

Campo Gravítico da Terra

3.4 Potencial Gravítico

- Com já vimos anteriormente o vector do campo gravítico, g , pode ser representado, de forma única e completa, por um campo escalar, o potencial gravítico W ;
- Conhecido o potencial W na zona de interesse, pode-se determinar todos os outros parâmetros que caracterizam o comportamento do campo gravítico;
- Diz-se que a função de potencial gravítico contém em si toda a estrutura do campo gravítico;
- Por essa razão, o estudo do campo gravítico passa pelo conhecimento e determinação dessa função, W ;

Campo Gravítico da Terra

3.4 Potencial Gravítico

- Tomemos a expressão do potencial

$$W(x, y, z) = G \int_V \frac{\rho(Q)}{r} dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2)$$

- Como o vector gravidade é o gradiente de W , então

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = -G \int_V r \frac{x-Q_x}{r^3} dn + \omega^2 x$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -G \int_V r \frac{y-Q_y}{r^3} dn + \omega^2 y$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = -G \int_V r \frac{z-Q_z}{r^3} dn$$

de onde se pode tirar a magnitude e a direcção do vector g

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}$$

$$(F, L) = \left(\arctg \frac{g_y}{g_x}, \arctg \frac{g_z}{g} \right)$$

Campo Gravítico da Terra

3.4 Potencial Gravítico

- Estas relações anteriores permitem fazer cálculos e determinações nos dois sentidos:
 - A) Sabendo a função de potencial gravítico W , determinar, à superfície da Terra ou no seu exterior, os valores da gravidade (g), e a direcção da vertical de lugar (Φ, Λ);
 - B) Medindo, à superfície da Terra, os valores da gravidade (por gravimetria), e as coordenadas astronómicas (por observação astro-geodésica) determinar a função de potencial gravítico da Terra, W .
- Contudo esse tipo de abordagem é o mais difícil e complicado, por se tratar da formulação não-linear do problema.

Campo Gravítico da Terra

3.5 Gradiente do potencial

- Que direcção tomará o gradiente do potencial?

- Por diferenciação do potencial obtém-se
$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

podendo-se escrever na forma
$$dW = \vec{\nabla}W \cdot d\vec{X} = \vec{g} \cdot d\vec{X}$$

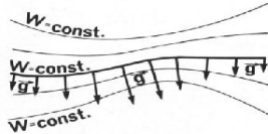
- Se $d\vec{X}$ for um vector ao longo de uma superfície equipotencial, onde $dW = 0$ obtemos:

$$\vec{g} \cdot d\vec{X} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \vec{g} \perp d\vec{X}$$

Campo Gravítico da Terra

3.5 Gradiente do potencial

- O vector gravidade num ponto é normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto;



- Como as superfícies de nível são “horizontais” em todo o lado, elas possuem um forte significado físico, e possuem a importância geodésica da linha de prumo, são normais a essa linha (vertical do lugar);

Campo Gravítico da Terra

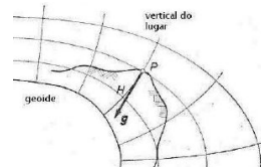
3.5 Gradiente do potencial

- Medindo-se o valor da gravidade num ponto, juntamente com as coordenadas astronómicas locais, podemos definir as componentes do vector gravidade, normal à superfície equipotencial,

$$g_x = -g \cos F \cos L$$

$$g_y = -g \cos F \sin L$$

$$g_z = -g \sin F$$



- Onde, como já vimos, $g_x = \frac{\partial W}{\partial x}$; $g_y = \frac{\partial W}{\partial y}$; $g_z = \frac{\partial W}{\partial z}$

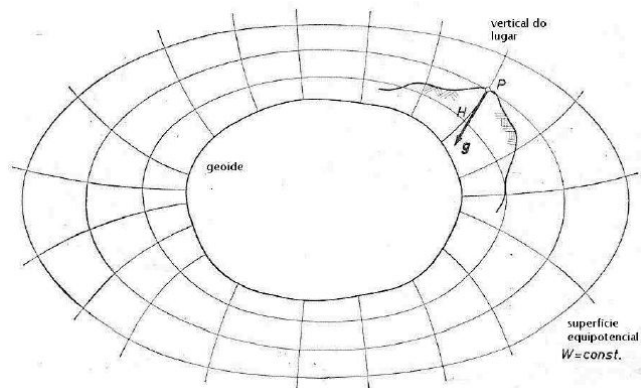
Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- De entre as superfícies equipotenciais, $W=const.$, existe uma superfície em particular, **o geóide**, que corresponde ao valor de potencial $W_0=62636856.0 \text{ m}^2/\text{s}^2$;
- Esta superfície é, por ventura, o assunto mais importante pelo qual a Geodesia se interessa pelo estudo do campo gravítico;
- É uma superfície muito próxima da superfície média do mar, a diferença atinge pouco mais de 1 metro, e deve-se às diferentes densidades da massa oceânica;
- Foi *Listing* (1872) que pela 1ª vez introduziu o termo “geoid” para definir esta superfície particular, que era designada desde Gauss por “superfície geométrica da Terra”.

