste $v = \frac{du_i}{ds}(s)$. Foi ainda usada a condição de normalização $\|u_i(s)\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e a sua consequência

$$\int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s)u_i(s)dx = 0. \quad (6.5)$$

De notar que, no cálculo acima, o termo que envolve a derivada do vector próprio anula-se, o que torna desnecessário explicitar esse termo usando um problema adjunto. No enquadramento formal apresentado no Sumário, isso corresponde a ter na fórmula (dJ) o segundo termo identicamente nulo, ou seja o termo que era explicitado à custa do problema adjunto. Obtém-se a derivada do funcional F_1 definido em (6.2), na forma :

$$\frac{dF_1}{ds}(s) = 2 \sum_i (\lambda_i(s) - \bar{\lambda}_i) \frac{d\lambda_i}{ds}(s) = 2 \sum_i (\lambda_i(s) - \bar{\lambda}_i) \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i(s))e(u_i(s))dx. \quad (6.6)$$

que está na base do algoritmo de optimização apresentado em [24].

No entanto, é de interesse usar a informação vinda dos vectores próprios medidos da estrutura dada, ou seja usar um funcional que dependa desses, por exemplo :

$$F_2(s) = \sum_{i=1}^k |\lambda_i(s) - \bar{\lambda}_i|^2 + \sum_{i=1}^k \|u_i(s) - \bar{u}_i\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6.7)$$

A derivada do segundo termo do funcional acima pode ser escrita, usando (6.5), na forma

$$\sum_{i=1}^k \frac{d}{ds} \int_{\Omega} (u_i(s) - \bar{u}_i)^2 dx = 2 \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s)(u_i(s) - \bar{u}_i) dx = -2 \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s)\bar{u}_i(s) dx. \quad (6.8)$$

São introduzidos k problemas adjuntos com o objectivo de explicitar cada um dos termos da forma $\int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s) \bar{u}_i(s) dx$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{procurar } p_i \in V, \text{ com } \int_{\Omega} p_i \cdot u_i(s) dx = 0 \text{ tal que} \\ -\lambda_i(s) \int_{\Omega} p_i \cdot w dx + \int_{\Omega} C(s) e(p_i) e(w) dx = \\ -2 \int_{\Omega} w \cdot \bar{u}_i dx + 2 \int_{\Omega} u_i \cdot \bar{u}_i dx \int_{\Omega} w \cdot u_i dx, \\ \forall w \in V, \end{array} \right. \quad (6.9)$$

onde p_i , $1 \leq i \leq k$, são os k estados adjuntos. Pela alternativa de Fredholm, o problema (6.9) tem solução única uma vez que a condição de compatibilidade é satisfeita para $1 \leq i \leq k$,

$$-2 \int_{\Omega} u_i \cdot \bar{u}_i dx + 2 \int_{\Omega} u_i \cdot \bar{u}_i dx \int_{\Omega} u_i \cdot u_i dx = 0.$$

O problema (6.9) reduz-se a um problema do tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{procurar } p_i \in W_i \text{ tal que} \\ a_i(p_i, w) = l_i(w), \forall w \in W_i, \end{array} \right. \quad (6.10)$$

onde $W_i = \langle u_i \rangle^{\perp} \subset V$ é o complemento ortogonal do subespaço próprio associado a u_i , para $1 \leq i \leq k$ (relativamente ao produto de $L^2(\Omega)$), a_i é uma forma bilinear sobre $W_i \times W_i$ e l_i é uma forma linear sobre W_i . De observar que $\lambda_i(s)$ e $u_i(s)$ são fixos, para o valor corrente do parâmetro s . O espaço W_i pode ser escrito como soma directa dos subespaços $W_i = \langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1} \rangle \oplus \langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1} \rangle^{\perp}$. O problema (6.10) é equivalente a dois subproblemas do mesmo tipo, um no espaço $\langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1} \rangle$ e outro no espaço $\langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1} \rangle^{\perp}$. De recordar que a_i não é coerciva sobre o espaço V , uma vez que $\lambda_i(s)$ é valor próprio do problema (6.3); também não é coerciva sobre W_i . No entanto a forma bilinear a_i é coerciva sobre o espaço $\langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1} \rangle^{\perp}$ e $-a_i$ é coerciva sobre o espaço $\langle u_1, u_2, \dots, u_{i-1} \rangle$, o que garante a existência e a unicidade das soluções dos subproblemas acima referidos nos respectivos subespaços.

