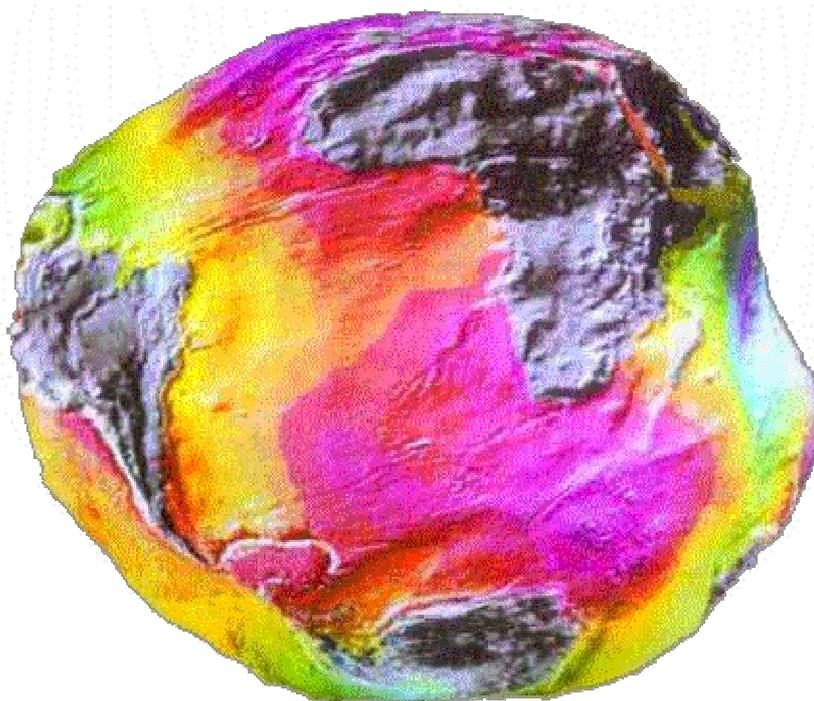




Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Departamento de Matemática

Geodesia Física

João Catalão



Lisboa, 2000

Índice

Capítulo 1 - Fundamentos do Campo gravítico

1.1 O campo gravítico.....	3
1.2 Potencial gravítico.....	8
1.3 Equações fundamentais do potencial gravítico.....	10
1.4 Superfícies equipotenciais.....	17
1.5 Curvatura das superfícies de nível e das linhas de prumo	22
1.6 Equação de Laplace.....	26
1.7 Resolução da equação de Laplace em coordenadas esféricas.....	28
1.8 Resolução da equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas.....	35
1.9 Coeficientes do potencial gravitacional.....	38

Capítulo 2 - Tratamento Local do Campo Gravítico

2.1 Potencial do elipsóide de nível.....	43
2.2 Gravidade normal	47
2.3 Gradiente vertical da gravidade.....	50
2.4 O potencial perturbador	54
2.5 Ondulação do geóide e anomalias da gravidade.....	56
2.6 Formulação de Stokes	62
2.7 Sistema altimétrico	68

Capítulo 3 - Reduções gravimétricas

3.1 Introdução	71
3.2 Aspectos teóricos da Correção de terreno	73
3.3 Redução de Bouguer.....	75
3.4 Isostasia.....	77
3.4.1 Sistema Pratt-Hayford	79
3.4.2 Sistema Airy Heiskanen	80
3.5 Modelo Residual do Terreno	81
3.6 O efeito Indirecto	84

Bibliografia.....	86
-------------------	----

“Every arrow that flies feels the
attraction of the earth”
(Henry Wadsworth Longfellow)

Capítulo 1

Fundamentos do campo gravítico

Neste capítulo será apresentada a teoria do campo gravítico terrestre com ênfase sobre os aspectos e fórmulas desta teoria que contribuem para a compreensão do estudo da forma da Terra no contexto da abordagem de Stokes. A teoria do campo gravítico é tratada extensivamente em publicações sobre teoria do potencial ou geodesia física, de entre as quais constituem uma referência obrigatória os 3 primeiros capítulos de *Physical Geodesy* (Heiskanen and Moritz, 1967), designado abreviadamente por PG, *Geodesy the Concepts* (Vanicek and Krakiwsky, 1982) designado por VK e *Gravimetry* (Torge, 1990).

1.1 O campo gravítico

Foi Isaac Newton o primeiro a formular matematicamente, na sua famosa lei da gravitação universal, o facto de que quaisquer dois corpos físicos se atraem mutuamente. Esta lei postula que um corpo de massa m com força F , cuja magnitude é proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância ℓ :

$$F = G \frac{Mm}{\ell^2} \quad (1.1)$$

Esta força é conhecida como força gravitacional e é também chamada atracção gravitacional ou atracção de Newton. A constante de proporcionalidade é denominada

constante gravitacional de Newton. O seu valor, determinado por várias experiências, é de $6.672 \times 10^{-11} \text{ Kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ou equivalentemente $6.6272 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$ com precisão de $0.001 \times 10^{-8} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$.

A atracção gravitacional entre dois corpos é suposta propagar-se ao longo de uma linha recta com uma velocidade comparável à velocidade da luz. No nosso caso (para o nosso objectivo), é adequado considerar a velocidade como infinita e assim pensar na gravitação como tendo um efeito instantâneo para qualquer distância que consideremos. Este é o princípio adoptado na mecânica clássica.

Tomando dois corpos físicos A e B com massas m e M , e considerando as suas dimensões negligenciáveis comparando com a sua distância, podemos escrever a seguinte equação vectorial (fig. 1.1) para a força gravitacional que B exerce em A.

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{\ell^3} (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (1.2)$$

em que ℓ é a distância entre os dois corpos. Para se obter força que A exerce em B, basta trocar os subscritos A e B.

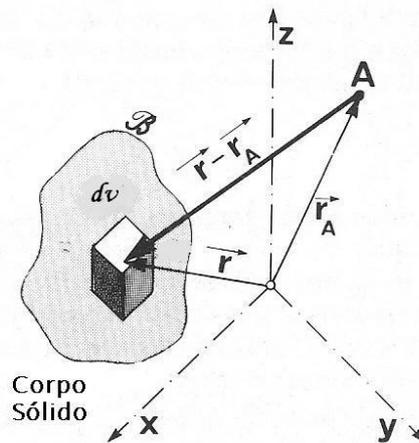
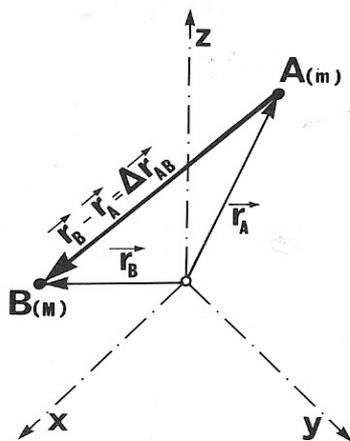


Figura 1.1 – Atracção gravitacional entre duas partículas.

Figura 1.2 – Atracção gravitacional de um corpo.

Que acontecerá se as dimensões de um dos dois corpos, digamos B, não puder ser vista como negligível? Este será o caso de um pequeno corpo A e a Terra - B. Então o corpo B pode ser tomado como sendo composto por um número de pequenos elementos de volume dv , e a atracção de cada um destes elementos em A pode ser vista em separado (fig. 1.2). Se a variável independente é designada por r , a densidade da massa no interior do corpo por $\rho(r)$, e dv é escolhido suficientemente pequeno, de modo a que ρ em dv pode ser considerado constante, então obtemos a seguinte relação:

$$\mathbf{F}(A) = F(x, y, z) = G \frac{\rho(\mathbf{r})M}{\ell^3} dv \quad (1.3)$$

em que ℓ é a distância entre A e o elemento infinitesimal dv de coordenadas \mathbf{r} e densidade $\rho(\mathbf{r})$.

Foi determinado por experimentação que as forças gravitacionais são aditivas. Isto significa que a soma das forças produzidas pelos elementos dv é igual à força exercida por todo o corpo B. Considerando os volumes dv infinitamente pequenos, a equação final é obtida por integração sobre o corpo B.

$$\mathbf{F}(A) = F(x, y, z) = G m \iiint_T \frac{1}{\ell^3} \rho(\mathbf{r}) dv \quad (1.4)$$

Esta equação pode ser usada no estudo da força gravitacional da Terra sobre corpos cuja dimensão possa ser considerada negligível com respeito à Terra. Contudo, para se estudar a gravitação é necessário conhecer a distribuição da densidade $\rho(\mathbf{r})$ no interior da Terra. Mas tal distribuição, é conhecida só aproximadamente. A figura 1.3 apresenta um dos modelos de distribuição da densidade existentes, obtido por observações sísmicas, assumem uma distribuição esférica perfeita, de modo que a densidade é função unicamente da distância ao centro de massa, ou profundidade.

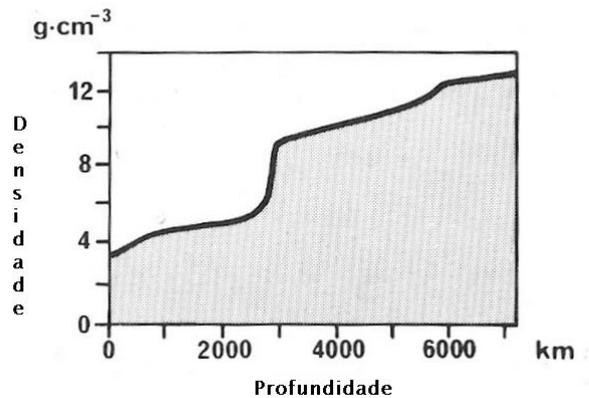


Figura 1.3 – Variação da densidade com a profundidade.

Verificamos assim que a força gravitacional produzida por este modelo da Terra é radial, ou seja, a força gerada por este corpo tem sempre a direção e o sentido do centro de massa, e a sua magnitude depende unicamente da distância ao centro de massa. Isto significa que a gravitação deste corpo, sobre e dentro da sua superfície, é equivalente à gravitação de uma partícula localizada no centro de massa, com a massa M , igual à massa de todo o corpo, dada por:

$$M = \iiint_T \rho(\mathbf{r}) dv \quad (1.5)$$

Mas é já do nosso conhecimento que a gravitação de tal partícula é dada pela equação 1.2. Se o raio médio da Terra R é tomado como igual a 6371 Km, e GM igual a $3.986005 \times 10^{20} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-2}$ (Moritz, 1984), então a equação 1.2 dá-nos o valor médio da atracção gravitacional na superfície da Terra:

$$|F| = F \approx 982.022 \text{ (cm s}^{-2}\text{)} \cdot m \quad (1.6)$$

em que m é a massa da partícula atraída. Uma vez que a distribuição real da densidade no interior da Terra não é unicamente radial mas também lateralmente irregular e a Terra não é esférica, o campo da força gravitacional não é também perfeitamente radial. Então o valor da gravitação dado por 1.6 é apenas um valor médio global.

Na ausência de um melhor conhecimento da actual distribuição da densidade, a equação 1.4 é de aplicação limitada para a geodesia, exceptuando o seu valor teórico na definição da dependência da gravitação em relação à densidade. A equação 1.4 mostra também que a força gravitacional varia com a variação temporal da densidade. Este é o caso da Terra real, mas estas variações são difíceis de detectar. Em todos os trabalhos geodésicos a prática tem ditado o desprezo destas variações, com excepção dos efeitos de maré.

Para a representação global do campo gravítico é definido um sistema de referência rectangular geocêntrico, fixo à Terra. A sua origem coincide com o centro de massa da Terra (o geocentro), o eixo Z coincide com o eixo médio de rotação da Terra, que é definido por uma posição média do polo no intervalo de tempo 1900.0-1906.0 (“Conventional International Origin”, CIO), o eixo X é normal ao eixo Z e está contido no plano meridiano médio de Greenwich (meridiano zero do Bureau International de l’Heure), o eixo Y é normal ao plano XZ e com uma direcção tal que o sistema XYZ seja directo. O plano XY define deste modo o plano equatorial médio.

A utilização de um eixo médio de rotação, e de um plano meridiano de Greenwich médio, tem como objectivo a obtenção de definições com invariância temporal, sabendo que existem pequenas variações com alguma periodicidade no eixo instantâneo de rotação bem como deformações da Terra.

O facto de a Terra ser animada de um movimento de rotação complica um pouco o estudo que pretendemos fazer, mesmo se assumirmos a Terra como um corpo rígido. De facto, a rotação da Terra dá lugar a uma força f , embora só aparente na sua natureza, é observada em todos os objectos sobre a superfície da Terra (que partilham o movimento de rotação da Terra). É chamada força centrífuga. A sua direcção é sempre perpendicular ao eixo instantâneo de rotação e pode ser explicada como uma manifestação do movimento circular.

A sua natureza é só aparente porque logo que o objecto deixa de rodar com Terra - o corpo deixa a superfície da Terra - a força centrífuga deixa de actuar. A magnitude f da força centrífuga que actua numa partícula é igual a:

$$\mathbf{f} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega} = \omega^2 p \mathbf{m} \quad (1.7)$$

em que p é a distância perpendicular da partícula ao eixo de rotação, ω é a velocidade angular de rotação da Terra e m é a massa da partícula (fig. 1.4). Se a velocidade angular dada pela equação 1.7 for tomada como $\omega = 72.9211 \times 10^{-6}$ rad/s e $p = 6378137$ m, então o valor da força centrífuga no equador é $f = 3.392 \text{ cm s}^{-2}$ o que é cerca de 0.35% da força gravitacional. Nos pólos a força centrífuga é nula.

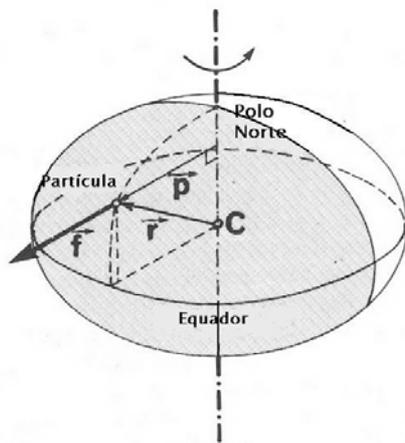


Figura 1.4 – A força centrífuga.

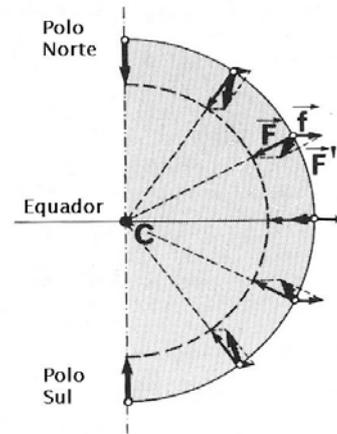


Figura 1.5 – Força gravítica.

A força centrífuga é sujeita a variações temporais quer na sua magnitude quer na sua direcção. Variações no módulo da velocidade angular induzem variações na magnitude da força; variações na direcção do eixo de rotação induzem variações na direcção da força. Estas variações (nutation e precessão) são muito pequenas e podem ser seguramente desprezadas no nosso estudo.

A soma da força gravitacional e da força centrífuga é chamada **força da gravidade**. O campo desta força é apresentado esquematicamente na fig. 1.5. É facilmente entendido que a força da gravidade é maior nos pólos que no equador. De facto, a diferença seria de cerca de 0,35%, se a Terra fosse esférica. Uma vez que a Terra é achatada, a diferença é ainda mais pronunciada, sendo igual a 0.45% como veremos mais à frente. É usual trabalhar com acelerações em vez de forças. Para vermos claramente o que isto significa, escrevemos a equação vectorial para a força gravítica, actuando numa partícula A.

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{A}) = \mathbf{F}_g(x, y, z) = \left\{ G \iiint_T \frac{1}{\ell^3} \rho(\mathbf{r}) \, dv + \vec{p}_A \omega \right\} \cdot \mathbf{m} \quad (1.8)$$

Verificamos que a força gravítica $F_g(A)$ é expressa como um produto do termo entre parêntesis e a massa m da partícula A . Com base na segunda lei de Newton, é sabido que a força é o produto da aceleração pela massa. O termo entre parêntesis será então o vector aceleração. Este vector é designado por g e é chamado **vector gravidade**, ou seja:

$$F_g(A) = g(A) \cdot m \quad (1.9)$$

No estudo das propriedades geométricas do campo da força gravítica F_g , é suficiente concentrarmo-nos no estudo da aceleração g . A massa m da partícula em estudo pode ser vista como escala do campo F_g .

O campo gravítico, sendo um campo vectorial, possui a magnitude (modulo do vector), uma direcção e um sentido. A magnitude é um escalar e a sua unidade é o Gal. Um Gal é igual a 1 cm por segundo quadrado ($\text{cm} \cdot \text{s}^{-2}$); o valor médio da magnitude da gravidade na superfície da Terra da ordem de 980.3 Gal. A direcção e sentido da gravidade é mais difícil de estudar, é necessário introduzir alguns conceitos adicionais antes dos aspectos direccionais serem apresentados.

1.2 Potencial Gravítico

O campo gravítico sendo um campo vectorial significa que existe um vector, i.e., um triplete de números, atribuído a cada ponto do espaço. É bastante mais expedito trabalhar com um campo escalar, em que existe um só valor numérico para cada localização no espaço. Coloca-se então a questão: será possível representar completamente um campo vectorial por um campo escalar? A resposta é afirmativa, pelo menos para alguns campos de vectores, incluindo o campo gravítico terrestre. Tomemos uma curva especial C , fechada, arbitrária no campo de vectores \mathbf{v} . Se a seguinte equação

$$\oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1.10)$$

em que $d\mathbf{r}$ é dirigido ao longo da curva C , se verificar para qualquer curva C (fig. 1.6) então o campo vectorial \mathbf{v} é dito irrotacional. Se um campo é irrotacional, então existe um campo escalar tal que:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r}) = \mathbf{grad} V(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (1.11)$$

Se considerarmos também o tempo, então para se verificar a equação anterior, o campo \mathbf{v} deverá também ser conservativo, ou seja, independente do tempo. O campo escalar V é chamado energia potencial de \mathbf{v} , e \mathbf{v} é o gradiente de V . Do ponto de vista físico, V é a quantidade de trabalho necessária para vencer a força \mathbf{v} . A sua unidade física é $\text{g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

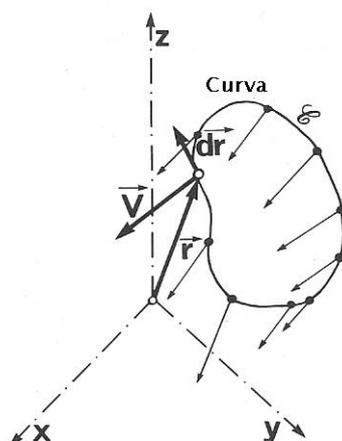


Figura 1.6 – Integração de um campo de vectores ao longo de uma curva.

Foi demonstrado que o campo da força gravítico é irrotacional, e como tal, tem uma energia potencial correspondente. Também, como a aceleração gravítica \mathbf{g} difere do campo da força gravítica unicamente de um termo de escala m , é fácil verificar, a partir da equação 1.11, que o campo gravítico pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_g = m \cdot \mathbf{g} = \nabla V = m \nabla W \quad (1.12)$$

Por outras palavras, existe também um campo escalar W tal que:

$$\mathbf{g} = \nabla W \quad (1.13)$$

Este campo escalar é conhecido como **potencial gravítico**.

