

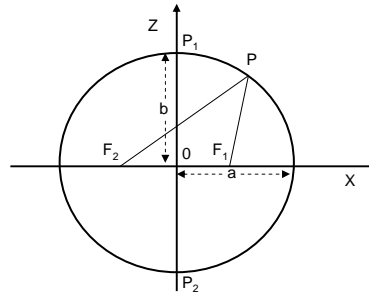
PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

1. Elipse geradora

- Na Geodesia é o elipsóide de revolução (2ª aproximação) que serve como referência no posicionamento geodésico;
- Em muitos dos cálculos da Geodesia Geométrica é usada a geometria do Elipsóide de Revolução;
- O Elipsóide é formado pela rotação de uma elipse em torno do seu semi-eixo menor;

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$



PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

1. Elipse geradora

- Parâmetros fundamentais da elipse:

- Achatamento polar (f)

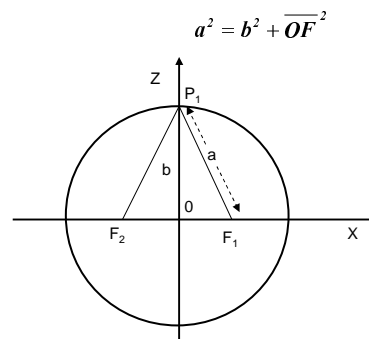
$$f = \frac{a-b}{a}$$

- 1ª excentricidade (e)

$$e = \frac{\overline{OF}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

- 2ª excentricidade (e')

$$e' = \frac{\overline{OF}}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$



PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

1. Elipse geradora

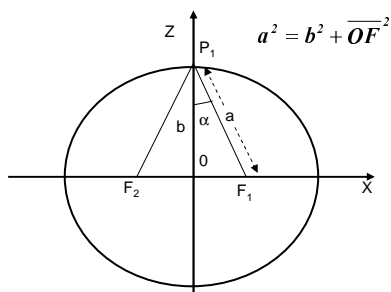
- Outros parâmetros da elipse:

- Excentricidade angular (α)

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = 1 - f$$

$$\sin \alpha = \frac{\overline{OF}}{a} = e$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OF}}{b} = e'$$



- Excentricidade linear (E)

$$E = ae = \overline{OF}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2. Elipsóide GRS80

- O Elipsóide actualmente recomendado pela IAG é o Geodetic Reference System 1980 (Moritz, 1980) :

Semi-eixo maior: $a = 6378137$ m

Semi-eixo menor: $b = 6356752.3141$ m

Excentricidade linear: $E = 521854.0097$ m

1ª excentricidade: $e^2 = 0.00669438002290$

2ª excentricidade: $e'^2 = 0.00673949677548$

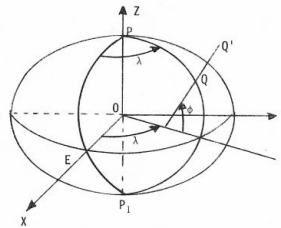
Achatamento: $f = 0.00335281068118$

Inverso do achatam.: $1/f = 298.257222101$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.1 Coordenadas Geodésicas

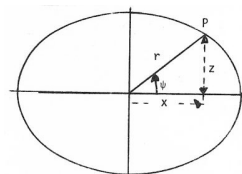
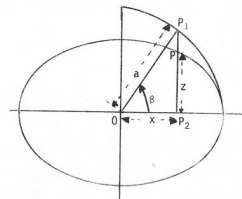
- φ - Latitude Geodésica de um ponto Q situado à superfície do elipsóide é definida pelo ângulo entre a normal ao elipsóide no ponto Q e o plano do equador;
- λ - Longitude Geodésica de um ponto à superfície do elipsóide é definida pelo rectilíneo do diedro formado pelos planos do meridianos geodésicos do ponto e o de referência, convencionada positiva para Este;
- h – Alitude geodésica é a distância (QQ') medida ao longo da normal, entre a superfície do elipsóide e a superfície topográfica;



PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.2 Outras Latitudes

- β - Latitude Reduzida (ou paramétrica) de um ponto P situado à superfície do elipsóide é definida pelo ângulo ao centro de uma esfera tangente ao elipsóide no equador (circunscrita), de raio $r = a$;
- ψ - Latitude Geocêntrica de um ponto à superfície do elipsóide P é o ângulo ao centro do elipsóide, medido entre o plano do equador e a direcção radial do ponto;



PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3 Raios de curvatura

- O raio de curvatura de uma secção normal ao elipsóide dependerá do azimute dessa secção normal;
- Em cada ponto existem duas secções normais mutuamente perpendiculares entre si, cujas curvaturas tomam o valor máximo e mínimo;
- As secções normais que verificam o valor máximo e mínimo de curvatura dizem-se secções normais principais;
- Sobre o elipsóide de revolução as secções normais principais são:
 - **A secção do meridiano** (ρ ou M), gerada pelo plano normal de um ponto que passa pelos dois pólos;
 - **A secção do primeiro vertical** (N), gerada pelo plano normal de um ponto, perpendicular ao plano do meridiano também designada por grande normal.