Observação 6.1. No caso em que os valores próprios são múltiplos, escolhem-se vectores próprios no respectivo espaço próprio e constrói-se o funcional F_2 . Os problemas adjuntos são construídos de modo semelhante relativamente aos vectores próprios assim escolhidos.

Por outro lado $\frac{du_i}{ds}(s)$ que pertence ao complemento ortogonal do subespaço próprio associado a u_i , $\frac{du_i}{ds}(s) \in \langle u_i \rangle^{\perp}$, é solução do seguinte problema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{procurar } \frac{du_i}{ds}(s) \in \langle u_i \rangle^{\perp} \text{ tal que} \\ -\lambda_i(s) \int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s) \cdot v dx + \int_{\Omega} C(s) e\left(\frac{du_i}{ds}(s)\right) e(v) dx = \\ \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s) e(u_i) e(u_i) dx \int_{\Omega} u_i \cdot v dx - \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s) e(u_i) e(v), \\ \forall v \in V. \end{array} \right. \quad (6.11)$$

Pela alternativa de Fredholm, o problema (6.11) acima tem solução única se a condição de compatibilidade

$$\int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i)e(u_i)dx \int_{\Omega} u_i \cdot u_i dx - \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i)e(u_i) = 0$$

for satisfeita, o que se verifica imediatamente.

Substituindo $w = \frac{du_i}{ds}(s)$ no problema adjunto (6.9) e tendo em conta o problema (6.11) que define $\frac{du_i}{ds}(s)$, a expressão da derivada em (6.8) escreve-se :

$$\begin{aligned} & -2 \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \frac{du_i}{ds}(s)\bar{u}_i(s)dx = \\ & = \sum_{i=1}^k -\lambda_i(s) \int_{\Omega} p_i \cdot \frac{du_i}{ds}(s)dx + \int_{\Omega} C(s)e(p_i)e\left(\frac{du_i}{ds}(s)\right)dx \quad (6.12) \\ & = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i)e(u_i)dx \int_{\Omega} u_i \cdot p_i dx - \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i)e(p_i). \end{aligned}$$

Consequentemente, usando a derivada do funcional F_1 (6.6), a fórmula (6.12) e o facto de p_i pertencer a $\langle u_i \rangle^{\perp}$, obtém-se a derivada do funcional F_2 na forma:

$$\frac{dF_2}{ds}(s) = 2 \sum_i (\lambda_i(s) - \bar{\lambda}_i) \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i(s))e(u_i(s))dx - \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \frac{dC}{ds}(s)e(u_i)e(p_i). \quad (6.13)$$

As derivadas (6.6) e (6.13) foram usadas com sucesso no algoritmo de identificação das propriedades do material em cada ponto da estrutura a partir dos valores próprios e dos vectores próprios medidos, apresentado em [24]. Deste modo foi possível determinar os parâmetros materiais na zona danificada duma barragem de betão.

Anexo A

Os seguintes resultados de L. S. Pontryagin [26] garantem a continuidade e a derivabilidade da solução de uma equação diferencial ordinária, relativamente aos parâmetros.

Seja a equação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \mu) \quad (a)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}^l$ representa um parâmetro vectorial e a função $f : D \subset \mathbb{R}^{1+n+l} \mapsto \mathbb{R}^n$.

O teorema A.1 a seguir garante a continuidade da solução da equação (a) relativamente aos parâmetros e o teorema A.2 garante a derivabilidade da solução relativamente aos parâmetros.

Teorema A.1. Seja $y = \varphi(t, \mu)$ a solução da equação (a) com as condições iniciais (t_0, y_0) , onde $f : D \subset \mathbb{R}^{1+n+l} \mapsto \mathbb{R}^n$ é contínua. Seja (t_0, y_0, μ_0) um ponto em D e seja $y = \varphi(t, \mu)$ a solução de (a) que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0, \mu) = y_0$. Se a solução $y = \varphi(t, \mu_0)$ for definida no intervalo $[t_1, t_2]$, então existe $\rho > 0$ tal que se $\|\mu - \mu_0\| < \rho$ a solução $y = \varphi(t, \mu)$ é contínua em $\{(t, \mu) \mid t \in [t_1, t_2], \|\mu - \mu_0\| < \rho\}$.