Campo Gravítico da Terra

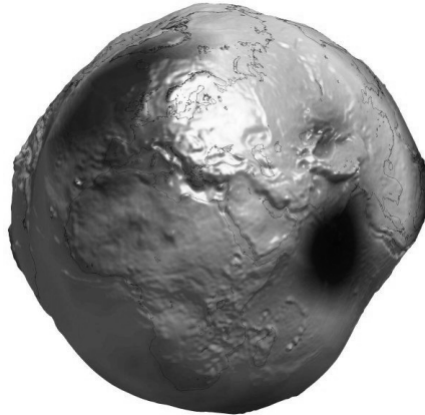
3.6 Geóide



Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- Zona mais elevada
Oceano Atlântico
70 m acima do elipsóide
- Zona mais baixa
Oceano Índico
100 m abaixo do elipsóide



Campo Gravítico da Terra

3.6 Geóide

- As superfícies equipotenciais $W(x,y,z)=\text{const.}$ são representadas por equações de alguma complexidade matemática;
- Porque W analítico no exterior da Terra, as superfícies completamente exteriores são superfícies analíticas, embora não possuam uma expressão analítica simples;
- O mesmo já não acontece com as superfícies que se situam, totalmente ou em parte, no interior da Terra, como é o caso do geóide, apesar de serem contínuas e suaves;
- A razão é a desconhecida função densidade das massas $\rho(r)$;
- A determinação do geóide é então, um problema de difícil solução, pelo facto de ser uma superfície *não-analítica*.

Campo Gravítico da Terra

3.7 Altitude ortométrica

- Define-se altitude ortométrica, como a altitude H de um ponto acima do nível médio do mar, medida ao longo da linha de prumo encurvada, a partir do geóide;
- Se tomarmos o vector $d\vec{X}$ definido ao longo da linha de prumo, na direcção de crescimento das altitudes, então:

$$|d\vec{X}| = dH$$

- Assumindo o seu sentido oposto ao sentido de g , que aponta para o centro da Terra, temos que:

$$\vec{g} \cdot d\vec{X} = g \cdot dH \cos(\vec{g}, d\vec{X}) = g \cdot dH \cos 180^\circ = -g \cdot dH$$

Campo Gravítico da Terra

3.7 Altitude ortométrica

- Como $\vec{g} \cdot d\vec{X} = dW$ logo $dW = -g \cdot dH$
- Esta simples equação mostra a relação que existe entre a altitude ortométrica e o potencial W , e será essencial na teoria de determinação das altitudes;
- Mostra claramente a inter-relação inseparável que caracteriza a geodesia – **a inter-relação entre o conceito geométrico (H) e o conceito físico (W)**
- Resulta também uma definição de g : *a razão entre a diferença de potencial de duas superfícies de nível infinitamente próximas e a distância entre elas*

$$g = - \frac{dW}{dH}$$

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- A equação fundamental do potencial gravítico W , é uma equação diferencial às derivadas parciais;
- A solução desta equação é a função que caracteriza o potencial gravítico no exterior da Terra e sobre a sua fronteira, e com a qual se determinam as superfícies equipotenciais, nomeadamente, a superfície do géóide;
- A determinação da solução passa pela resolução de um problema matemático, designado *Problema de Fronteira* do campo gravítico terrestre.

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- Usando o Teorema de Gauss, que nos diz: “*o fluxo de um campo Newtoniano através de uma superfície fechada só depende das massas interiores (M_i) a essa superfície, e o seu valor é $-4\pi GM_i$ ($-4\pi G \rho u_A$)*”, chegamos à equação

$$\operatorname{div} \vec{g} = -4\pi G \rho$$

como

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V$$

Obtém-se a chamada equação de Poisson

$$\Delta V = -4\pi G \rho$$

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- Sendo $\rho(r)=0$ no exterior da Terra, a equação de Poisson resulta na chamada equação de Laplace

$$DV = 0$$

- Isto significa que o potencial gravitacional é uma função harmónica no exterior da Terra;
- Sabendo que $W = V + F$ temos $DW = DV + DF$

onde finalmente: $DW = 2w^2$, *no exterior da Terra*

$$DW = -4pGr + 2w^2$$
 , *no interior da Terra*

Campo Gravítico da Terra

3.8 Equação fundamental do Potencial

- O problema da determinação do campo gravítico da terra pode ser dividido em dois: a determinação do campo gravitacional e a determinação do campo centrífugo

$$DW = DV + DF$$

- Como o potencial centrífugo é uma função simples de posição em que a velocidade angular é constante e conhecida com grande precisão, o problema resume-se à determinação do potencial gravitacional no espaço exterior, ou seja, à resolução da *Equação de Laplace*:

$$DV = 0$$