O potencial gravítico W é algumas vezes tratado como o trabalho negativo necessário para vencer a força da gravidade $m\mathbf{g}$ que actua na unidade de massa m . Mas as suas unidades físicas são $\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$ não reflectindo a presença de quaisquer massas. É preferível, no entanto, encarar W como o “trabalho” no sentido cinemático, ou seja, não envolvendo massas. Dado que o potencial difere da energia potencial V unicamente do escalar m - a massa da partícula atraída - as propriedades geométricas dos campos escalares V e W são os mesmos.

Voltando à equação 1.8, verificamos que a aceleração gravítica por ser escrita como a soma de um integral triplo, representando a aceleração gravitacional, e outro termo representando a aceleração centrífuga. Sendo o operador diferencial (gradiente) um operador linear, o **potencial gravítico** W pode também ser escrito como a soma de **potencial gravitacional** V e o **potencial centrífugo** Φ .

Não havendo, nesta fase, perigo de confusão entre a força e a aceleração, consideramos a aceleração gravitacional como designada por \mathbf{F} e aceleração centrífuga por \mathbf{f} então:

$$\mathbf{g} = \mathbf{F} + \mathbf{f} = \nabla V + \nabla \Phi = \nabla(V + \Phi) = \nabla W \quad (1.14)$$

Resolvendo esta equação, atendendo à equação 1.8 obtemos as seguintes formulas para os potenciais:

$$V(\mathbf{P}) = V(x, y, z) = GM \iiint_{\mathcal{T}} \frac{1}{\ell} \rho(\mathbf{Q}) dv \quad (1.15a)$$

$$\Phi(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} \omega^2 p^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (1.15b)$$

$$W(\mathbf{P}) = W(x, y, z) = GM \iiint_{\mathcal{T}} \frac{1}{\ell} \rho(\mathbf{Q}) dv + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (1.16)$$

Analisando estas formulas, verificamos que enquanto V diminui com o aumento da distância à Terra, sendo inversamente proporcional à distância, Φ aumenta proporcionalmente com o quadrado da distância ao eixo de rotação. Por exemplo, tomando uma direcção, no plano equatorial, a partir do centro de massa, verifica-se que o potencial varia com a distância, devendo-se ter presente que o potencial combinado W actua sobre o corpo ou partícula sobre a superfície da Terra. Logo que o corpo deixe de rodar com a Terra o potencial Φ deixa de ser relevante e é unicamente mantido o potencial gravitacional V .

As derivadas parciais de segunda ordem de V formam uma matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

chamado tensor gradiente gravitacional (de segunda ordem). Similarmente, as derivadas de segunda ordem de W formam o tensor gradiente gravítico.

1.3 Equações fundamentais do potencial gravítico

Como já foi demonstrado na secção anterior o vector do campo gravítico \mathbf{g} pode ser representado de forma única e completa por um campo escalar, o potencial gravítico W . Conhecido o potencial W na região de interesse, pode-se determinar todos os outros parâmetros que caracterizam o comportamento do campo gravítico. Por esta razão deveremo-nos concentrar nas formas de obter W , para se excluir outros parâmetros; a

técnica de conversão W - ou mais precisamente, a conversão da sua parte irregular, o potencial perturbador - noutros parâmetros será tratada no segundo capítulo.

Para deduzir a equação fundamental às derivadas parciais que descreve o comportamento do potencial gravítico W , vamos primeiramente analisar o comportamento local do vector gravitacional \mathbf{F} . O seu comportamento num ponto é completamente descrito pelo seu rotacional e divergente, dado na vizinhança desse ponto. Uma vez que o campo do potencial gravitacional é irrotacional e numa primeira aproximação, conservativo, significa que podemos escrever imediatamente¹:

$$\mathbf{rot} \nabla V(\mathbf{r}_A) = \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}_A) = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

para qualquer ponto A , em que \mathbf{r}_A é o vector posição num sistema de coordenadas arbitrário.

Por outro lado, o divergente de $\mathbf{F}(\mathbf{r}_A)$ pode ser escrito como o caso limite da fórmula de Gauss:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}_A) = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}_A) = \lim_{\vartheta_A \rightarrow 0} \frac{\oiint \mathbf{F}(\mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{n} \, dS}{\vartheta_A} \quad (1.19)$$

em que ϑ_A é o volume limitado pela superfície S , e \mathbf{n} é o vector unitário normal exterior a S , fig. 1.7. Se o integral do fluxo gravitacional $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ é positivo, o ponto A é chamado fonte, se o integral é negativo então o ponto A é chamado sumidouro (*sink* na literatura inglesa). No caso do integral ser zero, \mathbf{F} não é divergente em A . A questão importante está em determinar se o fluxo gravitacional é positivo, negativo ou nulo.

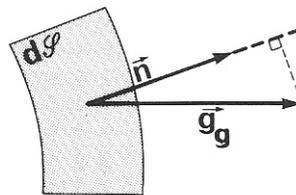


Figura 1.7 – Fluxo Gravitacional

¹ O rotacional de um campo de vectores é dado por $\mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix}$

Para encontramos a resposta, designemos M a massa do volume v_A completamente limitado pela superfície S como $M = v_A \rho$ com o reconhecimento que para um volume suficientemente pequeno v_A a densidade da massa ρ é uniforme (constante) em v_A .

Se, por simplicidade, a origem do sistema de coordenadas for o centro de v_A , verificamos que v_A cria uma aceleração \mathbf{F} dada por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_A) = \frac{GM}{|\mathbf{r}_A|^3} \mathbf{r}_A \quad (1.20)$$

Pode ainda ser demonstrado que quando é considerado o limite em 1.19 a forma da superfície S é imaterial uma vez que esta envolve completamente o volume v_A . Assim, e de novo por simplicidade, é claro que a aceleração \mathbf{F} criada pelo volume esférico v_A é normal a S em todos os pontos, e $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ é igual a \mathbf{F} . O fluxo gravitacional pode então ser escrito como:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{F} dS = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|^2} dS = -\frac{G\rho(\mathbf{r}_A)\vartheta_A}{|\mathbf{r}|^2} dS \quad (1.21)$$

em que r é o raio da esfera S .

Sabendo que a superfície de uma esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$, não é difícil ver que o integral do fluxo gravitacional dá:

$$\oiint \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi G \rho(\mathbf{r}_A)\vartheta_A \quad (1.22)$$

Este resultado é designado por **Teorema de Gauss** e diz-nos que o fluxo do campo Newtoniano através de uma superfície fechada só depende das massas interiores a essa superfície M_i e o seu valor é $-4\pi GM_i$ ($-4\pi G\rho v_A$). Dividindo a equação anterior por v_A e tomando o limite obtemos:

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}_A) = -4\pi G \rho(\mathbf{r}_A) \quad (1.23)$$

Esta equação, que também pode ser obtida directamente da definição de divergente tomando o caso limite $r \rightarrow 0$, é obviamente válida em qualquer sistema de coordenadas. A sua interpretação é a seguinte: dado que $\rho(\mathbf{r}_A)$ é uma quantidade não negativa, A pode ser um sumidouro da aceleração gravitacional $\mathbf{F}(\mathbf{r}_A)$ ou o divergente de \mathbf{F} é zero em A (se $\rho(\mathbf{r}_A)=0$).

Estudado o comportamento local da aceleração gravitacional, viramo-nos para a aceleração centrífuga $\mathbf{f}(\mathbf{r}_A)$. O campo centrífugo é também irrotacional, e $\text{rot } \mathbf{f} = 0$.

O divergente de \mathbf{f} é facilmente calculado seleccionando um sistema de coordenadas (x,y,z) tal que o eixo dos z coincide com o sistema de rotação da Terra. Recordando a equação 1.7 e tomando $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ obtemos

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_A) = \omega^2 (x_A \mathbf{i} + y_A \mathbf{j}) \quad (1.24)$$

e o divergente é imediatamente dado por:

$$\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{r}_A) = 2\omega^2 \quad (1.25)$$

O valor do $\text{div } \mathbf{f}$, sendo um campo escalar, não deverá sofrer alteração com a transformação para outro sistema de coordenadas, dado que o comportamento de \mathbf{f} não depende do sistema de coordenadas. Consequentemente, verificamos que o divergente da aceleração centrífuga é constante para todo o espaço.

Sendo a aceleração gravítica \mathbf{g} a soma das duas acelerações tratadas anteriormente, como consequência da linearidade do operador ∇ , então:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_A) = \text{div } \mathbf{g}(\mathbf{r}_A) = -4\pi G \rho(r_A) + 2\omega^2 \quad (1.26)$$

Além disso, como $\mathbf{g} = \nabla W$, obtemos finalmente:

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}_A) = -4\pi G \rho(r_A) + 2\omega^2 \quad (1.27)$$

Esta é a equação diferencial fundamental às derivadas parciais (de segunda ordem) para o potencial gravítico, referida como **equação de Poisson**. Embora esta equação, nesta forma, seja válida em todo o espaço é muitas vezes dividida em duas formas especiais:

a) Aplicada ao espaço exterior ($\rho = 0$)

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}_A) = 2\omega^2 \quad (1.28)$$

Desprezando a densidade da atmosfera (que é consideravelmente mais pequena que a densidade da Terra) podemos dizer que 1.28 é válida no exterior da Terra.

b) O segundo caso especial da equação 1.27 pode ser formulado para a superfície da Terra. Um ponto A localizado na superfície da Terra pode ser considerado como tendo uma densidade igual a uma fracção da densidade num ponto que é inteiramente no interior da Terra. Por outras palavras qualquer vizinhança diferencial do ponto A na superfície da Terra é parcialmente vazia e parcialmente densa. Por isso,

$$\nabla^2 W(\mathbf{r}_A) = -k\pi G \rho(r_A) + 2\omega^2 \quad (1.29)$$

em que ρ é entendido como sendo a densidade da superfície material da Terra e k pode tomar valores inteiros de 0 a 4.

Estas duas equações ilustram o facto de que as segundas derivadas do potencial gravítico é descontínuo na fronteira entre quaisquer dois meios de diferentes densidades, sendo a superfície da Terra um exemplo notável. Pode também ser constatado que a equação diferencial fundamental para o potencial gravitacional V no exterior da Terra, conhecida como equação potencial, é uma **equação de Laplace**:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}_A) = 0 \quad (1.30)$$

O potencial gravitacional no espaço exterior é uma função harmónica.

Claramente, o problema da determinação do campo gravítico da Terra pode ser dividido em dois: a determinação do campo gravitacional e a determinação do campo centrífugo.

Enquanto que f é uma função simples de posição em que a velocidade angular da Terra é conhecida com bastante precisão, a determinação do campo gravitacional é analiticamente complexa. Consequentemente vamos concentrar/deter até ao fim deste capítulo, no estudo do campo gravitacional.

O interesse geodésico reside sobretudo no espaço imediatamente exterior da Terra (até um altitude de alguns milhares de km da superfície da Terra), a superfície da Terra e a crosta da Terra. Com base nas características das equações diferenciais válidas no interior e exterior da Terra, podemos verificar que é vantajoso dividir a região de interesse em duas: exterior e interior da Terra. O potencial V no exterior da Terra é muitas vezes referido como potencial gravitacional externo e este potencial satisfaz a equação de Laplace (no exterior da Terra). Conhecendo os valores do potencial na superfície da Terra, ou seja, na fronteira da região de interesse, o potencial externo V é obtido por resolução das equações do problema de fronteira geodésico. Infelizmente, a superfície da Terra não é suficientemente suave para assegurar a unicidade desta solução externa. As várias possibilidades para suplantar este obstáculo serão discutidas no capítulo 2, juntamente com as formas de atribuir valores de fronteira. No presente, é suficiente reconhecer esta equação e dedicarmos a nossa atenção nas técnicas disponíveis para resolver o problema do valor de fronteira.

Das muitas técnicas existentes, apresentamos as duas que são mais facilmente aplicáveis neste caso, transformação em equações integrais e o método de separação de variáveis (designada técnica de Fourier).

Para formular a equação integral correspondente ao nosso problema de valor de fronteira vamos recordar a segunda identidade de Green:

$$\iint_S \left[P(\mathbf{r}_A) \frac{\partial Q(\mathbf{r}_A)}{\partial n} - Q(\mathbf{r}_A) \frac{\partial P(\mathbf{r}_A)}{\partial n} \right] dS = \iiint_T \left[P(\mathbf{r}_A) \nabla^2 Q(\mathbf{r}_A) - Q(\mathbf{r}_A) \nabla^2 P(\mathbf{r}_A) \right] dv \quad (1.31)$$

Se tomamos $Q(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})$ e $P(\mathbf{r}) = 1/\ell$ (fig. 1.8) verifica-se facilmente que a segunda função é um núcleo, ou seja, $P(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}) = 1/\ell$ é harmónica em todo o espaço excepto para $\ell=0$. É chamada função harmónica fundamental. Consequentemente obtemos:

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\frac{1}{\ell} \frac{\partial V(\mathbf{r}_A)}{\partial n} - V(\mathbf{r}_A) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\ell} \right] dS - \iiint_T \frac{1}{\ell} \nabla^2 V(\mathbf{r}_A) dv \\ = - \iiint_T V(\mathbf{r}_A) \nabla^2 \left(\frac{1}{\ell} \right) dv \end{aligned} \quad (1.32)$$

que é conhecida por terceira identidade de Green.

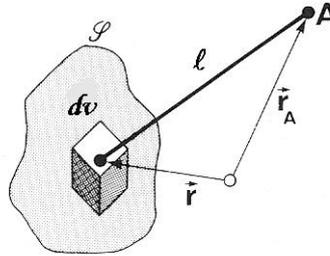


Figura 1.8 – Função harmónica fundamental ($1/\ell$)

Esta equação pode ser simplificada da seguinte forma: primeiro, notando que o potencial gravitacional é tomado unicamente no interior da terra e assim, é função somente da variável \mathbf{r} . Por outro lado, uma vez que a função harmónica fundamental é um núcleo, é função de ambos os vectores \mathbf{r} e \mathbf{r}_A . Dependendo da posição de A, o termo da direita de (1.32) é igual a $4\pi V(\mathbf{r}_A)$ para A dentro de S, $2\pi V(\mathbf{r}_A)$ para A sobre S e zero fora de S. Assim a terceira identidade de Green fica:

$$\iint_S \left[\frac{1}{\ell} \frac{\partial V(\mathbf{r}_A)}{\partial n} - V(\mathbf{r}_A) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\ell} \right] dS - \iiint_T \frac{1}{\ell} \nabla^2 V(\mathbf{r}_A) dv = \begin{cases} 4\pi V(\mathbf{r}_A), & \text{A dentro de S} \\ 2\pi V(\mathbf{r}_A), & \text{A na superfície de S} \\ 0 & \text{A no exterior de S} \end{cases} \quad (1.33)$$

Verificando-se que no interior da Terra $\nabla^2 V(\mathbf{r}_A) = -4\pi G \rho(\mathbf{r}_A)$ o integral de volume torna-se $4\pi G \iiint_T \rho(\mathbf{r})/\ell dv$, ou seja $4\pi V(\mathbf{r}_A)$. Assim obtemos finalmente:

$$\oiint_S \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \ell^{-1}}{\partial n} \right) dS = \begin{cases} 0, & \text{A dentro de S} \\ -2\pi V(\mathbf{r}_A), & \text{A na superfície de S} \\ -4\pi V(\mathbf{r}_A) & \text{A no exterior de S} \end{cases} \quad (1.34)$$

Esta é a solução do problema de valor de fronteira de Poisson para V na forma integral. Em particular, no exterior da Terra (A exterior a S) esta equação integral é equivalente ao problema do valor de fronteira de Laplace.

No caso exterior a função $1/\ell$ é uma função harmónica e pelo teorema da divergência verificamos que:

$$\oiint_S \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{\ell} dS = \iiint \nabla^2 \frac{1}{\ell} dv = 0 \quad (1.35)$$

então a terceira identidade pode assumir o aspecto:

$$\oiint_S \frac{1}{\ell} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -4\pi G \iiint \frac{\rho}{\ell} dv \quad (1.36)$$

e

$$G \iiint \frac{\rho}{\ell} dv = G \oiint_S \frac{1}{\ell} \left(-\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS \quad (1.37)$$

o que significa que o potencial criado pelas massas interiores a uma superfície equipotencial é igual ao potencial criado no mesmo ponto pela superfície S considerada materializada com a densidade :

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi G} \frac{\partial V}{\partial n} \quad (1.38)$$

Esta superfície S materializada deste modo é designada **Camada Equivalente de Green**. Podemos assim dizer que o potencial num ponto exterior é igual ao potencial criado pelas massas exteriores mais o potencial criado pela camada equivalente de Green. A massa dessa superfície é dada por:

$$M_s = \oiint \sigma dS = -\iiint \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\frac{1}{4\pi G} \iiint \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{4\pi G} 4\pi G M_i = M_i \quad (1.39)$$

utilizando o resultado do Teorema de Gauss.

Na sequência deste resultado surge o **Teorema de Stokes** que diz que: “Sendo S uma superfície equipotencial de um campo Newtoniano contendo no seu interior todas as massas atraentes, se modificarmos a distribuição das massas, sem alteração da sua totalidade mas por forma a que S continue a ser equipotencial e exterior às massas atraentes, o potencial num ponto qualquer exterior a S mantém-se inalterável.

Um conhecido exemplo da validade deste teorema é o potencial exterior de uma esfera homogénea $V=GM/\ell$ em que M é a massa da esfera e ℓ a distância de um qualquer ponto no exterior ao seu centro. Todas as esferas homogéneas concêntricas com a mesma massa

total m , independentemente da sua dimensão, criam o mesmo potencial. O potencial é o mesmo como se a massa total fosse concentrado no seu centro. Um outro exemplo é o já mencionado da camada equivalente de Green. Estes são exemplos particulares do teorema de Stokes, ou seja, uma função harmónica no exterior de S é unicamente determinada pelos seus valores em S . Contudo existem infinitas distribuições de massa que têm a dada função harmónica V como potencial exterior. É assim impossível a determinação da distribuição das massas a partir do seu potencial externo. Este problema é referido por problema inverso da teoria do potencial e não tem uma solução única. Este problema surge na prospecção geofísica aquando das medições gravimétricas: as massas invisíveis são inferidas das anomalias do campo gravítico. Para determinar o problema completamente, é necessária informação adicional, que é fornecida por exemplo pela geologia e por medições sísmicas.

1.4 Superfícies Equipotenciais

O potencial gravítico W deverá conter toda a informação sobre o campo gravítico. Será assim de esperar que a um potencial “suave” corresponde um campo gravítico suave e a um potencial irregular corresponda um campo gravítico irregular. Como poderá então o potencial ser usado para detectar as irregularidades do campo gravítico? A forma mais simples de usar o potencial gravítico W para caracterizar estas irregularidades é utilizar as suas superfícies equipotenciais e as suas linhas de força. A superfície equipotencial é a superfície na qual o potencial gravítico é constante. A equação geral da superfície equipotencial é $W(r) = \text{const.}$ Obviamente, existe um número infinito de superfícies equipotenciais, uma para cada valor do potencial. As linhas de força são curvas para as quais o gradiente do potencial é tangente a todos os pontos. As linhas de força do campo gravítico da Terra são chamadas linhas de prumo (fig. 1.9).

