

# Campo Gravítico da Terra

## 3. Potencial Gravítico

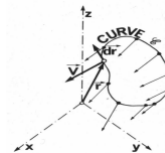
- O campo gravítico é um campo vectorial (grandeza com 3 componentes)
- Será mais fácil trabalhar com uma grandeza escalar, que assume apenas um valor em cada ponto
- Será possível representar um campo vectorial por uma função escalar?
- É possível, pelo menos para alguns campos vectoriais, onde se inclui o campo gravítico da Terra

# Campo Gravítico da Terra

## 3.1 Campo irrotacional

- Seja  $C$  uma curva espacial, fechada e arbitrária, no interior de um campo vectorial  $\mathbf{v}$
- Se se verifica a equação

$$\oint_C \mathbf{n}(\vec{r}) d\vec{r} = 0$$



ao longo da curva  $C$ , onde  $d\vec{r}$  tem o ponto de aplicação sobre a curva, então o campo  $\mathbf{v}$  diz-se **irrotacional**

- Se um campo é irrotacional então existe uma função escalar  $K$  tal que

$$\nabla K(\vec{r}) = \text{grad } K(r) = \left( \frac{\partial K}{\partial x}, \frac{\partial K}{\partial y}, \frac{\partial K}{\partial z} \right) = \mathbf{n}(\vec{r})$$

# Campo Gravítico da Terra

## 3.1 Campo irrotacional

- Esta função escalar  $K$  é chamada a energia potencial da grandeza vectorial  $\mathbf{v}$
- Se a equação anterior se verifica, então o campo vectorial  $\mathbf{v}$  é também *conservativo*, ou seja, é independente do tempo
- Do ponto de vista físico,  $K$  representa a quantidade de trabalho para vencer a força  $\mathbf{v}$
- As suas unidades físicas são  $\text{g.m}^2.\text{s}^{-2}$

# Campo Gravítico da Terra

## 3.2 Potencial gravítico

- Como o campo de acelerações gravíticas ( $g$ ) difere do campo de forças apenas por um factor de escala, a massa  $m$ , o campo gravítico terrestre pode ser expresso por:

$$\vec{F} = m\vec{g} = \nabla K = m\nabla V$$

- Ou seja, existe um campo escalar  $V$ , tal que

$$\vec{g} = \nabla V$$

- Este campo escalar é conhecido por *Potencial Gravítico*, cuja unidade é  $\text{m}^2.\text{s}^{-2}$
- $K$  e  $V$  apresentam a mesma geometria

# Campo Gravítico da Terra

## 3.2 Potencial gravítico

- A aceleração gravítica é expressa pela soma de um integral triplo, a aceleração gravitacional, e um segundo termo, a aceleração centrífuga
- Como o gradiente é um operador diferencial linear, o potencial gravítico será também a soma, respectivamente, do potencial gravitacional com o potencial centrífugo

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \nabla V + \nabla F = \nabla W$$

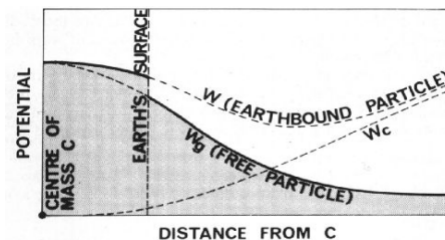
$$W(P) = W(x, y, z) = G \iiint_V \frac{1}{l} r(Q) dv + \frac{1}{2} w^2 (x^2 + y^2) = V(P) + F(P)$$

# Campo Gravítico da Terra

## 3.2 Potencial gravítico

$$W(P) = V(P) + F(P) = G \iiint_V \frac{1}{l} r(Q) dv + \frac{1}{2} w^2 p^2$$

- Analisando a fórmula, verifica-se que  $V$  diminui com a distância, enquanto que  $\Phi$  aumenta com o quadrado da distância ao eixo de rotação



# Campo Gravítico da Terra

## 3.2 Potencial gravítico

- Tomando a expressão da aceleração da gravidade na sua aproximação esférica

$$\vec{g} = \frac{GM_T}{R^2} - w^2 R \cos^2 j \vec{u}_r$$

E assumindo que  $\vec{g} = \nabla W$

Obtém-se uma expressão idêntica para a aproximação esférica do potencial gravítico

$$W = \frac{GM_T}{R} - \frac{w^2 R^2 \cos^2 j}{2}$$

Uma expressão um pouco mais rigorosa é obtida considerando o factor de achatamento  $J_2$

$$W = \frac{GM_T}{R} - \frac{w^2 R^2 \cos^2 j}{2} + \frac{GM_T J_2}{2R} (3 \sin^2 f - 1)$$