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

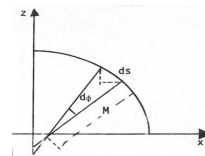
2.3.1 Raio de curvatura do Meridiano

- Para uma qualquer curva sobre o plano, $z = F(x)$, o raio de curvatura num dado ponto da curva é dado por:

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{d^2z/dx^2}$$

- Da aplicação desta fórmula ao arco de meridiano chega-se à expressão do raio de curvatura do meridiano:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}$$

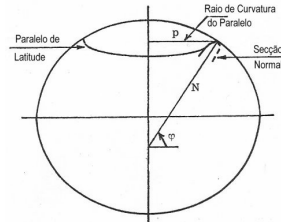


PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.2 Raio de curvatura do 1º Vertical

- Da Figura extrai-se a relação entre o raio de curvatura do 1º Vertical e o raio do paralelo:

$$P = N \sin(90^\circ - \phi) = N \cos \phi$$



- Substituindo na expressão do raio do paralelo, igual a x, vem

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.3 Raio de curvatura de secção α

- A *Fórmula de Euler* dá-nos a curvatura de uma qualquer secção normal em função das curvaturas das secções principais:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \theta}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \theta}{\rho_2}$$

onde ρ é o raio de curvatura arbitrário, ρ_1 e ρ_2 , os raios de curvatura principais, respectivamente, máximo e mínimo, e θ é o ângulo medido a partir da secção principal de maior raio de curvatura;

- Como N é normalmente maior que M, $\alpha = 90^\circ - \theta$, e $\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{N} + \frac{\cos^2 \alpha}{M}$
- Resultado o raio de curvatura da secção normal de azimute α

$$R_\alpha = \frac{MN}{N \cos^2 \alpha + M \sin^2 \alpha}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.4 Outros raios de curvatura

- Raio médio Gaussiano é definido pelo valor médio integral de R ao longo da variação de azimute de 0° a 360°:

$$R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_\alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{MN}{N \cos^2 \alpha + M \sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \phi}$$

- Raio da esfera com a média dos 3 raios do elipsóide:

$$R = \frac{a+a+b}{3} = a \left[\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{3} \right]$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.4 Outros raios de curvatura

- Raio da esfera com a mesma área do elipsóide:

$$4\pi R_A^2 = \Sigma$$

$$R_A = a \left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360} e^4 - \frac{67}{3024} e^6 - \dots \right)$$

- Raio da esfera com o mesmo volume do elipsóide:

$$V_E = \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad V_S = \frac{4}{3} \pi R_V^3$$

$$R_V = \sqrt[3]{a^2 b} = a(1-e^2)^{1/6}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.4 Outros raios de curvatura

- Para os parâmetros do sistema geodésico GRS80, obtêm-se os seguintes valores dos diferentes raios:

$$R_m = 6371008.7714 \text{ m}$$

$$R_A = 6371007.1810 \text{ m}$$

$$R_V = 6371000.7900 \text{ m}$$

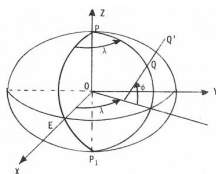
- Dada a pequena diferença entre os diferentes valores, usa-se simplesmente o valor:

$$R = 6371 \text{ km}$$

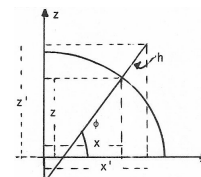
PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

3. Coordenadas Rectangulares espaciais

- Ao elipsóide está associado um sistema de eixos tri-ortogonais, em relação ao qual se estabelece o terno de coordenadas (X,Y,Z);
- Dada uma posição acima do elipsóide, definida em coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h), é possível definir a relação entre os dois tipos de coordenadas;



$$\begin{cases} X = x' \cos \lambda \\ Y = x' \sin \lambda \\ Z = z' \end{cases}$$



$$\begin{cases} X = (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y = (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z = (N(1 - e^2) + h) \sin \phi \end{cases}$$