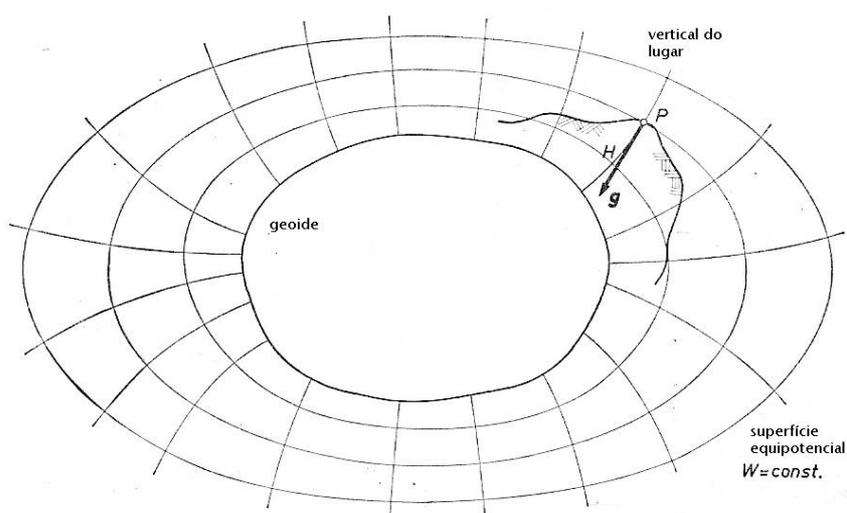


Figura 1.9 - Superfícies equipotenciais do campo gravítico da Terra (fig.2-2 HM)

As superfícies equipotenciais têm algumas propriedades de grande importância para a geodesia:

- a) As superfícies equipotenciais nunca se cruzam, são superfícies fechadas.
- b) São superfícies contínuas, sem discontinuidades.
- c) O raio de curvatura das superfícies varia suavemente de ponto para ponto, com excepção de locais onde a densidade das massas varie rapidamente.
- d) As superfícies são convexas em todos os pontos.

Quando movendo ao longo de uma superfície equipotencial, não há variação no potencial e conseqüentemente não há trabalho no sentido estático. Contudo este movimento não poderá ser nem contra nem a favor da direcção do campo de força. A consequência é que as linhas de força devem ser todas perpendiculares às superfícies equipotenciais. Sendo a direcção da linha de prumo frequentemente referida por direcção da vertical, as superfícies equipotenciais definem a direcção horizontal, assim estas são também chamadas linhas de nível.

Se desenharmos a secção vertical de uma superfície equipotencial verifica-se que esta é uma curva côncava. No seu conjunto as superfícies equipotenciais formam um padrão espacial côncavo reminescente de uma série de elipsóide concêntricos. Contudo devido às irregularidades da distribuição da densidade as superfícies equipotenciais são também de algum modo irregulares. Como o seu raio de curvatura varia irregularmente de ponto para ponto em várias direcções, as linhas de prumo são também curvas em todas as direcções - estas têm não só uma curvatura mas também uma torção - são conseqüentemente curvas espaciais. É bom lembrar que todas estas irregularidades, embora significativas, são relativamente pequenas.

Retomando a formulação matemática das superfícies equipotenciais e do potencial gravítico, obtemos por diferenciação do potencial gravítico ($W = W(x,y,z)$) :

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz \quad (1.40)$$

Escrevendo esta expressão em notação vectorial, e usando o produto escalar, obtemos:

$$dW = \overrightarrow{\text{grad}} W \cdot d\vec{x} = \vec{g} \cdot d\vec{x} \quad \text{em que} \quad d\vec{x} = (dx, dy, dz) \quad (1.41)$$

Se o vector $d\vec{x}$ é tomado ao longo da superfície equipotencial $W=W_0$, então o potencial permanece constante e $dW=0$, então:

$$\vec{g} \cdot d\vec{x} = 0 \quad (1.42)$$

Se o produto escalar de dois vectores é zero, podemos concluir que esses vectores são perpendiculares. Sendo $d\vec{x}$ tomado sobre a superfície equipotencial podemos então concluir que:

“O vector gravidade num ponto é normal à superfície equipotencial que passa por esse ponto”

Como as superfícies de nível são “horizontais em todo o lado” elas possuem uma forte significado físico intuitivo e físico do horizonte, e possuem a importância geodésica da linha de prumo, porque são normais a essa linha. Assim é facilmente entendida a importância que é dada ao estudo das superfícies equipotenciais.

Uma análise cuidada da expressão do potencial gravítico W permite-nos verificar que as superfícies equipotenciais $W(x,y,z)=W_0$ são equações de alguma complexidade matemática. As superfícies de nível completamente exteriores à Terra, são pelo menos superfícies analíticas, embora não possuam uma expressão analítica simples, porque o potencial gravítico W é analítico no exterior da Terra. Este resultado não é verdadeiro para as superfícies de nível parcialmente interiores ou totalmente interiores à Terra, como o Geóide. Estas superfícies são contínuas e suaves, mas não são superfícies analíticas; na próxima secção veremos como a curvatura das superfícies equipotenciais interiores varia descontinuamente com a densidade.

As linhas que intersectam as superfícies de nível não são, de um modo geral, exactamente linhas rectas, mas ligeiramente encurvadas. Estas linhas são chamadas **linhas de força**, ou **linhas de prumo**. Em cada ponto as linhas de prumo são tangentes à vertical, e o vector gravidade é tangente à linha de prumo. Portanto, vertical, direcção do vector gravidade e direcção da linha de prumo são sinónimos.

A altitude H de um ponto acima do nível do mar (altitude ortométrica) é medida ao longo da linha de prumo encurvada, a partir do geóide. Se tomarmos o vector \vec{dx} ao longo da linha de prumo na direcção de crescimento das altitudes H , então o seu comprimento (do vector \vec{dx}) será:

$$|\vec{dx}| = dH \quad (1.43)$$

e a sua direcção é oposta ao do vector \vec{g} , que é direccionado para o interior da Terra, sendo o ângulo entre \vec{dx} e \vec{g} de 180, então:

$$\vec{g} \cdot \vec{dx} = g dH \cos(\vec{g}, \vec{dx}) = g dH \cos(180) = -g dH \quad (1.44)$$

Como $\vec{g} \cdot \vec{dx} = dW$, então:
$$dW = -g dH \quad (1.45)$$

Esta equação mostra-nos a relação existente entre a altitude H e o potencial W , e será essencial na teoria da determinação das altitudes. Esta expressão mostra claramente a inter-relação inseparável que caracteriza a geodesia – a inter-relação entre conceitos geométricos (H) e conceitos dinâmicos (W).

Foi visto que existe uma relação definida entre as superfícies equipotenciais e a direcção da gravidade - são mutuamente perpendiculares. A questão muitas vezes colocada é: qual a relação entre as superfícies equipotenciais e a magnitude da gravidade? É a distância entre as superfícies que é directamente relacionada com a magnitude da gravidade? Quanto mais juntas as superfícies, mais forte o campo da gravidade e vice-versa fig. 1.10. Isto é obvio, pois sabemos que g é meramente a diferença de potencial de duas infinitamente próximas superfícies equipotenciais dividida pela sua separação, i. e.

$$g = |\nabla W| \approx \frac{\partial W}{\partial h} \quad (1.46)$$

O resultado anterior dá também resposta a uma questão muitas vezes colocada e erradamente respondida: será a gravidade numa superfície equipotencial constante? Pela fig. 1.10 verificamos que a magnitude da gravidade numa superfície equipotencial é variável.

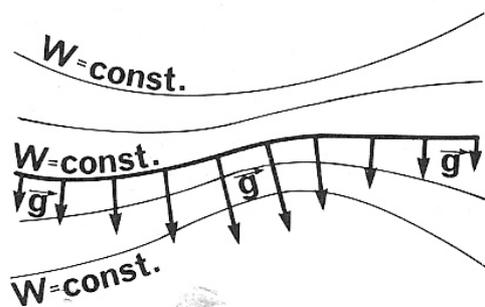


Figura 1.10 – O vector gravidade e as superfícies equipotenciais (VK, fig. 6.13)

Uma outra característica tirada da fig. 1.9, o facto de, numa abordagem global, as superfícies equipotenciais convergirem mais nos pólos pode agora ser explicada: isto é uma consequência da gravidade ser superior nos pólos que no equador.

É claro que a superfície de um fluido homogéneo em equilíbrio coincide com a superfície de uma das superfícies equipotenciais da Terra. Suponhamos que a superfície do fluido difere da superfície equipotencial; então existirão diferenças de potencial ao longo da superfície do fluido, ou, por outras palavras, existiria uma componente da força da gravidade actuando ao longo da superfície do fluido. As diferenças em potencial, ou equivalentemente, a componente da força da gravidade tangente à superfície criaria um fluxo que traria a superfície do fluido ao ponto de equilíbrio, ou seja, coincidência com a superfície equipotencial.

Isto é o que acontece na superfície da Terra quer localmente quer globalmente. As superfícies dos lagos e oceanos tendem a seguir as superfícies equipotenciais com alguns pequenos desvios quer devido a influências externas quer devido à falta de homogeneidade.

De todas as superfícies equipotenciais existe uma de particular interesse para a geodesia que corresponde à superfície que melhor aproxima o nível médio do mar em toda a Terra. Esta superfície é designada **geóide**. Gauss descreveu o geóide como sendo a figura matemática da Terra e como tal é uma superfície de referência na geodesia.

Numa primeira aproximação, i.e. até alguns poucos metros, o geóide é representado pelo nível médio do mar. O geóide passa sob os continentes a uma profundidade igual à altitude do terreno acima do nível médio do mar. As observações provaram que o geóide pode ser aproximado - até alguns metros - por um elipsóide geocêntrico biaxial (designado por elipsóide médio da Terra) cujo semi-eixo menor coincide com o eixo principal de inércia polar da Terra.

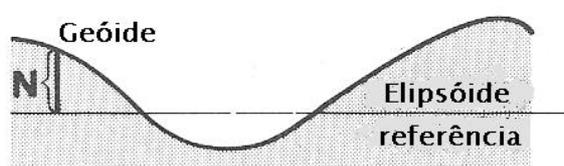


Figura 1.11 – Secção vertical do geóide em que N representa a ondulação do geóide em relação ao elipsóide (adaptado VK).

A separação entre o elipsóide de referência geocêntrico e o geóide é designada por altitude geoidal ou ondulação do geóide sendo geralmente designada pela letra N (fig. 1.11). Esta quantidade é algumas vezes chamada altitude absoluta do geóide porque relaciona o geóide com algo “absoluto” – o elipsóide de referência geocêntrico.

Existe também uma altitude relativa do geóide, que refere o geóide a outro tipo de elipsóide de referência que não é geocêntrico. Como exemplo de um geóide deste tipo podemos referir a ondulação do geóide em Portugal continental relativa ao datum 73 ou ao datum Lisboa.

Na figura 1.12 é apresentada um dos soluções globais para a ondulação do geóide obtida dos coeficientes do modelo geopotencial EGM96 (Lemoine *et al.*, 1997) representados os grandes comprimentos de onda até ao grau 360. É importante realçar que os mínimos relativos da ondulação do geóide não são côncavos uma vez que o geóide é uma superfície convexa (harmónica em todo o espaço) e estas regiões côncavas são só aparentes. O maior valor (absoluto) da ondulação do geóide ocorre no sul da Índia em que o geóide passa a baixo do elipsóide cerca de 100m.

A relação entre amplitudes e comprimentos de onda do geóide foi detectada empiricamente por Kaula. Esta relação é mais facilmente detectada num perfil do geóide, apresentado na figura 1.11. Quando N é desenvolvido em série de Fourier trigonométrica em média (para vários perfis em várias localizações e em várias direcções) a amplitude A_n (coeficientes de Fourier) diminui com o aumento do número de onda n. Se considerarmos $n=1$ com um correspondente comprimento de onda de 40000 km a regra de Kaula fica:

$$A_n \approx R/(n^2 10^5)$$

em que R é o raio médio da Terra. Por exemplo, se um elemento tem de comprimento 2000 km (correspondendo a comprimento de onda de 4000 km, ou $n=10$) então a sua amplitude deverá ser em média 64 cm.

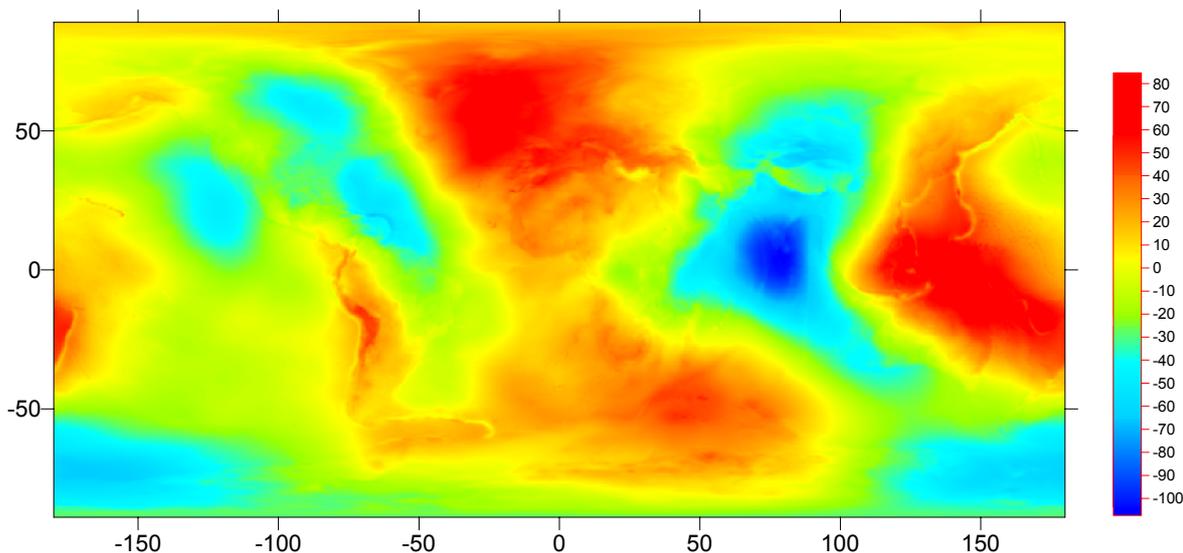


Figura 1.12 – Ondulação do geóide do modelo geopotencial EGM96.

As medições geodésicas são quase em exclusivo referidas ao sistema de superfícies de nível e linhas de prumo, em que o geóide toma um papel essencial. Assim o objectivo imediato da Geodesia Física é “a determinação das superfícies de nível do campo gravítico da Terra”. De uma forma mais abstracta, mas de formulação equivalente, podemos dizer que a geodesia física tem como objectivo a determinação da função potencial $W(x,y,z)$ pois segundo Burns, se o potencial W é dado em função das coordenadas x, y, z , então, conhecemos todas as superfícies de nível incluindo o geóide, e são dadas pela equação $W(x,y,z) = \text{const}$.

1.5 Curvatura das superfícies de nível e das linhas de prumo

A curvatura de uma curva com a expressão $y=f(x)$ é dada por (ver fig. 1.13):

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.47)$$

em que k é a curvatura e ρ é raio de curvatura e $y' = dy/dx$ e $y'' = d^2y/dx^2$.

Superfícies equipotenciais. Consideremos um ponto P numa superfície de nível S. Tomemos um sistema local de coordenadas x,y,z com origem em P, cujo eixo dos Z é vertical, normal à superfície S (fig. 1.14).

Intersectamos essa superfície de nível $W(x,y,z)=W_0$ com o plano xz , atribuindo $y=0$. Comparando a figura 1.13 com figura 1.14, verificamos que agora o eixo dos zz toma o lugar do eixo dos yy . Consequentemente, em vez da equação 1.47, temos agora a curvatura da intersecção da superfície de nível com o plano xz :

$$k_1 = \frac{d^2z}{dx^2} \quad (1.48)$$

Se diferenciarmos $W(x,y,z)=W_0$ em ordem a x , considerando que $y=0$ e z é uma função de x , obtemos:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \frac{dz}{dx} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad (1.50)$$

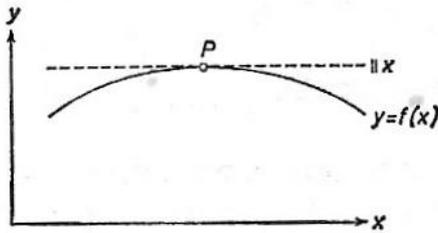


Figura 1.13 – Curvatura de uma linha de equação $f(x)$.

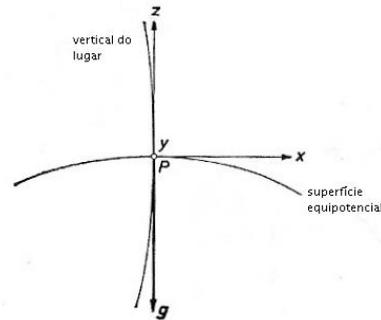


Figura 1.14 – Curvatura da linhas de prumo e da superfície equipotencial.

Uma vez que o eixo dos x é tangente em P então $dz/dx=0$ em P, e então:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\frac{\partial W}{\partial z}} \quad (1.51)$$

sendo o eixo dos zz a vertical no ponto P então: $\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial H} = -g$ e a equação 1.48 toma a

forma:

$$k_1 = \frac{W_{xx}}{g} \quad (1.52)$$

A curvatura da intersecção da superfície de nível com o plano yz é obtida pela substituição de x por y e obtemos:

$$k_2 = \frac{W_{yy}}{g} \quad (1.53)$$

A curvatura média J de uma superfície num ponto P é definida como a média aritmética das curvaturas de duas secções verticais perpendiculares entre si (fig 1.15). Assim:

$$J = -\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2g} \quad (1.54)$$

O sinal negativo é apenas uma convenção. Esta é a expressão para a curvatura média da superfície de nível.

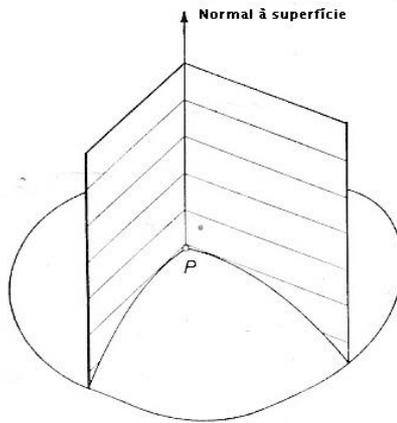


Figura 1.15 – Curvatura média de uma superfície.

Pela equação de Poisson generalizada (equação 1.27):

$$\nabla^2 W = W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (1.55)$$

obtemos:

$$-2gJ + W_{zz} = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (1.56)$$

Considerando que:

$$W_z = -g \quad \text{e que} \quad W_{zz} = -\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial H}$$

obtemos finalmente:

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2} \quad (1.57)$$

Esta importante equação, que relaciona o gradiente vertical da gravidade $\partial g/\partial H$ com a curvatura da superfície de nível é devida a Bruns. É mais um exemplo da interligação entre conceitos geométricos e dinâmicos.