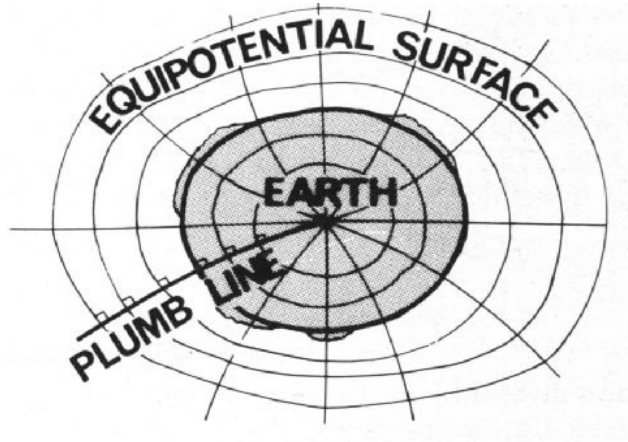
# Campo Gravítico da Terra

## 3.2 Potencial gravítico

- O potencial combinado (gravítico) actua somente sobre massas que rodam (fixas) com a Terra
- Quando um corpo pára de rodar com a Terra (lançado ao espaço) o potencial centrífugo  $\Phi$  deixa de actuar, passando apenas a ser afectado pelo potencial gravitacional  $V$
- O potencial gravítico  $W$  deve representar a estrutura do campo, para um  $W$  suavizado temos um campo suavizado, para um  $W$  irregular temos um campo irregular
  
- Como pode ser usado para descrever as irregularidades de campo?
- Através das superfícies equipotenciais ( $W=\text{const.}$ ) ou através das suas linhas de força ( $\text{grad } W$ )

# Campo Gravítico da Terra

## 3.3 Superfícies equipotenciais



# Campo Gravítico da Terra

## 3.3 Superfícies equipotenciais

- ***Propriedades importantes*** das superfícies equipotenciais:
  - a) São superfícies fechadas, nunca se intersectam umas com as outras;
  - b) Cada superfície encontra-se totalmente contida na sua adjacente exterior;
  - c) São contínuas, sem hiatos, sem quaisquer pontos de descontinuidade
  - d) Os seus raios de curvatura variam suavemente;
  - e) São superfícies convexas (curvatura virada para o exterior);
- Um deslocamento sobre as superfícies equipotenciais não envolve qualquer trabalho (em sentido estático), pois sobre as superfícies não há variação de potencial  $W$ ;

# Campo Gravítico da Terra

## 3.3 Superfícies equipotenciais

- As **linhas de força** são perpendiculares às superfícies equipotenciais, elas resultam do gradiente vertical do potencial;
- A direcção das linhas de força define a **direcção da vertical**, logo o plano tangente à superfície equipotencial define o plano horizontal de um ponto;
- Pela razão anterior, as superfícies equipotenciais são também designadas por **superfícies de nível** (de igual altitude);
- As linhas de força não são rectas, são linhas curvas e torças que convergem para o CM da Terra (concavidade voltada para o equador);
- O  **fio de prumo** dá-nos a tangente às linhas de força e por isso define, pontualmente, a direcção da **vertical de lugar**.

# Campo Gravítico da Terra

## 3.3 Superfícies equipotenciais

- Qual é a relação entre as superfícies equipotenciais e a magnitude da gravidade?



- O espaçamento entre as superfícies está relacionado com a magnitude da gravidade: curvas + próximas > gravidade, curvas + afastadas < gravidade;
- $g$  é a diferença dos valores de potencial a dividir pelo seu afastamento

$$g = |\nabla W| \doteq -\frac{\partial W}{\partial h}$$

# Campo Gravítico da Terra

## 3.3 Superfícies equipotenciais

- Ao longo de um superfícies equipotencial será a gravidade constante?
- Em geral, gravidade numa superfície equipotencial varia;
- Numa qualquer superfície equipotencial,  $W=const.$ , a gravidade nos pólos é sempre superior à gravidade no equador;
- Nos pólos as superfícies equipotenciais estão mais próximas (maior gravidade) e no equador essas superfícies estão mais afastadas (menor gravidade);

$$g_P - g_E \doteq 5.186Gal = 5.3 \times 10^{-3} g_E$$

- Uma convergência de 0.53%

$$H_E = \frac{g_P}{g_E} H_P = 1.0053 H_P$$

# Campo Gravítico da Terra

## 3.3 Superfícies equipotenciais

- *Porque é que a Terra tem forma achatada?*
- A superfície de um qualquer líquido homogéneo, em equilíbrio, tende a coincidir com uma superfície equipotencial;
- Como a gravidade é superior nos pólos devido à aceleração de potencial centrífugo, as superfícies são achatadas;
- Logo qualquer superfície volátil, em equilíbrio, tende a adquirir a forma das superfícies equipotenciais;
- A forma da Terra, devido à sua viscosidade, foi ao longo do tempo adquirindo esta forma achatada

∴ **Conclusão:** A forma achatada da Terra deve-se ao seu movimento de rotação em torno do seu eixo