Teorema A.2. Nas condições do Teorema A.1 supõe-se ainda que existem e são contínuas em D as derivadas parciais $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(t, x, \mu)$, para $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$. Seja (t_0, y_0, μ_0) um ponto em D e seja $y = \varphi(t, \mu)$ a solução de (a) que satisfaz a condição inicial $\varphi(t_0, \mu) = y_0$. Se a solução $y = \varphi(t, \mu_0)$ for definida no intervalo $[t_1, t_2]$, então existe $\rho' > 0$ tal que se $\|\mu - \mu_0\| < \rho'$ as derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu^k}(t, \mu)$, para $1 \leq k \leq l$, são contínuas em $\{(t, \mu) \mid t \in [t_1, t_2], \|\mu - \mu_0\| < \rho'\}$ e deriváveis em t e as derivadas mixtas $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \mu^k}(t, \mu)$, para $1 \leq k \leq l$, também são contínuas em $\{(t, \mu) \mid t \in [t_1, t_2], \|\mu - \mu_0\| < \rho'\}$ e simétricas. Mais ainda as derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial \mu^k}(t, \mu)$ satisfazem em $[t_1, t_2]$ o sistema de equações:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}(t, \mu) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(t, \varphi(t, \mu), \mu) \frac{\partial \varphi^j}{\partial \mu^k}(t, \mu) + \frac{\partial f^i}{\partial \mu^k}(t, \varphi(t, \mu), \mu)$$

com a condição inicial $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}(t_0, \mu) = 0$, para $1 \leq k \leq l$ e $1 \leq i \leq n$.

Anexo B

Introduz-se o operador Dirichlet-para-Neumann juntamente com algumas propriedades necessárias para aplicar o Método Adjunto generalizado no cálculo da derivada topológica.

Seja $R > 0$ tal que $\bar{B}(x_0, R) \cap T = \emptyset$. Em vez de resolver o problema (5.10) (cuja solução está definida num domínio que depende de ρ) resolve-se o seguinte problema que envolve um operador Dirichlet-para-Neumann \mathcal{T}_ρ , e cuja solução está definida num espaço fixo :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ce(u_\rho)) = 0 \text{ em } \mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)) \\ Ce(u_\rho)n = 0 \text{ sobre } \partial T \\ Ce(u_\rho)n = \mathcal{T}_\rho u_\rho \text{ sobre } \partial B(x_0, R) \\ u_\rho(x) = Ax + \phi_A^R(x), \quad \phi_A^R \text{ função } \mathcal{G}\text{-periódica.} \end{cases} \quad (b.1)$$

O operador Dirichlet-para-Neumann \mathcal{T}_ρ define-se como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\rho : H^{1/2}(\partial B(x_0, R))^d &\mapsto H^{-1/2}(\partial B(x_0, R))^d, \\ \varphi &\mapsto \mathcal{T}_\rho \varphi = Ce(w_\rho^\varphi)n. \end{aligned} \quad (b.2)$$

Em (b.1) e (b.2) n designa a normal exterior à bola $B(x_0, R)$ e w_ρ^φ é solução do seguinte problema :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ce(w_\rho^\varphi)) = 0 \text{ em } B(x_0, R) \setminus \bar{B}(x_0, \rho), \\ w_\rho^\varphi = \varphi \text{ sobre } \partial B(x_0, R) \\ Ce(w_\rho^\varphi)n = 0 \text{ sobre } \partial B(x_0, \rho). \end{cases} \quad (b.3)$$

Observa-se que se $\rho = 0$ não há introdução de perfurações em x_0 e w_0^φ é solução do problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ce(w_0^\varphi)) = 0 \text{ em } B(x_0, R), \\ w_0^\varphi = \varphi \text{ sobre } \partial B(x_0, R). \end{cases}$$

O operador \mathcal{T}_ρ coincide com o operador Dirichlet-para-Neumann introduzido em [18]. A sua definição depende apenas do operador diferencial considerado, $-\operatorname{div}(Ce(\cdot))$ o que justifica a sua utilização no contexto periódico.

Usando resultados clássicos na teoria das Equações com Derivadas Parciais, ver por exemplo [1], a solução u_A^ρ do problema (5.10) restringida a $\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))$ é solução do problema (b.1).