Linhas de prumo. A curvatura das linhas de prumo é necessária para a redução das observações astronómicas ao geóide. A linha de prumo pode ser definida como a curva cujo vector elementar $d\vec{x} = (dx, dy, dz)$ tem a direcção do vector gravidade $\vec{g} = (W_x, W_y, W_z)$, ou seja, $d\vec{x}$ e \vec{g} diferem unicamente de um factor proporcional. Este facto é expresso na forma:

$$\frac{dx}{W_x} = \frac{dy}{W_y} = \frac{dz}{W_z} \quad (1.58)$$

No sistema de coordenadas da figura 1.14 a curvatura da projecção da linha de prumo no plano xz é dado por:

$$k_1 = \frac{d^2x}{dz^2} \quad (1.59)$$

esta é a equação 1.47 aplicada ao presente caso. Pela equação 1.58 temos:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{W_x}{W_z} \quad (1.60)$$

Diferenciando esta equação em ordem a z, considerando que y=0:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{W_z^2} \left[W_z \left(W_{xz} + W_{xx} \frac{dx}{dz} \right) - W_x \left(W_{zz} + W_{zx} \frac{dx}{dz} \right) \right] \quad (1.61)$$

Neste caso particular de sistema de coordenadas, o vector gravidade coincide com o eixo dos zz, de modo que as suas componentes x e y são zero:

$$W_x = W_y = 0$$

Pela figura 1.14 verificamos que $\frac{dx}{dz} = 0$, logo:

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{W_z W_{xz}}{W_z^2} = \frac{W_{xz}}{W_z} = \frac{W_{zx}}{W_z} \quad (1.62)$$

Considerando $W_z = -g$, obtemos finalmente:

$$k_1 = \frac{1}{g} \frac{dg}{dx} \quad (1.63)$$

e similarmemente

$$k_2 = \frac{1}{g} \frac{dg}{dy} \quad (1.64)$$

Estas são as curvaturas das projecções da linha de prumo no plano xz e yz , sendo o eixo dos z vertical coincidindo com o vector gravidade. A curvatura total k da linha de prumo é dada de acordo com a geometria diferencial por:

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} = \frac{1}{g} \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \quad (1.65)$$

A finalizar é de referir que as várias fórmulas para a curvatura das superfícies de nível e linhas de prumo são equivalentes a uma única equação vectorial:

$$\overrightarrow{\text{grad } g} = (-2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2)\vec{n} + gk\vec{n}_1 \quad (1.66)$$

em que \vec{n} é o vector unitário ao longo da linha de prumo e \vec{n}_1 é o vector unitário ao longo da normal principal da linha de prumo. Esta equação é chamada **equação generalizada de Bruns**.

1.6 Equação de Laplace

Na secção 1.3 foi referida uma forma de resolver a equação de Laplace através da terceira identidade de Green. Contudo, existe outra técnica para resolver o problema de valor de fronteira que faz recurso à separação de variáveis na resolução deste problema, designado método de Fourier. Para obter a solução na sua forma mais simples, é importante seleccionar um sistema de coordenadas mais conveniente que o sistema cartesiano. Para esse efeito são geralmente usados dois sistemas – o esférico e o elipsóidico. A equação de Laplace $\nabla^2 V(\mathbf{r}_A) = 0$ toma diferentes formas para diferentes sistemas de coordenadas.

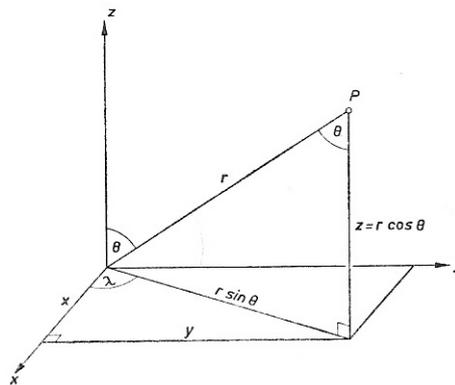


Figura 1.16 – Sistema de coordenadas esférico (r, θ, λ) .

Seja (X, Y, Z) um sistema de coordenadas cartesiano centrado no centro de massa da Terra e (r, θ, λ) um sistema de coordenadas esférico (fig. 1.16). A relação entre estes dois sistemas é dada por:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \lambda \\ y = r \sin \theta \sin \lambda \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = r \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \lambda = r \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1.67)$$

No sistema cartesiano o elemento linear é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.68)$$

e no sistema esférico é dado por:

$$ds^2 = dr^2 + r d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\lambda^2 \quad (1.69)$$

o facto de nesta expressão não aparecerem os produtos $dr d\theta$, $dr d\lambda$ e $d\theta d\lambda$ significa que este sistema de coordenadas esférico é um sistema ortogonal.

Em coordenadas cartesianas a equação de Laplace toma seguinte forma:

$$\nabla^2 V(r_A) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.70)$$

e num qualquer sistema de coordenadas genérico (q_1, q_2, q_3) em que:

$$\begin{cases} x = f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = f_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (1.71)$$

a equação de Laplace em coordenadas ortogonais generalizadas toma a forma:

$$\nabla^2 V(r_A) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \right] \quad (1.72)$$

com:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial f_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial q_i} \right)^2 \quad (1.73)$$

Para coordenadas genéricas $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ e $q_3 = \lambda$ a equação de Laplace em coordenadas esféricas toma a seguinte forma:

$$2r \frac{\partial V}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1.74)$$

No caso do sistema de coordenadas elipsóidico (u, Θ, λ) indicado graficamente na fig. 1.17 a relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas elipsóidicas é:

$$\begin{cases} x = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \Theta \cos \lambda \\ y = \sqrt{u^2 + E^2} \sin \Theta \sin \lambda \\ z = u \cos \Theta \end{cases} \quad (1.75)$$

em que E é a excentricidade linear e é dada por $E^2 = a^2 - b^2$.

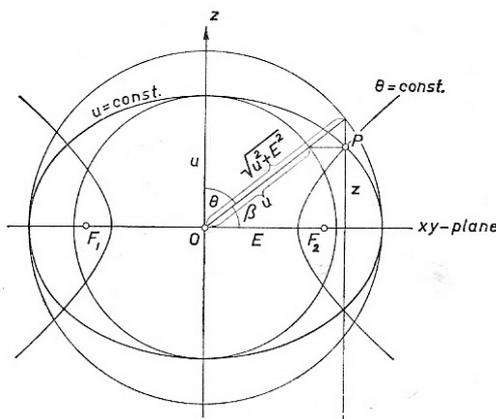


Figura 1.17a – Sistema de coordenadas elipsóidicas.

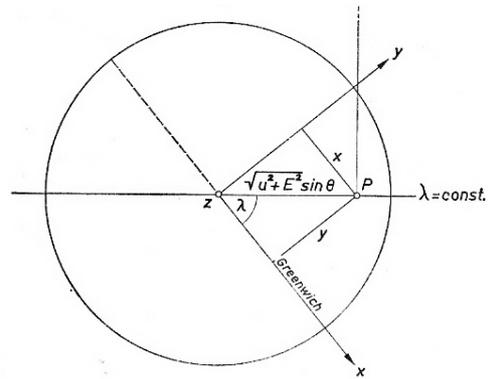


Figura 1.17b – Sistema de coordenadas elipsóidicas no plano.

Considerando que $q_1 = u$, $q_2 = \Theta$ e $q_3 = \lambda$, e calculando as expressões para os coeficientes h_i , obtemos a expressão da equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas:

$$\nabla^2 V(r_A) = (u^2 + E^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \Theta^2} + \cot \Theta \frac{\partial V}{\partial \Theta} + \frac{u^2 + E^2 \cos \Theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \quad (1.76)$$

As equações 1.74 e 1.76 são equações diferenciais fundamentais do potencial gravitacional externo da Terra sendo equivalentes à terceira equação 1.34.

1.7 Resolução da equação de Laplace em coordenadas esféricas

Aplicando o método da separação de variáveis à equação de Laplace, o potencial gravitacional $V(r, \theta, \lambda)$ surge em termos do produto das seguintes três funções:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r) \cdot g(\theta) \cdot h(\lambda) \quad (1.77)$$

o produto das duas últimas funções é designado por $Y(\theta, \lambda)$.

Se o sistema de coordenadas esférico (r, θ, λ) for seleccionado de forma que a sua origem seja próxima do centro de massas da Terra, a superfície da Terra será bastante próxima esfera $r = R$. Então a primeira função, f , descreverá o comportamento de V na direcção aproximadamente normal à superfície da Terra (globalmente falando), enquanto que a função Y define as variações do potencial na superfície da Terra. Mais precisamente, se tomarmos a esfera S de raio $r = a$, chamada esfera de Brillouin (fig. 1.18), que contenha no seu interior todas as massas da Terra, então nesta esfera f será constante, e todas as variações de V em S serão caracterizadas por Y . Além disso, no nosso estudo, esta esfera pode ser tomada como fronteira inferior do problema de fronteira externo, e como a fronteira superior do problema interno. Claramente, desprezando a atmosfera, a equação 1.74 é válida no exterior dessa esfera.

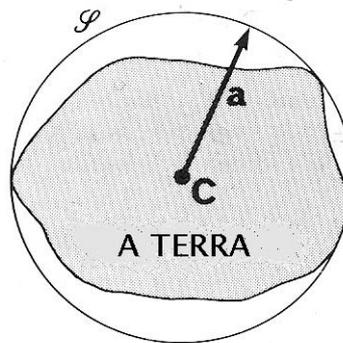


Figura 1.18 – Esfera de Brillouin ou de Bjerhammar.

A primeira aplicação do método de Fourier à equação 1.74 dá:

$$2r.Y \frac{\partial f}{\partial r} + r^2.Y \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + f.\cot\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + f.\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + f.\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1.78)$$

que pode ser separada em duas equações interligadas pela constante c_1 :

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} - c_1 f = 0 \quad (1.79)$$

e

$$\cot\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + c_1 Y = 0 \quad (1.80)$$

A equação 1.79 é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. A equação 1.80 é ainda uma equação diferencial às derivadas parciais em θ e λ . A segunda aplicação do método de Fourier à equação 1.80 dá:

$$\sin^2\theta \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \sin\theta \cos\theta \frac{dg}{d\theta} + (c_1 \sin^2\theta - c_2) g = 0 \quad (1.81)$$

e

$$\frac{d^2h}{d\lambda^2} + c_2 h = 0 \quad (1.82)$$

Nestas duas equações, as variáveis θ e λ são separadas. O sistema das três equações diferenciais ordinárias 1.79, 1.81 e 1.82 é equivalente à equação 1.74. A sua interligação é assegurada através das duas constantes c_1 e c_2 comuns às equações. As três equações diferenciais ordinárias dão a solução geral para as funções $f(r)$, $g(\theta)$ e $h(\lambda)$.

Começando por resolver as duas últimas equações, constatamos facilmente que a equação 1.82 é a equação do movimento harmónico simples com valores próprios $\pm \sqrt{-c_2}$. No caso em que o valor próprio é um número complexo a solução da equação diferencial é dada por:

$$h(\lambda) = e^{-a\lambda/2} \cos \omega\lambda \quad \text{e} \quad h(\lambda) = e^{-a\lambda/2} \sin \omega\lambda \quad \text{em que} \quad \omega = \sqrt{b - 1/4a^2}$$

em que a e b são os coeficientes da equação linear $h'' + ah' + bh = 0$. No presente caso $a=0$, $b=c_2$ e $\omega = \sqrt{c_2}$ e fazendo $m^2=c_2$, em que m é um inteiro, as soluções da equação são:

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \quad \text{e} \quad h(\lambda) = \sin m\lambda \quad (1.83)$$

como podemos confirmar por substituição. Qualquer combinação linear destas funções próprias satisfaz 1.82.

Substituindo $\cos\theta$ por t e c_2 por m^2 em 1.81, obtemos:

$$(1-t^2)g'' - 2tg' + \left(c_1 - \frac{m^2}{1-t^2}\right)g = 0 \quad (1.84)$$

em que as derivadas são agora tomadas em ordem a t . Esta é uma equação de Legendre de segunda ordem para $g(t)$. Faz sentido considerar a sua solução só para valores de m para os quais exista a solução da equação 1.82; ou seja só para os valores próprios da equação 1.82. Foi demonstrado (Hobson, 1931) que a equação 1.84 só tem solução para os seguintes valores próprios de c_1 :

$$c_1 = n(n+1), \quad n = m, m+1, m+2, \dots$$

quando $\theta \in (0, \pi)$ ou $t \in (-1, 1)$. Estes são os valores próprios admissíveis da equação de Legendre. As correspondentes funções próprias são as **funções associadas de Legendre** (de grau n e ordem m) dadas por:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n \quad (1.85)$$

$$\text{ou} \quad P_{nm}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \quad (1.86)$$

em que

$$P_n(t) = P_{n0} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (1.87)$$

são os polinómios de Legendre. Estas funções próprias são ortogonais para $t \in (-1, 1)$ ou $\theta \in (0, \pi)$ com peso $w(t) = 1$. As funções $P_n(t)$ designam-se **polinómios de Legendre**. Alguns exemplos de Polinómios de Legendre:

$$\begin{aligned} P_0(t) = 1 & & P_1(t) = t & & P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} & & (1.88) \\ & & P_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t & & P_4(t) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Os polinómios de Legendre têm tantos zeros quanto o seu grau. A sua representação geométrica é apresentada na figura 1.19. Para o cálculo destes polinómios existe uma forma recursiva que calcula o polinómio de grau n a partir dos polinómios de grau $n-1$ e $n-2$. Esta expressão é de particular interesse para o cálculo numérico dos polinómios de Legendre e a sua expressão é dada por:

$$P_n(t) = -\frac{n-1}{n} P_{n-2}(t) + \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) \quad (1.89)$$

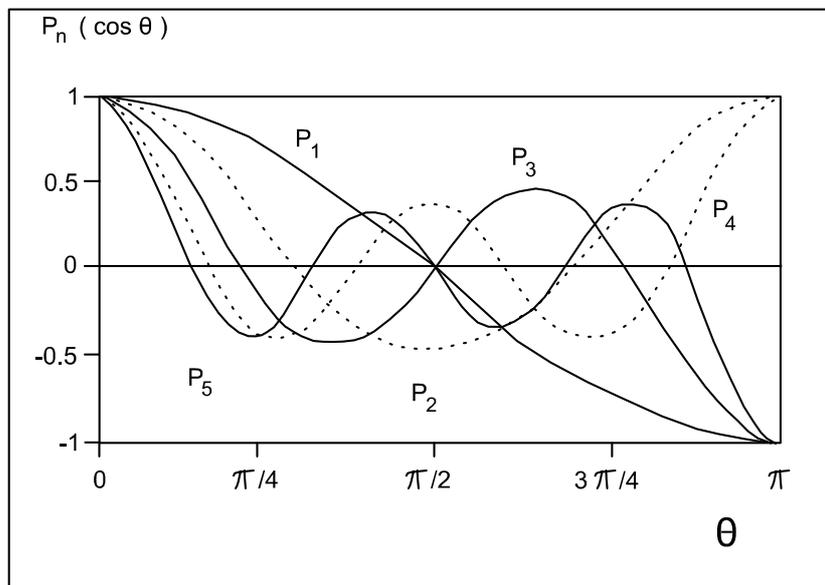


Figura 1.19 - Polinómios de Legendre.

As funções associadas de Legendre são calculadas pela expressão 1.86 e as expressões dessas funções para os primeiros graus e ordem são:

$$\begin{aligned}
 P_{11}(t) &= \sqrt{1-t^2} & (1.90) \\
 P_{21}(t) &= 3t\sqrt{1-t^2} & P_{22}(t) &= 3(1-t^2) \\
 P_{31}(t) &= \sqrt{1-t^2}\left(\frac{15}{2}t^2 - \frac{3}{2}\right) & P_{32}(t) &= 15(1-t^2)t & P_{33}(t) &= 15(1-t^2)^{3/2}
 \end{aligned}$$

Para as funções de Legendre existe também uma fórmula recursiva que é dada por:

$$P_{nm}(t) = \frac{2n-1}{n-m}tP_{n-1,m} - \frac{n+m-1}{n-m}P_{n-2,m} \quad (1.91)$$

As funções harmónicas esféricas de superfície descrevem o comportamento de V na superfície de uma esfera unitária ($r=1$). Os zeros destas funções dividem a superfície em células de sinal alternado, limitadas por paralelos e meridianos geodésicos.

Voltando à equação 1.80, podemos ver que esta equação é satisfeita por qualquer função Y que seja o produto de uma combinação linear de funções trigonométricas, com uma combinação linear de funções próprias (1.85) para os valores admissíveis de m e n . Esta combinação pode ser escrita como:

$$Y(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (1.92)$$

em que C_{nm} , S_{nm} são constantes arbitrárias. As funções $Y_{nm}^c(\theta) = P_{nm}(\cos \theta) \cos(m\lambda)$ e $Y_{nm}^s(\theta) = P_{nm}(\cos \theta) \sin(m\lambda)$ são chamadas funções harmónicas esféricas de superfície. Podem ser vistas como funções próprias da equação de Laplace em coordenadas esféricas na superfície da esfera. Os inteiros $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = m, m+1, m+2, \dots$ ou identicamente $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 0, 1, 2, \dots, n$ são então os valores próprios da equação de Laplace.

Para $m = 0$, as funções harmónicas de superfície são polinómios de Legendre com $t = \cos \theta$. Estes polinómios têm n zeros no intervalo $-1 \leq t \leq 1$ (ou seja, Y_{n0}^c tem n zeros em $0 \leq \theta \leq \pi$) e, como não depende de λ , dividem a esfera unitária em $n+1$ bandas, nas quais são alternadamente positivos e negativos. Estas harmónicas são designadas por zonais (Fig. 1.20a).

No caso em que $0 \leq m \leq n$, é facilmente verificável que as funções de Legendre têm $n-m$ zeros no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, enquanto que $\cos m\lambda$ e $\sin m\lambda$ têm $2m$ zeros em $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Desta maneira as funções Y_{nm}^c e Y_{nm}^s dividem a esfera unitária em rectângulos, com zonas negras (onde a função é negativa) e com zonas brancas (onde a função é positiva). Estas harmónicas são as tesserais (Fig. 1.20c).

No último caso, $m=n$, desaparece a dependência da latitude e , conseqüentemente, as harmónicas Y_{nm}^c e Y_{nm}^s dividem a esfera em $2m$ sectores, positivos e negativos alternativamente. Estas harmónicas são designadas por sectoriais (Fig. 1.20b).

O desenvolvimento em harmónicas esféricas representa assim uma decomposição espectral em estruturas do campo de comprimento de onda $360^\circ/n$ (correspondendo a uma resolução de $180^\circ/n$). Os polinómios de Legendre representam um campo rotacional simétrico dividindo a esfera em zonas de latitude, na qual a ordem n estabelece simetria em relação ao equador. O termo de ordem zero corresponde ao potencial de uma Terra esférica homogénea.

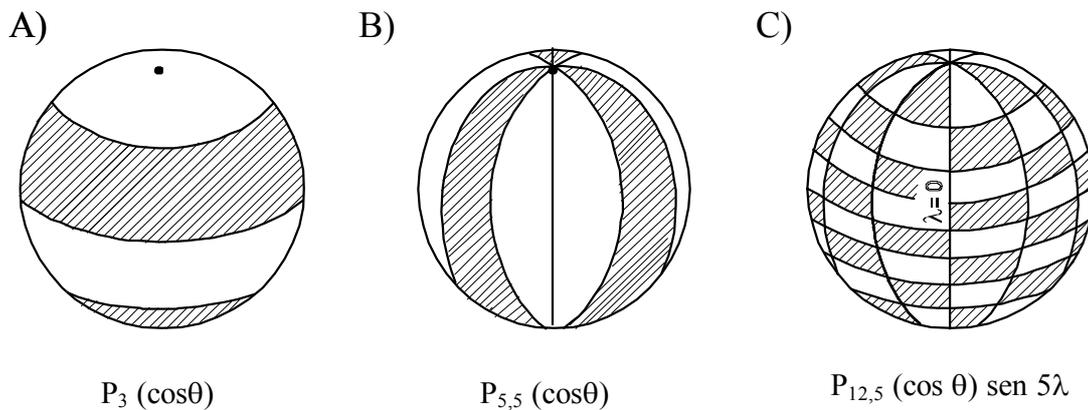


Figura 1.20 - Ilustração das diversas harmónicas de superfície (adaptado de Torge, 1989).

De notar que as harmónicas esféricas, sendo funções próprias, são de facto ortogonais na superfície esférica S , ou seja, para qualquer $(\theta, \lambda) \in (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$. Este facto significa que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\sigma} Y_{nm}^c(\theta, \lambda) Y_{rs}^c(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \\ \iint_{\sigma} Y_{nm}^s(\theta, \lambda) Y_{rs}^s(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \end{array} \right. \quad \text{para } s \neq n, \text{ ou } r \neq m, \text{ ou ambos} \quad (1.93)$$

$$\iint_{\sigma} Y_{nm}^c(\theta, \lambda) Y_{nm}^s(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \quad \text{em qualquer caso.} \quad (1.94)$$

em que $d\sigma$ é o elemento de ângulo sólido. Além disso, pode ser demonstrado que as suas normas são iguais para ambos os subscritos c e s :

$$\iint_{\sigma} [Y_{nm}^c(\theta, \lambda)]^2 d\sigma = \iint_{\sigma} [Y_{nm}^s(\theta, \lambda)]^2 d\sigma = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (1.95)$$

$$\iint_{\sigma} [Y_{n0}^c(\theta, \lambda)]^2 = \frac{4\pi}{2n+1} \quad (1.96)$$

Nestas relações foi usada a abreviatura $\iint_{\sigma} = \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi}$ para o integral estendido à esfera unitária. Podemos assim definir as funções harmónicas completamente normalizadas, que diferindo das anteriores de um termo constante tornam-se mais facilmente manejáveis computacionalmente. Estas funções harmónicas exprimem-se pelas relações:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y}_{nm}^c \\ \bar{Y}_{nm}^s \end{Bmatrix} = \sqrt{k(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \begin{Bmatrix} Y^c \\ Y^s \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad k = \begin{cases} 1 & \text{se } m = 0 \\ 2 & \text{se } m \neq 0 \end{cases} \quad (1.97)$$

As relações de ortogonalidade (1.93 e 1.94) também se verificam para estas funções harmónicas completamente normalizadas, enquanto que as relações (1.95) vêm simplificadas:

$$\iint_{\sigma} [\bar{Y}_{nm}^c(\theta, \lambda)]^2 d\sigma = \iint_{\sigma} [\bar{Y}_{nm}^s(\theta, \lambda)]^2 d\sigma = 4\pi \quad (1.98)$$

Como a área da superfície da esfera de raio unitário é 4π , isto significa que a média do quadrado de uma função harmónica completamente normalizada, tomada em toda a esfera, é a unidade. Esta fórmula é válida para qualquer valor de m .

Regressando ao problema exterior para o potencial gravitacional V (no exterior da esfera de Brilloiun), verificamos que este pode ser facilmente resolvido usando as harmónicas esféricas. Considerando as equações 1.77 e 1.92 a solução é claramente dada por:

$$V(r, \theta, \lambda) = f(r) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (1.99)$$

Neste caso os coeficientes C_{nm} e S_{nm} têm de ser determinados de modo que seja satisfeito o valor de fronteira $V(r=a, \theta, \lambda)$ na esfera. Isto significa que a seguinte equação deverá ser satisfeita:

$$V(a, \theta, \lambda) = f(a) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (1.100)$$

em que $f(a)$ é constante.

Vamos agora dedicar a nossa atenção à terceira equação diferencial ordinária 1.79. De novo é importante considerar a solução unicamente para o caso com significado físico, a que corresponde os valores admissíveis de $c_1 = n(n+1)$. Esta equação é uma variante da equação de Euler e tem como solução duas famílias de funções f_1 e f_2 :

$$f(r) = r^n \quad \text{ou} \quad f(r) = r^{-(n+1)} \quad (1.101)$$

satisfazendo a equação para qualquer valor admissível de n .

As primeiras funções aumentam o seu valor com o aumento de r o que é inconsistente com o esperado comportamento físico do potencial gravitacional. Por isso, quando se pensa na solução do problema exterior, é-se obrigado a tomar a segunda família de funções de forma a tornar a solução compatível com os requisitos físicos. Com um raciocínio semelhante f_1 é usado quando é contemplado o problema interior de Laplace.

É oportuno tomar a função radial $f = f_2$ como adimensional de modo que sejam os coeficientes C_{nm} e S_{nm} os portadores das unidades físicas. Isto é normalmente conseguido introduzindo um factor de escala no sistema de coordenadas esférico, tomando o raio da fronteira esférica unitário: em vez de se usar r , usa-se r/a . Neste sistema de coordenadas, a função radial fica:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{a}{r}\right)^{(n+1)} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (1.102)$$

Este factor de escala, afecta necessariamente os valores dos coeficientes em 1.99, preservando assim a magnitude de V . Introduzindo esta alteração na equação (1.99) para o potencial gravitacional externo, obtemos:

$$V(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (1.103)$$

Esta equação é equivalente à equação 1.16, a única diferença é que em vez da desconhecida densidade de massas ρ , temos um número infinito de coeficientes C_{nm} e S_{nm} desconhecidos. A equação 1.103 é conhecida como o desenvolvimento do potencial gravitacional em harmónicas esféricas, ou o desenvolvimento da equação de Laplace em funções próprias em coordenadas esféricas.

1.8 Resolução da equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas

A resolução da equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas é efectuada de forma semelhante ao caso das coordenadas esféricas. Aplicando o método da separação de variáveis à equação de Laplace, o potencial gravitacional $V(u, \Theta, \lambda)$ surge em termos do produto das seguintes três funções:

$$V(r, \Theta, \lambda) = f(r) \cdot g(\Theta) \cdot h(\lambda) \quad (1.104)$$

o produto das duas últimas funções é designado por $Y(\Theta, \lambda)$. A primeira aplicação do método de Fourier à equação 1.76 (equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas) dá:

$$\nabla^2 V(r_A) = gh(u^2 + E^2) \frac{d^2 f}{du^2} + gh2u \frac{df}{du} + fh \frac{d^2 g}{d\Theta^2} + fh \cot \Theta \frac{dg}{d\Theta} + \frac{u^2 + E^2 \cos \Theta}{(u^2 + E^2) \sin^2 \Theta} fg \frac{d^2 h}{d\lambda^2} \quad (1.105)$$

Efectuando a separação de variáveis tal como no caso esférico e atribuindo os mesmos valores às constantes c_1 e c_2 , ou seja m^2 e $n(n+1)$, respectivamente, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$(u^2 + E^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} + \left[n(n+1) - \frac{E^2}{u^2 + E^2} m^2 \right] f(u) = 0 \quad (1.106)$$

$$\sin \Theta \frac{d^2 g}{d\Theta^2} + \cos \Theta \frac{dg}{d\Theta} + \left[n(n+1) \sin \Theta - \frac{m^2}{\sin \Theta} \right] g(\Theta) = 0 \quad (1.107)$$

$$\frac{d^2 h}{d\lambda^2} + m^2 h(\lambda) = 0 \quad (1.108)$$

sendo m e n constantes inteiras. A segunda e terceira equações são idênticas ao caso esférico e a sua solução é também idêntica. A primeira equação pode ser transformada numa equação equivalente à segunda equação, mediante uma transformação de variável apropriada. Substituindo na primeira equação $\tau = i \frac{u}{E}$ esta assume a forma:

$$(1 - \tau^2) \bar{f}''(\tau) + 2\tau \bar{f}'(\tau) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1 - \tau^2)} \right] \bar{f}(\tau) = 0 \quad (1.109)$$

que é uma equação de Legendre de segunda ordem cuja solução no caso esférico são as funções de Legendre $P_{nm}(\cos\theta)$. No caso elipsóidico as soluções da equação de Legendre designam-se por soluções de segundo tipo e representam-se por $Q_{nm}(t)$. Embora sejam funções de natureza completamente diferente elas satisfazem relações muito similares às que são satisfeitas por $P_{nm}(t)$. As funções zonais têm a expressão:

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} P_n(t) \ln \frac{1+t}{1-t} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(t) P_{n-k}(t) \quad (1.110)$$

Estas funções satisfazem a mesma fórmula recursiva de $P_n(t)$. Se o argumento destas funções for um número complexo, como no caso presente, então estas funções assumem a seguinte forma:

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P_{k-1}(z) P_{n-k}(z) \quad (1.111)$$

onde $P_n(z)$ são definidos pelas mesmas expressões para o argumento real. A expressão destas funções para os primeiros graus no caso de argumento real, é:

$$Q_0(t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \operatorname{arctgh}(t) \quad Q_1(t) = \frac{t}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - 1 = t \cdot \operatorname{arctgh}(t) - 1 \quad (1.112)$$

No caso do argumento complexo $\operatorname{arccoth}(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$ o grau zero e um assumem a seguinte expressão:

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \operatorname{arccoth}(z) \quad Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 1 = z \cdot \operatorname{arccoth}(z) - 1 \quad (1.113)$$

Retomando a resolução da equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas, podemos assim concluir que a solução das três equações anteriores, em coordenadas elipsóidicas, é:

$$\bar{f}(\tau) = f(u) = Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right) \quad \text{ou} \quad P_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right) \quad (1.114)$$

$$\bar{g}(t) = g(\Theta) = P_{nm}(\cos \Theta) \quad (1.115)$$

$$h(\lambda) = \cos m\lambda \quad h(\lambda) = \sin m\lambda \quad (1.116)$$

Sendo estas as soluções da equação de Laplace em coordenadas elipsóidicas, a sua combinação linear é ainda solução dessa equação e obtemos a seguinte expressão para a solução do potencial gravitacional em harmónicas elipsóidicas:

$$V(u, \Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \Theta) \quad (1.117)$$

A constante b é o semieixo menor de um elipsóide arbitrário mas fixo, designado elipsóide de referência.

1.9 Coeficientes do Potencial gravitacional

Antes de nos determos com a determinação dos coeficientes, vamos reflectir um pouco sobre o papel do termo radial $(a/r)^{n+1}$ que surge no caso esférico. No exterior da esfera, a sua magnitude diminui com o aumento da ordem n , uma vez que $a/r < 1$. Isto

significa que com o aumento da altitude, o comprimento de onda dos elementos de maior frequência (n e m) do campo potencial tendem a ser mais “suaves”.

Como já foi referido a equação 1.16 é equivalente à equação 1.103, surgindo a questão sobre as vantagens da segunda em relação à primeira. De facto, progredimos pelo menos um passo em frente, dado que agora é possível calcular os coeficientes a partir de dados sobre, ou no exterior da Terra, em vez de estarmos dependentes do conhecimento da distribuição das massas no interior da Terra. Se o valor do potencial gravitacional no limite da esfera S ($r = a$) for conhecido, então os coeficientes C_{nm} e S_{nm} podem ser obtidos através do procedimento de desenvolvimento de V em harmónicas esféricas. As equações para os coeficientes do potencial, usando harmónicas esféricas normalizadas são:

$$\bar{C}_{nm} = \iint_S V(\theta, \lambda) Y_{nm}^c(\theta, \lambda) dS \quad (1.118)$$

$$\bar{S}_{nm} = \iint_S V(\theta, \lambda) Y_{nm}^s(\theta, \lambda) dS \quad (1.119)$$

Uma vez que existe uma relação implícita entre a densidade ρ e os coeficientes do potencial C_{nm} e S_{nm} somos tentados a averiguar em pormenor essa relação. Por exemplo, pode o conhecimento dos coeficientes do potencial dizer-nos algo sobre a distribuição interna das massas? Para responder a esta pergunta, vamos primeiro discutir a relação directa dos coeficientes com a densidade. A equação 1.15a pode ser escrita como:

$$V(P) = V(x, y, z) = G \iiint_T \frac{1}{\ell} \rho(Q) dV \quad (1.120)$$

Designando por ψ o ângulo espacial entre OP (\mathbf{r}_A) e OQ (\mathbf{r}_Q), (ver figura 1.21) o inverso da distância ℓ entre esses dois pontos pode ser escrita como:

$$\ell^{-1}(r_p, r_Q) = (r_p^2 + r_Q^2 - 2r_p r_Q \cos \psi)^{-1/2} = \frac{1}{r_p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_Q}{r_p} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (1.121)$$

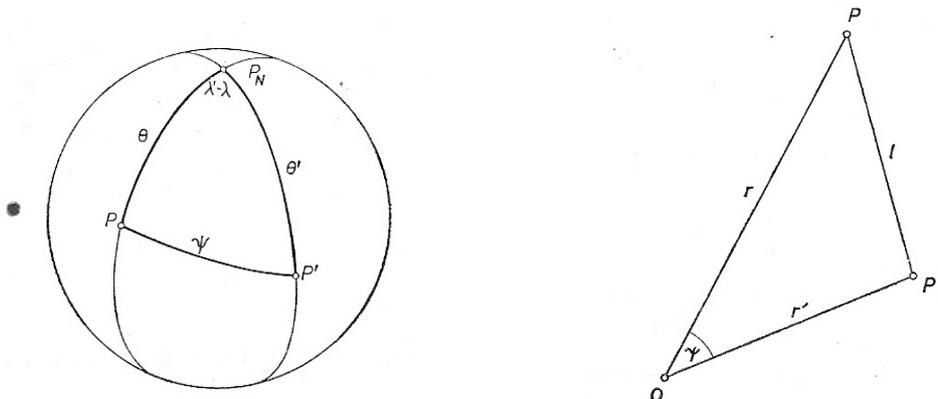


Figura 1.21a – Distância esférica, ψ , entre dois pontos na esfera.

Figura 1.21b – Distância espacial, ℓ , entre dois pontos.

Escrevendo $\cos \psi$ por meio das coordenadas esféricas (θ_P, λ_P) do ponto P, e as coordenadas esféricas (θ_Q, λ_Q) do ponto de integração, da trigonometria esférica obtemos:

$$\cos \psi = \cos \theta_P \cos \theta_Q + \sin \theta_P \sin \theta_Q \cos(\lambda_Q - \lambda_P) \quad (1.122a)$$

Após alguma manipulação analítica, pode ser demonstrado que a substituição da equação 1.122a na expressão dos polinómios de Legendre resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) = & P_n(\cos \theta_P) P_n(\cos \theta_Q) \\ & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (Y_{nm}^c(\theta_P, \lambda_P) Y_{nm}^c(\theta_Q, \lambda_Q)) \\ & + Y_{nm}^s(\theta_P, \lambda_P) Y_{nm}^s(\theta_Q, \lambda_Q) \end{aligned} \quad (1.122b)$$

Esta fórmula é também devida a Legendre e é conhecida como fórmula da decomposição de Legendre. Substituindo este resultado na equação 1.121 obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{P_n(\cos \theta_P)}{r_P^{n+1}} r_Q^n P_n(\cos \theta_Q) \right. \\ & + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left(\frac{Y_{nm}^c(\theta_P, \lambda_P)}{r_P^{n+1}} r_Q^n Y_{nm}^c(\theta_Q, \lambda_Q) \right) \\ & \left. + \frac{Y_{nm}^s(\theta_P, \lambda_P)}{r_P^{n+1}} r_Q^n Y_{nm}^s(\theta_Q, \lambda_Q) \right\} \end{aligned} \quad (1.123)$$

A substituição deste resultado na equação 1.120 e reintroduzindo este resultado nas equações 1.118 e 1.119, mediante a troca dos somatórios com os integrais de volume, obtemos:

$$C_{n0} = \frac{G}{a} \iiint \left(\frac{r'}{a} \right)^n P_{n0}(\cos \theta') \cos m\lambda' \rho \, dv \quad (1.124)$$

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{a} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint \left(\frac{r}{a} \right)^n P_{nm}(\cos \theta') \begin{Bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{Bmatrix} \rho \, dv \quad (1.125)$$

Estas são as equações que relacionam os coeficientes do potencial, nas unidades do potencial, directamente com a distribuição da densidade.

O problema inverso, ou seja, a determinação da densidade como função das componentes do potencial é impossível. Contudo, é possível retirar algumas conclusões indirectas sobre a distribuição da densidade a partir dos coeficientes do potencial: nomeadamente, existe uma relação entre alguns coeficientes e as coordenadas do centro de massa da Terra, bem como dos momentos principais e dos produtos de inércia. Para obter esta relação, vamos adoptar um sistema cartesiano arbitrário fixo à Terra. Transformando as coordenadas esféricas (r, θ, λ) do ponto de integração usado em 1.125 neste sistema de coordenadas $r' = (x', y', z')$ verificamos que as primeiras doze harmónicas são:

$$\begin{aligned}
 Y_{0,0}^c(x', y', z') &= 1 & Y_{0,0}^s(x', y', z') &= 0 & (1.126) \\
 Y_{1,0}^c(x', y', z') &= \frac{z'}{r'} & Y_{1,0}^s(x', y', z') &= 0 \\
 Y_{1,1}^c(x', y', z') &= \frac{x'}{r'} & Y_{1,1}^s(x', y', z') &= \frac{y'}{r'} \\
 Y_{2,0}^c(x', y', z') &= \frac{-x'^2 - y'^2 + 2z'^2}{2r'^2} & Y_{2,0}^s(x', y', z') &= 0 \\
 Y_{2,1}^c(x', y', z') &= \frac{3x'z'}{r'^2} & Y_{2,1}^s(x', y', z') &= \frac{3y'z'}{r'^2} \\
 Y_{2,2}^c(x', y', z') &= \frac{3(x'^2 - y'^2)}{r'^2} & Y_{2,2}^s(x', y', z') &= \frac{6x'y'}{r'^2}
 \end{aligned}$$

Substituindo estes valores na equação 1.125, descobrimos que as primeiras 12 coeficientes do potencial adquirem a seguinte fórmula todos em unidades do potencial:

$$\begin{aligned}
 C_{0,0} &= \frac{G}{a} M & S_{0,0} &= 0 & (1.127) \\
 C_{1,0} &= \frac{G}{a^2} M \zeta' & S_{1,0} &= 0 \\
 C_{1,1} &= \frac{G}{a^2} M \xi' & S_{1,1} &= \frac{G}{a^2} M \eta' \\
 C_{2,0} &= \frac{G}{a^3} \left(\frac{I'_x + I'_y}{2} - I'_z \right) & S_{2,0} &= 0 \\
 C_{2,1} &= \frac{G}{a^3} I'_{xz} & S_{2,1} &= \frac{G}{a^3} I'_{yz} \\
 C_{2,2} &= \frac{G}{4a^3} (I'_y - I'_x) & S_{2,2} &= \frac{G}{2a^3} I'_{xy}
 \end{aligned}$$

Nestas equações (ξ, η, ζ) são coordenadas do centro de massa no sistema de coordenadas cartesiano adoptado (fig.1.22). Os momentos de inércia da Terra são I'_x, I'_y, I'_z em relação ao sistema de coordenadas inicial, e $I'_{xy}, I'_{yz}, I'_{zx}$ são os produtos de inércia

da Terra, em relação ao mesmo sistema de coordenadas. É evidente que estes coeficientes do potencial de baixa ordem mostram não só a localização do centro de massa da Terra mas também a orientação e dimensão do elipsóide de inércia na origem do sistema de coordenadas adoptado. Os coeficientes do potencial de ordem elevada têm uma interpretação dinâmica similar, no entanto complexa.