A formulação variacional do problema (b.1) é a seguinte

$$\begin{cases} \text{procurar } u_\rho \in LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \text{ tal que} \\ a_\rho(u_\rho, v) = 0, \forall v \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d), \end{cases} \quad (b.4)$$

onde a forma bilinear $a_\rho : LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \times LP(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$a_\rho(u, v) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, R))} \langle Ce(u), e(v) \rangle dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_\rho uv ds(x). \quad (b.5)$$

O integral de fronteira acima pode ser escrito como

$$\int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_\rho uv ds(x) = \int_{B(x_0, R) \setminus \bar{B}(x_0, \rho)} \langle Ce(w_\rho^u), e(w_\rho^v) \rangle dx, \quad (b.6)$$

onde w_ρ^u é a solução de (b.3) com $\varphi = u$ sobre $\partial B(x_0, R)$ e w_ρ^v é a solução de (b.3) com $\varphi = v$ sobre $\partial B(x_0, R)$.

Para $\rho = 0$ a forma bilinear $a_0 : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ está definida por

$$a_0(u, v) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus (T \cup \bar{B}(x_0, R))} \langle Ce(u), e(v) \rangle dx + \frac{1}{|Y|} \int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_0 uv ds(x).$$

Devido à seguinte propriedade

$$\int_{\partial B(x_0, R)} \mathcal{T}_0 uv ds(x) = \int_{B(x_0, R)} \langle Ce(w_0^u), e(w_0^v) \rangle dx,$$

a forma bilinear a_0 reescreve-se

$$a_0(u, v) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y \setminus T} \langle Ce(u), e(v) \rangle dx.$$

Para $\rho = 0$ designa-se por u_0 a solução de (b.1) e conseqüentemente u_0 é solução do problema variacional (b.4) que neste caso toma a forma :

$$\begin{cases} \text{procurar } u_0 \in LP_A(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R))) \text{ tal que} \\ a_0(u_0, v) = 0, \forall v \in H_{\#}^1(\mathbb{R}_{\text{perf}}^d(T \cup \bar{B}(x_0, R)), \mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (b.7)$$

Proposição B.1 (ver a Proposição 4.5 de [18]) *O desenvolvimento assintótico do operador T_ρ é*

$$\|T_\rho - \mathcal{T}_0 - \rho^d \delta_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial B(x_0, R))^d, H^{-1/2}(\partial B(x_0, R))^d)} = o(\rho^d) \quad (b.8)$$

onde o operador $\delta_{\mathcal{T}}$ pertence a $\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial B(x_0, R))^d, H^{-1/2}(\partial B(x_0, R))^d)$.

Bibliografia

- [1] V. I. Agoshkov (1988), Poincaré - Steklov's operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces, in *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, R. Glowinsky, G. H. Golub, G. A. Meurant and J. Périaux eds., SIAM, Philadelphia, 73–112.
- [2] G. Allaire, F. Jouve (2002), Optimal design of micro-mechanisms by the homogenization method, *Eur. J. Finite Elements* **11**, 405–416.
- [3] G. Allaire, F. Jouve, **A.-M. Toader** (2002), A level-set method for shape optimization, *Comptes Rendus Mathématique*, **334**, 12, 1125–1130.
- [4] G. Allaire, F. Jouve, **A.-M. Toader** (2004), Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, *Journal of Computational Physics*, **194**, 1, 363–393.
- [5] G. Allaire, F. Jouve, **A.-M. Toader** (2004), Structural optimization by the level-set method, Conference Information: Conference on Free Boundary Problems, June 15, 2002 Trento, Italy, *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, International Series of Numerical Mathematics, **147**, 1–15.
- [6] G. Allaire, F. Jouve, F. de Gournay, **A.-M. Toader** (2005), Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, *Control and Cybernetics*, **34**, 1, 59–80.
- [7] C. Barbarosie, **A.-M. Toader** (2010), Shape and Topology Optimization for periodic problems, Part I: The shape and the topological derivative, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **40** (1-6), 381–391.
- [8] C. Barbarosie, **A.-M. Toader** (2010), Shape and Topology Optimization for periodic problems, Part II: Optimization algorithm and numerical examples, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **40** (1-6), 393–408.
- [9] C. Barbarosie, **A.-M. Toader** (2009), Optimization of bodies with locally periodic microstructure, em publicação em *Mechanics of Advanced Materials and Structures e Preprint CMAF Pre-2009-021*.
- [10] M. P. Bendsøe (1995), *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*, Springer.
- [11] M. Briane, A. Damlamian, P. Donato (1998), H-convergence for perforated domains. *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XIII (Paris, 1994/1996)*, 62–100, Pitman Res. Notes Math. Ser.,391, Longman, Harlow.
- [12] J. Céa (1986), Conception optimale ou identification de formes. Calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût. *RAIRO, Modélisation Math. Anal.* **20**, 371–402.
- [13] A. Chambolle (2003), A density result in two-dimensional linearized elasticity and applications, *Arch. Rational Mech. Anal.* **167**, 211–233.
- [14] D. Chenaïs (1975), On the existence of a solution in a domain identification problem, *J. Math. Anal. Appl.* **52**, 189–289.
- [15] D. Chenaïs, B. Rousselet (1990), Continuité et Différentiabilité d'Éléments Propres : Application à l'Optimisation de Structures, *Appl. Math. Optim.* **22**, 27–59.