As relações 1.127 são, portanto, de importância fundamental quando desejamos materializar o sistema de coordenadas geocêntrico natural. Se o sistema de coordenadas é seleccionado de modo a que $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$, então o sistema é geocêntrico. Se, adicionalmente $C_{21} = S_{21} = S_{22} = 0$, então o sistema torna-se coaxial com o elipsóide principal de inércia, ou seja, torna-se no sistema natural geocêntrico. Neste caso, $I'_x = I_1$, $I'_y = I_2$, $I'_z = I_3$ e temos:

$$C_{2,0} = \frac{G}{a^3} \left(\frac{I_1 + I_2}{2} - I_3 \right) \quad C_{2,2} = \frac{G}{4a^3} (I_2 - I_1) \quad (1.128)$$

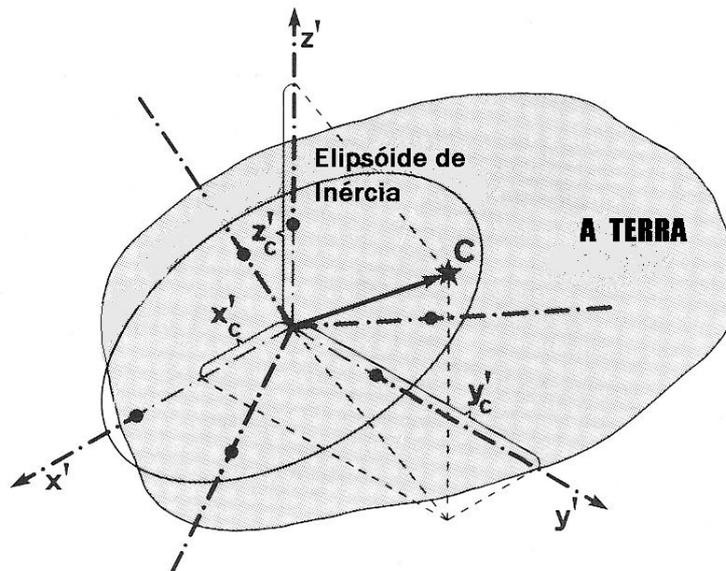


Figura 1.22 – Elipsóide de Inércia

Este novo sistema (geocêntrico natural) é relacionado com o sistema adoptado originalmente através de equações de transformação em que os três ângulos de rotação são obtidos dos valores próprios da diagonalização do tensor de inércia principal.

Como já referimos, os coeficientes do potencial estão todos em unidades físicas do potencial, cm^2s^{-2} . É muitas vezes conveniente trabalhar com coeficientes do potencial adimensionais. Satisfazendo este objectivo, o potencial gravitacional (1.103) é escrito como:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right] \quad (1.129)$$

em que

$$J_{nm} = -\frac{C_{nm}a}{GM} \quad K_{nm} = -\frac{S_{nm}a}{GM} \quad (1.130)$$

De notar que quando todos os elementos do desenvolvimento são desprezados ($n>1$), o potencial gravitacional se limita ao termo:

$$V(x, y, z) = \frac{GM}{r} \quad (1.131)$$

tal como tínhamos visto inicialmente.

O termo $J_2 = J_{2,0}$ reflecte a elipsidade da Terra, enquanto que os outros termos reflectem as restantes irregularidades. No sistema de coordenadas, natural, definido pelos eixos principais de inércia, temos que:

$$J_{2,0} = J_2 = -\frac{(1/2(I_1 + I_2) - I_3)}{Ma^2} \cong \frac{I_3 - I_1}{Ma^2} \quad (1.132)$$

Capítulo 2

Tratamento Local do Campo Gravítico

2.1 Potencial do elipsóide de nível

Em muitas ocasiões é vantajoso trabalhar com um modelo do campo gravítico, em que o grau de aproximação deste modelo ao actual campo gravítico é dependente da tarefa que nos propomos realizar. O modelo mais simples é o campo radial. Este campo pode ser visto como sendo gerado quer por uma partícula de dimensão negligível e massa comparável à da Terra, ou por uma esfera com distribuição de massas estratificada que produzirá, obviamente, um campo modelo idêntico no exterior da esfera. O potencial deste campo é dado por (1.131) o que mostra que o campo é função unicamente da distância ao centro do campo. As suas superfícies equipotenciais são superfícies esféricas, concêntricas.

Uma maior aproximação à realidade é um modelo do campo elipsóidico. Em geodesia é costume utilizar um campo modelo como tendo as seguintes características:

- a) partilhar a velocidade de rotação com o actual campo.
- b) ser gerado pelo elipsóide geocêntrico biaxial melhor aproximado definido por a e b .
- c) ter uma das suas superfícies equipotenciais - potencial U_0 igual ao potencial W_0 do geóide - coincidente com a superfície elipsóidal.

Um modelo com estas propriedades é chamado **campo gravítico normal** e o seu potencial é designado simplesmente por U . Este campo normal é obtido com um certo grau

de aproximação que reflecte o presente nível de conhecimentos acerca do campo gravítico. Por isso, necessariamente, não existe o campo gravítico normal perfeito, e consequentemente, os campos normais existentes, devem ser considerados unicamente como uma aproximação de um ideal teórico. Também deverá ser lembrado que a definição de um campo normal nem sequer estipula o conhecimento de uma única distribuição de massas no interior do elipsóide. Esta situação é assim similar com a do campo radial discutido anteriormente, em que diferentes distribuições de massas produzem todas um e o mesmo campo. Devemos agora provar que os requisitos anteriores definem um campo normal único. Para o efeito é vantajoso trabalhar com o sistema de coordenadas elipsóidicas já introduzido. Para reforçar o primeiro requisito (a), o potencial normal $U(u, \Theta)$ deve ser expresso como a soma de $\Phi(u, \Theta)$ – potencial centrífugo – e V^N que é a parte de $V(u, \Theta)$ necessária para satisfazer os outros dois requisitos. Assim:

$$U(u, \Theta) = V^N(u, \Theta) + \Phi(u, \Theta) \quad (2.1)$$

O potencial $\Phi(u, \Theta)$ pode ser facilmente formulado atendendo à fig. 2.1 (ver também fig. 1.16a):

$$\Phi(u, \Theta) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + E^2) \sin^2 \Theta \quad (2.2)$$

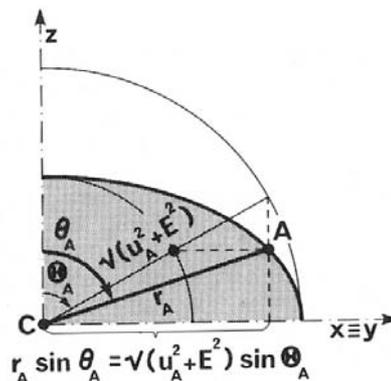


Figura 2.1 – Potencial centrífugo em coordenadas elipsóidicas.

De acordo com as imposições b) e c), quer o potencial gravítico normal U quer o potencial gravitacional normal V^N são simétricos, ou seja, não são função da longitude λ .

A terceira imposição estipula que:

$$U(b, \Theta) = W_0 \quad (2.3)$$

podendo ser vista como a equação de um elipsóide geocêntrico dado por b e E . Substituindo U da equação 2.1 e 2.2 podemos rescrever 2.3 como:

$$V^N(b, \Theta) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + E^2) \sin^2 \Theta = W_0 \quad (2.4)$$

Falta agora determinar $V^N(b, \Theta)$ que satisfaça esta equação. A expressão geral do potencial em harmónicas elipsóidicas é dada por:

$$V^N(u, \Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm}\left(i \frac{u}{E}\right)}{Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right)} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \Theta) \quad (2.5)$$

Uma vez que V^N deve ser simétrico, qualquer desenvolvimento em série, como a equação 1.117, deverá conter unicamente termos com $m=0$, ou seja termos zonais. Portanto, a expressão geral para V^N em coordenadas elipsóidicas deve ser:

$$V^N(u, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(u, E, b) C_n P_n(\cos \Theta) \quad (2.6)$$

Na superfície do elipsóide a coordenada u é igual ao semi-eixo menor b e então todos os termos radiais são iguais à unidade:

$$q_n(b, E, b) = Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right) / Q_{nm}\left(i \frac{b}{E}\right) = 1 \quad (2.7)$$

Então a equação do elipsóide 2.4 fica

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \Theta) &= W_0 - \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 \Theta \\ &= W_0 P_0(\cos \Theta) - \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{2}{3} [P_0(\cos \Theta) - P_2(\cos \Theta)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Esta equação é satisfeita para qualquer valor de Θ se todos os coeficientes zonais multiplicados pelas correspondentes funções de Legendre, no lado esquerdo e direito da equação forem iguais. Assim temos:

$$\begin{aligned} C_0 &= W_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3} & C_1 &= 0 \\ C_2 &= \frac{\omega^2 a^2}{3} & C_n &= 0, \quad n = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

e o potencial gravitacional normal fica:

$$V^N(u, \Theta) = q_0(u, E, b) \left(W_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3} \right) + q_2(u, E, b) \frac{\omega^2 a^2}{3} P_2(\cos \Theta) \quad (2.10)$$

Finalmente, pretendemos exprimir o potencial gravítico normal U como função de GM , que possa ser directamente determinada, em vez de ser uma função de W_0 que

desconhecemos. Por outras palavras, vamos eliminar W_0 da equação 2.10. Para tal vamos exprimir q_0 em função de r :

$$q_0(u, E, b) = \arctan\left(\frac{E}{u}\right) / \arctan\left(\frac{E}{b}\right) \approx \frac{E}{r} \arctan^{-1}\left(\frac{E}{b}\right) \quad (2.11)$$

é obtido com precisão de $(1/r)^3$. Comparando V^N com V , ambos com uma precisão de $(1/r)^3$, obtemos a relação pretendida:

$$\frac{E}{r} \arctan^{-1}\left(\frac{E}{b}\right) \left(W_0 - \frac{\omega^2 a^2}{3} \right) \approx \frac{GM}{r} \quad (2.12)$$

Exprimindo W_0 em termos de GM e substituindo na equação 2.4, o potencial normal em coordenadas elipsóidicas é finalmente obtido na seguinte forma:

$$U(u, \Theta) = \frac{GM}{E} \arctan\left(\frac{E}{u}\right) + \frac{\omega^2 (u^2 + E^2)}{3} (1 - P_2(\cos \Theta)) + q_2(u, E, b) \frac{\omega^2 a^2}{3} P_2(\cos \Theta) \quad (2.13)$$

É evidente que o potencial normal é definido para qualquer ponto (u, Θ) desde que GM , ω e o elipsóide de referência (b, E) sejam especificados. Isto conclui a demonstração de que os pressupostos iniciais de a) a c) definem unicamente um campo normal.

Em muitas aplicações, é conveniente exprimir o potencial normal em coordenadas esféricas. Para obter a expressão apropriada, iniciamos com o desenvolvimento do potencial gravitacional $W(r, \theta, \lambda)$ em harmónicas esféricas (1.129) e da sua componente normal V^N . Esta componente deve satisfazer a equação 2.1:

$$U(u, \theta) = V^N(u, \theta) + \Phi(u, \theta) \quad (2.14)$$

bem como os requisitos a), b) e c) indicados no início desta secção. Aqui, e mais uma vez, o potencial normal gravitacional deve ser simétrico, e naturalmente só serão consideradas as harmónicas zonais. Além disso, dado que o campo normal é também simétrico em relação ao equador, todas as harmónicas de grau ímpar ($n = 2k+1, k=0,1,..$) deverão desaparecer. O potencial gravítico é então escrito na seguinte forma:

$$U(r, \theta) = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2,4,6..}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n^N P_n(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (2.15)$$

em que os coeficientes do potencial normal $J_n^N = J_{no}^N$ são funções de todos os parâmetros requeridos, ou seja, a dimensão e forma do elipsóide de referência geocêntrico, a

velocidade de rotação da Terra e a massa Terra. Por exemplo, J_2^N , que tem o termo centrífugo incluído nele, pode ser demonstrado igual a:

$$J_2^N = \frac{2}{3}f - \frac{1}{3}f^2 + \frac{2}{21}fm \quad (2.16a)$$

em que m é o factor geodésico definido como:

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (2.16b)$$

Para fins práticos é suficiente tomar alguns destes coeficientes potenciais normais, tal como foi feito para o sistema Internacional de referência geodésico 1980 (Moritz, 1984). Estes coeficientes, juntamente com GM , a e ω determinam de forma única o campo gravítico normal.

2.2 Gravidade Normal

Qualquer modelo de campo gravítico tem um modelo de gravidade associado. É definido como sabemos como o gradiente do campo potencial modelo. Nesta secção iremos obter a fórmula internacional da gravidade, deduzida do potencial normal, com base na qual se calcula o valor da gravidade normal.

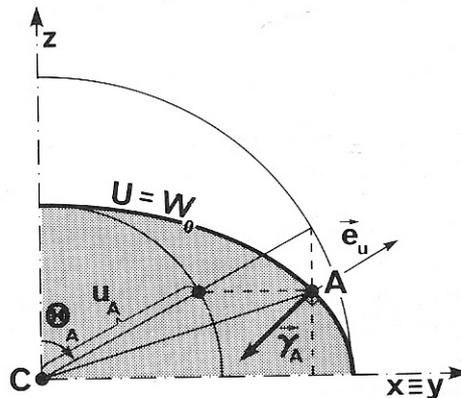


Figura 2.2 – Direcção da gravidade normal.

Aplicando o operador gradiente ao potencial gravítico normal definido pela equação 2.13, obtemos:

$$\begin{aligned} \gamma(u, \Theta) = \nabla U(u, \Theta) = & \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \frac{\partial U}{\partial u} \vec{e}_u \\ & + \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \frac{\partial U}{\partial \Theta} \vec{e}_\Theta + \frac{1}{\sqrt{(u^2 + E^2) \sin \Theta}} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \vec{e}_\lambda \end{aligned} \quad (2.17)$$

O terceiro termo do lado direito da expressao devera desaparecer uma vez que U não é função da longitude. Também na proximidade do elipsóide de referência geocêntrico, a gravidade normal é aproximadamente direccionada ao longo da direcção de u quando o achatamento do elipsóide é pequeno, tal como podemos ver na fig. 2.2. O desvio entre estas duas direcções não é nunca superior a 13 minutos de arco. Por isso, com um elevado grau de precisão (mais que 0.2 μ Gal), mesmo o segundo termo contendo a taxa de variação com Θ pode desaparecer, e podemos escrever, para a magnitude da gravidade normal:

$$\gamma(u, \Theta) \approx \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \frac{\partial U}{\partial u} \vec{e}_u \quad (2.18)$$

O sinal negativo deve-se ao facto de u e γ terem sentidos opostos. Calculando agora a derivada parcial de U a partir de 2.13, em que a derivada de $q_2(u,b,E)$ é igual a $-3b^3/u^4$, obtemos:

$$\gamma(u, \Theta) \approx \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \cos^2 \Theta}} \left[-\frac{GM}{u^2 + E^2} - \frac{a^2 \omega^2 b^3}{u^4} P_2(\cos \Theta) + \frac{2\omega^2 u}{3} (1 - P_2(\cos \Theta)) \right] \quad (2.19)$$

Quando trabalhamos com a gravidade normal, é usual calcular primeiro o seu valor no elipsóide de referência geocêntrico e posteriormente corrigir do efeito de localização acima do elipsóide, isto porque o gradiente vertical da gravidade normal pode ser deduzido facilmente. Consequentemente a nossa primeira tarefa é determinar uma fórmula para a gravidade normal na superficie do elipsóide, ou seja γ_0 . Como sabemos, no elipsóide $u = b$ e a equação 2.17 é transformada após algumas manipulações matemáticas elementares na seguinte expressão:

$$\gamma_0 = \gamma(b, \Theta) \approx \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \cos^2 \Theta + b^2 \sin^2 \Theta}} \left(1 - \frac{2}{3} m + \left(\frac{a^2}{b^2} m + \frac{2}{3} m \right) P_2(\cos \Theta) \right) \quad (2.20)$$

em que m é o factor geodésico.

A partir desta equação podemos deduzir, com operações básicas, a **fórmula de Somigliana**:

$$\gamma_0(\Theta) = \gamma = \frac{a\gamma_b \cos^2 \Theta + b\gamma_a \sin^2 \Theta}{\sqrt{a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta}} \quad (2.21)$$

Esta equação é da mesma ordem de precisão da equação 2.13. A segunda fórmula de Somigliana exprime a gravidade normal como função da latitude geodésica, em vez da segunda coordenada elipsóidica Θ :

$$\gamma = \frac{a\gamma_a \cos^2 \varphi + b\gamma_b \sin^2 \varphi}{\sqrt{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}} \quad (2.22)$$

em que φ é a latitude geodésica (ângulo entre a normal ao elipsóide e o plano equatorial) e γ_a e γ_b são a gravidade no equador e no polo, respectivamente:

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{me' q'_0}{6q_0} \right) \quad (2.23)$$

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{me' q'_0}{3q_0} \right) \quad (2.24)$$

em que

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (2.25)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{2e'} \quad (2.26)$$

$$q'_0 = 3 \left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1 \quad (2.27)$$

É de salientar que todas as fórmulas relativas ao elipsóide de referência (potencial normal) se exprimem em termos das quatro constantes (a , f , ω , U_0).