- [16] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin (1979), Homogenization in Open Sets with Holes. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Vol. 71, **2**, 590–607.
- [17] H. Eschenauer, V. Kobelev, A. Schumacher (1994), Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization* **8**, 42–51.
- [18] S. Garreau, P. Guillaume, M. Masmoudi. (2001), The topological asymptotic for PDE systems: the elasticity case. *SIAM Journal on Control and Optimization* **39**, 1756–1778.
- [19] J. Hadamard (1908), Mémoire sur un problème d’analyse relatif a l’équilibre des plaques élastiques encastrees, Mémoire des savants étrangers, Ouvres de J. Hadamard, CNRS, Paris, 1968.
- [20] M. Masmoudi (1987), Outils pour la conception optimale de formes. Thèse d’ état. *Université de Nice*. Nice. France.
- [21] M. Masmoudi (2002), The topological asymptotic. Glowinski, Roland (ed.) et al., Computational methods for control applications. Dedicated to Professor Jacques-Louis Lions on the occasion of his 70th birthday. Proceedings of the France-Japan workshop on computational methods for control applications, Tokyo, Japan, October 7–9, 1998. Tokyo: Gakktocho. *GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications* **16**, 53–72.
- [22] F. Murat, J. Simon (1976), Etudes de problèmes d’optimal design. *Lecture Notes in Computer Science*, 41, Springer Verlag, Berlin, 54–62.
- [23] F. Murat, L. Tartar (1985, 1997), Calculus of variations and homogenization (translation from french Calcul des variations et homogénéisation 1985). *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **31**, Birkhuser Boston, Boston, 139–173
- [24] S. Oliveira, **A.-M. Toader**, P. Vieira (2011), Damage identification in a concrete dam by fitting measured modal parameters, submetido, Preprint CMAF Pre-2011-003 <http://cmaf.ptmat.fc.ul.pt/preprints.html>
- [25] O. Pironneau (1984), *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer-Verlag, New York.
- [26] L. S. Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko (1962), *The mathematical theory of optimal processes* (translated from russian) L. W. Neustadt Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc. New York-London.
- [27] O. Sigmund (1997), On the design of compliant mechanisms using topology optimization, *Mech. Struct. Mach.* **25**, 493-524.
- [28] J. Simon (1980), Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.* No.2, 649–687.
- [29] J. Sokółowski, A. Zochowski (2001), Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems. *Mech. Structures Mach.* **29**, 331–349.
- [30] J. Sokółowski, J. P. Zolesio (1992), Introduction to shape optimization : shape sensitivity analysis, *Springer Series in Computational Mathematics*, **10**, Springer, Berlin.
- [31] P.M. Suquet (1982), Une méthode duale en homogénéisation: application aux milieux élastiques, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, Numéro spécial, 79–98.

- [32] **A.-M. Toader**, C. Barbarosie (2009), Why does the Topological Derivative have the Opposite Sign for Periodic Problems ? Communication at the Special Session “Topology Optimization and Material Design using Homogenization and Weak Convergence Methods” of the 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June, Lisbon 2009, Book of Abstracts page 147.
- [33] **A.-M. Toader** (2010), The topological derivative for homogenized elastic coefficients of periodic microstructures, em publicação em *SIAM Journal on Control and Optimization* e Preprint CMAF Pre-2010-001.
- [34] E. Zeidler (1995), *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*, Applied Mathematical Sciences 109, Springer Verlag.