Desenvolvendo o denominador desta expressão em série de potencias e desprezando os termos de ordem mais elevada obtemos a expressão geral:

$$\gamma_0(\phi) = \gamma_a (1 + f^* \sin^2 \phi + f_4 \sin^2 2\phi) \text{ mGal} \quad (2.28)$$

em que $f^* = f_2 + f_4$ e f_2 e f_4 são dados por:

$$f_2 = -f + \frac{5}{2}m + \frac{1}{2}f^2 - \frac{26}{7}fm + \frac{15}{4}m^2 \quad \text{e} \quad f_4 = -\frac{1}{2}f^2 + \frac{5}{2}fm \quad (2.29)$$

Esta fórmula é precisa unicamente até à ordem de e^2 , ou seja cerca de 50 μGal . Podemos ainda com base nesta expressão deduzir o teorema de Clairaut. Numa aproximação linear podemos escrever:

$$f^* = f_2 + f_4 = -f + \frac{5}{2}m \quad (2.30)$$

em que m é o factor dinâmico dado pela expressão 2.25. Substituindo o valor de GM pela expressão equivalente em função do valor da gravidade no equador, obtemos:

$$m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a} \quad (2.31)$$

Com base na expressão do achatamento gravítico obtemos finalmente:

$$f^* + f = \frac{5 \omega^2 a}{2 \gamma_a} \quad (2.32)$$

que corresponde ao enunciado do Teorema de Clairaut que nos diz que: “A soma do achatamento gravítico com o achatamento geométrico é igual a $5/2$ da razão entre a força centrífuga no equador e a gravidade no equador. Este teorema também nos indica uma forma de determinar o achatamento geométrico a partir de quantidades puramente dinâmicas, realçando-se mais uma vez a dependência da forma da Terra do seu campo gravítico.

Relativamente à gravidade normal no sistema GRS80, a sua fórmula neste sistema é dada por (Moritz, 1984):

$$\gamma_{1980} = 978032.67715 (1 + 0.005302 \sin^2 \phi + 0.0000058 \sin^2 2\phi) \text{ mGal} \quad (2.33)$$

sendo a fórmula da gravidade normal para o sistema GRS67 dada por :

$$\gamma_{1967} = 978031.84558 (1 + 0.0053024 \sin^2 \phi + 0.0000059 \sin^2 2\phi) \text{ mGal} \quad (2.34)$$

Sendo a anomalia da gravidade (Δg) a diferença entre o valor observado da gravidade reduzida ao geóide (g), e o valor da gravidade normal no correspondente ponto da superfície do elipsóide (γ), resulta que a diferença entre as anomalias nos dois sistemas de referência é a diferença entre as gravidades normais correspondentes (*ibid*):

$$\Delta g_{1980} = \Delta g_{1967} - (0.83157 + 0.00440932 \sin^2 \phi + 0.0977836 \sin^2 2\phi) \text{ mGal} \quad (2.35)$$

2.3 Gradiente vertical da gravidade

A equação do gradiente vertical da gravidade (equação 1.57) deduzida no capítulo anterior pode ser aplicada ao campo gravítico normal. Limitando a expressão ao espaço exterior do elipsóide geocêntrico – em que a densidade é zero- obtemos:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -2\gamma J^N - 2\varpi^2 \quad (2.36)$$

em que J_N é a curvatura média da superfície equipotencial normal correspondente. No elipsóide de referência, a curvatura média pode ser calculada pela fórmula de Euler:

$$J^N = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N} \right) \quad (2.37)$$

em que M e N são os raios de curvatura do elipsóide nas direcções do meridiano e do primeiro vertical. Como sabemos, estas são função da forma e dimensão do elipsóide e da latitude ϕ . Substituindo M e N em 2.37, obtemos, após alguma manipulação:

$$J^N \cong \frac{b}{a^2} (1 + 2f \cos^2 \phi) \quad (2.38)$$

com precisão na ordem de e^2 . Substituindo na equação 2.36 e exprimindo o termo correctivo $2\varpi^2$ – bastante menor que o outro termo – por meio do parâmetro m e γ , obtemos finalmente a fórmula para o gradiente da gravidade normal na forma usada na geodesia:

$$\left. \frac{\partial\gamma}{\partial H} \right|_0 \cong -\frac{2\gamma_0}{a} (1 + m + 2f \cos^2 \phi) \quad (2.39)$$

O sinal negativo nesta expressão como na equação 1.57, mostra que o gradiente diminui com o aumento da latitude, como seria esperado. Através de alguns passos elementares a equação 2.39 pode ser transformada em:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\gamma}{\partial H} \right|_0 &\cong -\frac{2\gamma_0}{a} 1.00673 (1 - 0.001415 \sin^2 \phi) \\ &\cong -0.308745 (1 - 0.001415 \sin^2 \phi) \text{ mGal/m} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Tomado o valor de $\sin^2 \phi = 0.4$, obtemos:

$$\left. \frac{\partial\gamma}{\partial H} \right|_0 \cong -0.3086 \text{ mGal/m} \quad (2.41)$$

Este é o valor aproximado do gradiente ar-livre, ou seja no exterior na Terra. O mesmo valor é obtido para o gradiente ar-livre considerando a magnitude da gravidade igual a:

$$g \cong \frac{GM}{r^2} - \varpi^2 r \cos^2 \phi \quad (2.42)$$

Derivando esta equação em ordem a r:

$$\frac{\partial g}{\partial r} \cong \frac{\partial g}{\partial H} \cong -\frac{2GM}{r^3} - \omega^2 \cos^2 \phi \quad (2.43)$$

Substituindo r pelo valor médio do raio da Terra:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial H} \right| \cong (-0.3083 - 0.000532 \cos^2 \phi) \text{ mGal/m} \quad (2.44)$$

O gradiente do campo gravítico actual varia regionalmente e localmente devido à irregular distribuição de massas, ou seja, devido à topografia e às variações de densidade sob a superfície da Terra. Estas variações da densidade, por outro lado, reflectem-se no valor da curvatura média J das superfícies equipotenciais correspondentes. Os valores locais têm de ser determinados directamente. Nem o raio de curvatura nem o termo J podem ser observados; existem contudo, técnicas disponíveis que permitem medir outras quantidades e obter o valor de J a partir destas, uma das quantidades é o desvio da vertical.

Para a determinação do gradiente vertical da gravidade no interior da Terra, deverão ser formuladas hipóteses respeitantes à distribuição da densidade. Foram propostas várias hipóteses para diferentes aplicações. Nesta secção veremos a hipótese apresentada por Bouguer, geralmente usada na geodesia.

Para compreender a ideia básica do gradiente de Bouguer, tomemos como exemplo a figura 2.3. Para determinar o gradiente da gravidade entre o ponto A na superfície da Terra e o correspondente ponto A₀ no geóide, começamos por assumir que o geóide é uma esfera de raio R. O gradiente é então calculado em dois passos: primeiro é obtida a parte do gradiente devida ao geóide, e depois é determinado o gradiente da superfície anelar ε de espessura H_A e densidade uniforme ρ₀. O primeiro passo conduz de novo ao gradiente ar-livre, se for assumida uma distribuição lateral homogénea de massas. O segundo passo é um pouco mais trabalhoso.

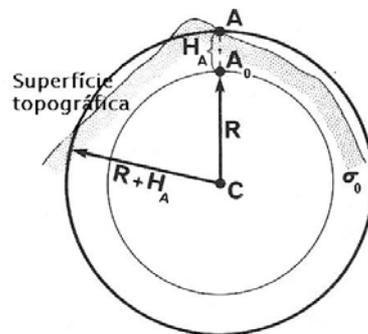


Figura 2.3 – Gradiente de Bouguer.

A aceleraçao gravitacional \vec{g}_g^ε devida à superfície anelar escrita em coordenadas esféricas geocêntricas satisfaz em A a seguinte equação (ver equação 1.29):

$$\text{div } \vec{g}_g^\varepsilon = \nabla \cdot \vec{g}_g^\varepsilon(r, \theta, \lambda) \Big|_A = -2\pi G\rho_0 \quad (2.45)$$

Dado que esta superfície é considerada esférica, então \vec{g}_g^ε é no nosso sistema de coordenadas unicamente função de r, e as derivadas em ordem a θ e λ desaparecem. Atendendo ao facto de a direcção de \vec{g}_g^ε ser oposta à direcção de r, a equação 2.45 reduz-se a :

$$\frac{2}{r_A} g_g^\varepsilon(r_A) + \frac{\partial g_g^\varepsilon}{\partial r} \Big|_A = 2\pi G\rho_0 \quad (2.46)$$

em que o segundo termo é o gradiente que procuramos.

A aceleraçao gravitacional \vec{g}_g^ε devida ao anel é facilmente determinada, uma vez que o seu campo é radial. Obtemos:

$$g_g^\varepsilon(r_A) = \frac{GM^\varepsilon}{(R + H_A)^2} \quad (2.47)$$

em que M^ε é dado por:

$$M^\varepsilon = \frac{4}{3} \pi \rho_0 \left((R + H_A)^3 - R^3 \right) \cong 4\pi \rho_0 R^2 H_A \quad (2.48)$$

O gradiente em A é assim igual a:

$$\frac{\partial g_g^\varepsilon}{\partial H} \Big|_A \cong 2\pi G\rho_0 - 8\pi G\rho_0 \frac{H_A}{R} \quad (2.49)$$

O primeiro termo é chamado gradiente do planalto de Bouguer. Pode ser obtido facilmente como o gradiente produzido por um planalto de densidade ρ_0 que se estende até ao infinito.

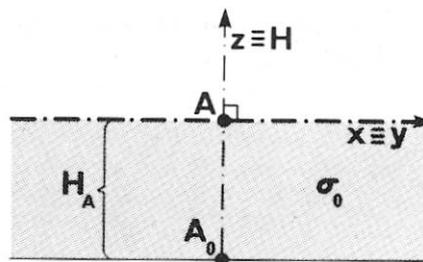


Figura 2.4 – Planalto de Bouguer.

Seleccionando um sistema local de coordenadas cartesianas como apresentado na figura 2.4, podemos escrever para a aceleração gravitacional do planalto:

$$\nabla \cdot \mathbf{g}_g^p = -2\pi G\rho_0 \quad (2.50)$$

e como o campo não depende nem de x nem de y , obtemos a expressão para o primeiro termo de 2.49. Logicamente o segundo termo em 2.49 é devido ao facto da superfície anelar ser simplesmente um planalto envolvendo o geóide. É assim chamado gradiente de curvatura. É curioso constatar que o gradiente de curvatura é bastante pequeno (0.00012 mGal/m por cada km de H) e, como tal é usualmente desprezável; a superfície anelar esférica produz assim na sua superfície um gradiente que para fins práticos, é equivalente ao planalto de Bouguer. Tendo determinado o gradiente da superfície anelar, devemos adicioná-lo ao gradiente ao ar-livre. Assumindo que a densidade ρ_0 da crosta é 2.67 g cm^{-3} obtemos o gradiente completo de Bouguer:

$$\frac{\partial g}{\partial H} \cong -0.3083 H + 0.1119 H = -0.1967 H \quad (\text{mGal/m}) \quad (2.51)$$

2.4 O Potencial Perturbador

A aplicação principal do campo gravítico normal é na obtenção do potencial T , designado por *potencial anómalo* ou *potencial perturbador*, é uma quantidade pequena, permitindo efectuar aproximações lineares da função $T(r,\theta,\lambda)$. O potencial perturbador T , num ponto $P(r,\theta,\lambda)$, é a diferença entre o potencial gravítico actual da Terra e o potencial normal associado ao elipsóide de revolução equipotencial em P , que é definido como:

$$T(\vec{r}_A) = W(\vec{r}_A) - U(\vec{r}_A) \quad (2.52)$$

A quantidade T descreve irregularidades locais e regionais de W . Dado que U modela a intensidade do actual campo gravítico W o potencial perturbador é bastante menor que qualquer um dos dois, e portanto qualquer aproximação utilizada no cálculo de T é bastante menos crítica que uma aproximação usada no cálculo / na validação dos outros dois potenciais. Devido à definição do campo gravítico normal, o potencial perturbador satisfaz a equação de Laplace no exterior da Terra. Esta afirmação pode ser facilmente provada substituindo U dado pela equação 2.1 na expressão 2.52 e separando W no potencial gravitacional e centrífugo:

$$T(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A) - \left(V^N(\vec{r}_A) + \Phi(\vec{r}_A) \right) = V(\vec{r}_A) - V^N(\vec{r}_A) \quad (2.53)$$

Desprezando a atmosfera obtemos: $\nabla^2 T(\vec{r}_A) = 0$ em todo o espaço exterior à Terra.

Como acabamos de verificar, esta função é harmónica no exterior da Terra, satisfazendo a equação de Laplace na condição de ser atribuído o mesmo valor da velocidade de rotação da Terra ao elipsóide de referência. Baseando-nos no desenvolvimento do potencial gravitacional em harmónicas esféricas (eq. 1.129), e no desenvolvimento em harmónicas esféricas do potencial normal (eq. 2.15), obtemos a representação em harmónicas esféricas da função T (Torge, 1989, p. 43):

$$T(r, \theta, \lambda) = W - U = \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.54)$$

onde $\Delta C_{nm} = C_{nm} - C'_{nm}$ e $\Delta S_{nm} = S_{nm} - S'_{nm}$ são as diferenças entre os coeficientes do potencial gravítico e do potencial normal. O termo de grau zero foi considerado como nulo, assumindo a igualdade entre a massa real da Terra e a massa do elipsóide de referência.

Separando este desenvolvimento nas suas componentes zonais e não zonais, obtemos:

$$\begin{aligned} T(r, \theta, \lambda) = & \frac{GM}{r} \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_n^N - J_n) P_n(\cos \theta) \\ & - \frac{GM}{r} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \theta) \\ & - \frac{GM}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Esta equação é muitas vezes escrita como:

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(r, \theta, \lambda) \quad (2.56)$$

em que T_n é tomado como sendo as componentes de T nas ordens n apropriadas e.g.:

$$T_5(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^5 \sum_{m=1}^5 (J_{5m} \cos m\lambda + K_{5m} \sin m\lambda) P_{5m}(\cos \theta) \quad (2.57)$$

De notar que para o campo normal oportunamente escolhido, J_2^N é igual a J_2 . Mais ainda, também, se o sistema de coordenadas esféricas coincide com o sistema geocêntrico natural desaparecem alguns coeficientes do potencial e obtemos em particular:

$$\begin{aligned}
 T(r, \theta, \lambda) = & \frac{GMa^2}{r^3} J_{2,2} \cos 2\lambda P_{2,2}(\cos \theta) \\
 & + \frac{GM}{r} \sum_{n=4,6,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_n^N - J_n) P_n(\cos \theta) \\
 & - \frac{GM}{r} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\cos \theta) \\
 & - \frac{GM}{r} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=1}^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

o que pode ser escrito como

$$T(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(r, \theta, \lambda) \tag{2.59}$$

tendo presente que T_2 contém só o termo J_{22} que é, em qualquer caso, muito pequeno visto que $I_1 = I_2$.

É interessante, agora verificarmos o que acontece ao potencial perturbador se a massa geradora do campo normal do elipsóide geocêntrico - designada por M^N - for utilizada incorrectamente. Neste caso a equação 2.56 e 2.57 têm um termo adicional:

$$\delta T = -\delta U = T_0 = \frac{GM}{r} - \frac{GM^N}{r} = -\frac{G}{r} (M^N - M) = -\frac{G}{r} \delta M \tag{2.60}$$

Como presentemente o conhecimento da precisão do valor de GM é melhor que $10^{-6} GM$, o erro correspondente T_0 causará um erro sistemático global nas anomalias da gravidade na ordem de 1 mGal, no máximo. Outros erros relativos comparáveis (na ordem de 10^{-6}) noutros parâmetros do campo normal, em ω , a e J_2 têm um efeito bem menor em T , que poderemos constatar pela equação 2.55.

Rescrevendo a equação (2.52) na forma $W = T + U$, verificamos que o campo gravítico (potencial W) é decomposto em duas componentes: um campo normal (potencial U) e um campo perturbador (potencial T). A primeira componente, expressa por U , é a sua componente principal e pode ser calculada por fórmulas exactas a partir dos parâmetros do elipsóide de referência; a segunda componente é irregular e bastante pequena, de tal forma que, na prática, são suficientes aproximações lineares para a sua determinação. Este princípio da decomposição e fórmulas lineares associadas é seguidamente exposto para quantidades relacionadas com o geóide e o elipsóide de referência.

2.5 Ondulação do geóide e anomalias da gravidade

Como indica a fig. 2.5, dado um ponto P no geóide podemos projectá-lo no elipsóide, segundo a normal a este, e obter um ponto Q. A distância PQ é, como já referimos, a **ondulação do geóide** em relação ao elipsóide e costuma designar-se pela letra N. Esta diferença, entre o geóide e o elipsóide, tem um valor absoluto inferior a 110 metros em qualquer lugar da Terra.

O vector gravidade em qualquer ponto P é $\mathbf{g} = (\text{grad } W)_P$ e podemos definir a gravidade normal em Q como $\boldsymbol{\gamma} = (\text{grad } U)_Q$, em que Q é o ponto na direcção normal ao elipsóide tal que $W(P) = U(Q) = W_0$. A diferença entre as normas g e γ destes vectores é a anomalia da gravidade:

$$\Delta g = g - \gamma \quad (2.61)$$

As equações (2.52) e (2.61) têm ambas a mesma estrutura, exprimindo quantidades do campo gravítico perturbador ($T, N, \Delta g$) em termos de diferenças entre o campo gravítico (W, g, Φ, Λ) e as suas componentes normais ou elipsoidais ($U, \gamma, \varphi, \lambda$). Importante é o facto, já mencionado, de que todas as relações entre quantidades do campo gravítico perturbador são lineares, obtidas a partir de desenvolvimento em série de Taylor truncadas após o termo linear. Estas expressões têm uma forma particularmente simples se o potencial normal U_0 (no elipsóide) fôr tomado como igual ao potencial gravítico W_0 (no geóide); esta suposição será assumida nos desenvolvimentos seguintes, ou seja $U_0 = W_0$.

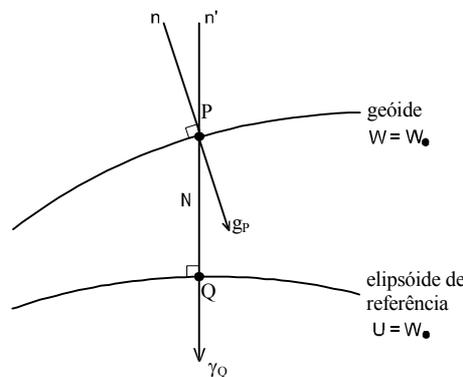


Figura 2.5 - O geóide e o elipsóide de referência (adaptado de PG, p. 83).

É evidente que no terreno, g_P tem de ser geralmente deduzido do valor de g_A observado na superfície da Terra. Por analogia, a gravidade observada no fundo oceânico tem de ser convertido para g_P aplicando a correcção apropriada. Existem várias espécies de anomalias da gravidade de acordo com o processo utilizado para reduzir a gravidade observada no geóide.

Seguidamente, vamos apresentar algumas relações importantes, do ponto de vista da abordagem de Stokes, entre o potencial perturbador e outras quantidades do campo gravítico. Desenvolvendo em série de Taylor o potencial normal até aos termos lineares

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n_E} \right)_Q N + \dots \quad (2.62)$$

em que n_E é a direcção normal ao elipsóide e N é a ondulação do geóide em P.

Dado que $T_P = W_P - U_P = W_P - U_Q - \gamma_Q N$ e $W_P - U_Q = 0$, sendo $\gamma_Q = \partial U / \partial n_E$, obtemos aproximadamente:

$$N = T_P / \gamma_Q \quad (2.63)$$

que é a conhecida **fórmula de Bruns** (PG, p. 85), assumindo que T é tomado sobre o geóide. Esta fórmula é utilizada extensivamente na Geodesia Física relacionando directamente a ondulação do geóide com o potencial perturbador.

Na dedução anterior, foi assumido que o campo gravítico normal é correctamente definido de modo a que o potencial normal U no elipsóide é igual ao potencial actual sobre o geóide. Conforme já foi referido (equação 2.60), um erro em δM no valor assumido para a massa da Terra não pode ser desprezado. Um erro δM em M^N causaria não só um erro no potencial perturbador T mas também γ_0 seria afectado de erro por:

$$\delta\gamma = -\frac{G\delta M}{r^2} = \frac{\delta U}{r} = -\frac{\delta T}{r} \quad (2.64)$$

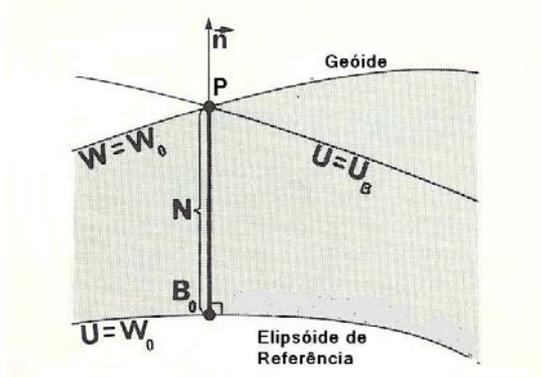


Figura 2.6 – Ilustração do Teorema de Bruns.

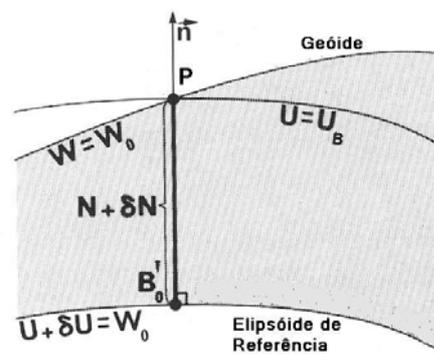


Figura 2.7 – Ilustração da influência do termo δM sobre a ondulação do geóide N .

Então a situação é ilustrada na figura 2.7. De acordo com o exposto, a equação 2.62 modifica-se para:

$$U_P = (W_0 - \delta U) - (\gamma_0 + \delta\gamma_0)(N + \delta N) \quad (2.65)$$

e a fórmula de Bruns será dada por:

$$N + \delta N = \frac{T + \delta T}{\gamma_0 + \delta \gamma_0} \quad (2.66)$$

em que

$$\delta N \approx \frac{\delta T}{\gamma_0} \left(1 + \frac{N}{r} \right) \approx \frac{\delta T}{\gamma_0} \quad (2.67)$$

e com um simples cálculo verificamos que um erro relativo de 10^{-6} no valor de GM tem como consequência um erro constante de 6 m no valor de δN . Isto pode ser interpretado como um erro na dimensão do elipsóide de referência tomado; sendo mais uma ilustração da relação entre quantidades geométricas e físicas.

Os desvios da vertical estão relacionados com a ondulação do geóide N pelas seguintes expressões:

$$\xi = -\frac{\partial N}{\partial s_\varphi} \quad \eta = -\frac{\partial N}{\partial s_\lambda} \quad (2.68)$$

introduzindo a fórmula de Bruns obtemos

$$\xi_P = -\frac{1}{r\gamma_Q} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad \eta_P = -\frac{1}{r\gamma_Q \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \quad (2.69)$$

em que r é a distância ao centro da Terra e φ e λ são a latitude e longitude geocêntricas, respectivamente (ou seja, coordenadas esféricas). De notar que a aproximação esférica é suficiente, na maioria dos casos, sendo equivalente a desprezar, relativamente ao achatamento, os termos de ordem superior à linear nos desenvolvimentos em série. O erro que se comete é da ordem de f (achatamento), ou seja, aproximadamente $1/297$.

Como a direcção da vertical é definida directamente pelas coordenadas geográficas latitude e longitude, as componentes ξ e η podem ser expressas por estas coordenadas. As coordenadas geográficas do ponto geoidal P, que definem a direcção da linha de prumo (n) ou o vector gravidade g , podem ser determinadas astronomicamente. Estas coordenadas são chamadas coordenadas astronómicas e são designadas por Φ e Λ . As coordenadas geodésicas representam a direcção da normal ao elipsóide n' e são designadas por ϕ e λ . Atendendo à figura 2.8b os desvios da vertical são dados por:

$$\begin{cases} \xi = \Phi - \phi \\ \eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \end{cases} \quad (2.70)$$

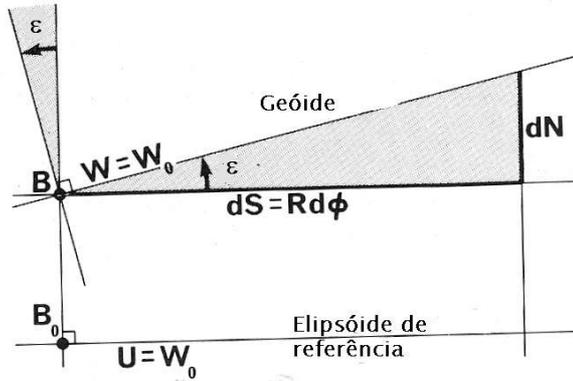


Figura 2.8a – Desvio da vertical e sua relação com a ondulação do geóide.

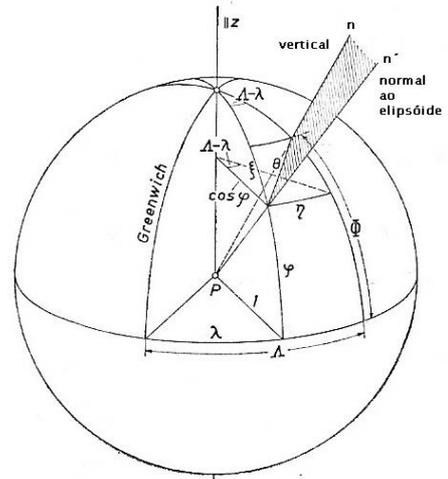


Figura 2.8b – Vector desvio da vertical.

A finalizar, vamos deduzir a relação entre o potencial perturbador e a anomalia da gravidade. Seja $g = -\partial W / \partial n$ e $\gamma = -\partial U / \partial n_E \approx \partial U / \partial n$, em que n é a direcção da linha de prumo. Então:

$$-\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_P = g_P - \gamma_P = \delta_P \quad (2.71)$$

que se designa por **perturbação da gravidade**, e, utilizando o desenvolvimento em série de Taylor para a gravidade normal:

$$\gamma_P = \gamma_Q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E}\right)_Q N + \dots \quad (2.72)$$

Substituindo na equação anterior e atendendo a 2.61 obtemos:

$$\Delta g = -\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_P + \frac{1}{\gamma_Q} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial n_E}\right)_Q T \quad (2.73)$$

Esta é a importante **equação fundamental da geodesia física** que em aproximação esférica fica reduzida a:

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T \quad (2.74)$$

Na dedução desta expressão é assumido que não existem massas no exterior do geóide, o que na realidade não é verdade. Também não efectuamos as observações gravimétricas directamente no geóide mas sim na superfície física da Terra. Na dedução do valor da gravidade ao geóide, o efeito das massas no exterior do geóide é removido por cálculo, de forma que podemos assumir que todas as massas são interiores ao geóide.

Neste caso, uma vez que a densidade ρ é zero no exterior do geóide, o potencial perturbador T é harmónico satisfaz a equação de Laplace $\Delta T=0$. Esta é evidentemente uma verdadeira equação diferencial às derivadas parciais e é suficiente, se complementada pela condição de fronteira representada pela fórmula fundamental da geodesia física, para a determinação de T em qualquer ponto no exterior do geóide. Assim a equação fundamental da geodesia física é uma condição de fronteira no elipsóide, imposta na resolução da equação de Laplace em ordem ao potencial perturbador, supondo que é conhecida a anomalia da gravidade. Deste modo a resolução do sistema

$$\begin{cases} \Delta T = 0 \\ -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r}T = \Delta g \end{cases} \quad (2.75)$$

permite determinar a função T , no exterior do elipsóide e na sua fronteira. A fórmula de Bruns (2.63) dá-nos a ondulação do geóide, com base no potencial perturbador calculado. **Podemos assim afirmar que o problema básico da geodesia física, a determinação do geóide a partir de medições gravimétricas é essencialmente um problema de fronteira, mais concretamente o terceiro problema de fronteira da teoria do potencial.**

Tendo em conta a condição de fronteira da Geodesia Física na hipótese esférica, obtemos o seguinte desenvolvimento em harmónicas esféricas para a anomalia da gravidade:

$$\Delta g(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.76)$$

e com a fórmula de Bruns, para a ondulação do geóide:

$$N(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\Delta C_{nm} \cos m\lambda + \Delta S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \quad (2.77)$$

na qual γ representa o valor da gravidade normal no ponto $P(r, \theta, \lambda)$.

2.6 Formulação de Stokes

Quase todas as observações do tipo geodésico dependem do campo da gravidade e de outros parâmetros e incógnitas entre os quais se encontra normalmente a posição do ponto onde se efectua a medição. Quando estas observações se realizam de forma exaustiva, com uma distância tão pequena entre elas, que se possa tomar o discreto pelo contínuo, então podemos resolver um problema de contorno. Ou seja, um problema no qual as incógnitas sejam o campo da gravidade e o contorno (superfície física da Terra). Por isso se diz que o objecto da Geodesia Física é a determinação da superfície física da Terra e o seu campo gravítico externo.

Para que esta determinação seja possível, a superfície física da Terra deverá ser uma superfície estável (eventualmente sujeita a variações seculares) próxima da superfície topográfica e de tal forma que sobre ela se conheça o campo da gravidade podendo-se conhecer completamente este campo no exterior.

A imposição de proximidade, entre a superfície física e a superfície topográfica, é entendida como tal que as oscilações entre ambas, no espaço e no tempo, são tais que produzem sobre a superfície física variações do campo menores que os erros de observação, ou menores que a precisão com que se pretenda conhecer o campo da gravidade, de tal modo que as hipóteses de que o campo não tenha massas no exterior da superfície física e seja estacionário, sejam fisicamente aceitáveis. Verificamos que quase todos estes pressupostos, são observados pelo geóide, com a diferença única de que as massa exteriores ao geóide não são desprezáveis, nem tão pouco, as observações da gravidade são realizadas sobre o geóide. Uma solução possível para este problema consiste na remoção das massas exteriores ao geóide. Esta é a solução clássica designada por Solução de Stokes.

O método de Stokes consiste na determinação do potencial perturbador T sobre e fora de uma esfera de raio $r = R$, sobre a qual se conhecem os valores de anomalia da gravidade Δg , supondo que T é uma função harmónica $\Delta T=0$ fora desta esfera, com a condição de contorno para T sobre esta, do tipo da expressão 2.75.

A abordagem clássica de Stokes para a determinação dos parâmetros do campo gravítico a partir de observações da magnitude da gravidade é baseada na solução do problema externo do valor de fronteira para o potencial perturbador T . Para mostrar como funciona esta abordagem, vamos começar por resolver o problema hipotético já enunciado no capítulo anterior. Se assumirmos (admitindo desde já a incorrecção) que não existem massa no exterior de geóide, então a primeira equação da expressão 2.75 ($\Delta T=0$) é satisfeita em todo o espaço exterior ao geóide.

Dado que o valor do potencial perturbador T no elipsóide não é nem conhecido nem observável, deverão ser usados diferentes valores de fronteira, ou seja deverá ser

formulado um problema do valor de fronteira diferente. É aqui que é usada a equação fundamental da geodesia física (2.73), que numa aproximação esférica é dada por (ver eq. 2.74):

$$\Delta g = -\frac{2}{R}T - \frac{\partial T}{\partial H} \quad (2.78)$$

com R designando o raio médio da Terra. Esta equação fornece os valores de fronteira, e pode ser usada, em conjunção com ($\Delta T=0$), como um problema do valor de fronteira de tipo misto envolvendo a função T e a sua derivada $\partial T/\partial H$, ambas referidas ao geóide. Claramente, os valores de fronteira Δg podem ser obtidos dos valores observados g e H, através de alguns passos simples e podem ser tratados como observáveis. Na literatura, este problema é geralmente referido como **problema geodésico do valor de fronteira**.

A solução deste problema é resolvido/investigado mais expeditamente na forma de séries de harmónicas elipsóidicas:

$$T(u, \Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n q_{nm}(u) [\Delta C_{nm}(T) \cos m\lambda + \Delta S_{nm}(T) \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \Theta) \quad (2.79)$$

Desenvolvendo o valor de fronteira Δg considerando, de momento, sobre o elipsóide, em série de harmónicas elipsóidicas, obtemos:

$$\Delta g(\Theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\Delta C_{nm}(\Delta g) \cos m\lambda_A + \Delta S_{nm}(\Delta g) \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \Theta_A) \quad (2.80)$$

em que os coeficientes são dados por (cf. 1.118, 1.119 e 1.95 e 1.96):

$$\begin{cases} \Delta C_{nm}(\Delta g) \\ \Delta S_{nm}(\Delta g) \end{cases} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2n+1}{2\pi} \iint \Delta g(\Theta, \lambda) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases} P_{nm}(\cos \Theta) dS \quad (2.81)$$

De notar que para $m = 0$, 2π é substituído por 4π ; a integração é tomada sobre o elipsóide e dv é de novo o elemento de ângulo sólido. Neste elipsóide as funções radiais são iguais a 1; com a excepção dos valores dos coeficientes, as séries (2.79) tomadas no elipsóide tornam-se idênticas às (2.80).

Para estabelecer a relação entre os dois conjuntos de coeficientes, de modo que a solução para o problema de fronteira geodésico possa ser expresso em termos do valor de fronteira Δg , as equações 2.79 e 2.80 são introduzidas na equação 2.78, e obtemos:

$$\begin{cases} \Delta C_{nm}(\Delta g) \\ \Delta S_{nm}(\Delta g) \end{cases} = \frac{2}{R} \begin{cases} \Delta C_{nm}(T) \\ \Delta S_{nm}(T) \end{cases} - \frac{\partial q_{nm}(u)}{\partial H} \begin{cases} \Delta C_{nm}(T) \\ \Delta S_{nm}(T) \end{cases}, \quad n = 0, \dots, \infty; m = 0, \dots, n \quad (2.82)$$

De novo, para a precisão do achatamento, a derivada do termo radial elipsóidico é igual à do termo radial esférico, i.e:

$$\frac{\partial q_{nm}(u)}{\partial H} \approx \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} = - \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \frac{(n+1)}{r} \quad (2.83)$$

e sobre o elipsóide ou geóide, temos em particular:

$$\frac{\partial q_{nm}(u)}{\partial H} \approx - \frac{(n+1)}{R} \quad (2.84)$$

Assim a desejada relação é aproximadamente:

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{nm}(T) \\ \Delta S_{nm}(T) \end{Bmatrix} \approx \frac{R}{n-1} \begin{Bmatrix} \Delta C_{nm}(\Delta g) \\ \Delta S_{nm}(\Delta g) \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

Claramente, para $n=1$ a relação não é definida. Se for considerado um elipsóide de referência apropriadamente orientado, então os coeficientes para $n = 1$, i.e. $\Delta C_{1,0}(T)$, $\Delta C_{1,1}(T)$, $\Delta S_{1,0}(T)$ e $\Delta S_{1,1}(T)$, são todos nulos como já foi visto na secção 1.9.

Assim para um elipsóide geocêntrico ($u = b$), podemos escrever:

$$T(\Theta, \lambda) = -RA_0(\Delta g) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \sum_{m=0}^n [\Delta C_{nm}(\Delta g) \cos m\lambda_A + \Delta S_{nm}(\Delta g) \sin m\lambda] P_{nm}(\cos \Theta_A) \quad (2.86)$$

em que, para a precisão do achatamento $\cos \Theta$ pode ser substituído por $\sin \varphi$. O termo de ordem zero:

$$T_0 = -R C_0(\Delta g) = - \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g dS = -R \Delta g_0 \quad (2.87)$$

é o termo já deduzido no parágrafo 2.4 - erro constante em T devido à utilização imprópria da massa total M^N do elipsóide de referência necessária ao potencial normal. A quantidade Δg_0 designa o valor médio global das anomalias da gravidade. Esta média global pode ser usada para testar a qualidade do valor da massa da Terra. Combinando a equação 2.87 e a 2.60 obtemos:

$$\Delta g_0 = \frac{G\delta M}{R^2} \quad (2.88)$$

Assumindo que $\delta M = 0$ e usando a notação de 2.55, podemos finalmente escrever:

$$T(\varphi, \lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R}{n-1} \Delta g_n(\varphi, \lambda) \quad (2.89)$$

Como a soluçao não pode conter as harmônicas de primeira ordem estas são chamadas as harmônicas proibidas. Esta é outra forma de dizer que a soluçao existe unicamente para um elipsóide geocêntrico apropriadamente escolhido.

Esta soluçao do potencial perturbador em série (válido para um elipsóide de referência geocêntrico com massa igual à Terra) pode agora ser convertido num forma aproximada. Para tal, trocamos o sinal de integraçao de superfície (na expressao para ΔC_{nm} ΔS_{nm}) com o somatório para obter:

$$\begin{aligned} T(\varphi, \lambda) = & \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g(\varphi, \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k(2n+1)}{n-1} \\ & \times \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\cos m\lambda_A \cos m\lambda + \sin m\lambda_A \sin m\lambda) \\ & \times P_{nm}(\sin \varphi_A) P_{nm}(\sin \varphi) dS \quad k = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 2 & m > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.90)$$

em que a integraçao é tomada sobre os argumentos φ, λ no elipsóide. Usando a equaçao 1.123, obtemos:

$$T(\varphi_A, \lambda_A) = \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g(\varphi, \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) dS \quad (2.91)$$

em que ψ é a distância angular entre (φ_A, λ_A) e (φ, λ) . Em 2.91 a série é função unicamente de ψ . Uma forma aproximada da mesma é dada por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) = S(\psi) = & 1 + \frac{1}{\sin(\psi/2)} - 6 \sin(\psi/2) - 5 \cos \psi \\ & - 3 \cos \psi \ln(\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Esta função conhecida como **função de Stokes**, e a sua forma apresentada na fig. 2.9. Substituindo esta expressao na equaçao 2.91, obtemos finalmente a soluçao aproximada para o hipotético problema do valor de fronteira na seguinte forma:

$$T(\varphi_A, \lambda_A) = \frac{R}{4\pi} \iint \Delta g(\varphi, \lambda) S(\psi) dS \quad (2.93)$$

chamado **integral de Stokes**. Do ponto de vista da soluçao do problema do valor de fronteira, a função de Stokes é simplesmente uma função de Green. Pode ser considerado como um núcleo de integraçao (homogéneo e isótropo) o integral de Stokes é assim uma

solução do tipo Green para o problema de fronteira. Mesmo pensando que Δg é um núcleo (função dos dois pontos: um sobre o elipsóide e outro sobre o geóide) o valor de fronteira que ele representa deve ser considerado como sendo formulado no geóide para que a anomalia da gravidade represente um valor de fronteira apropriado em termos de T. Só para frisar/reiterar, a precisão do integral de Stokes é da ordem de f (ou e^2) i.e. 0.3% devido às várias aproximações efectuadas. Um problema mais sério diz respeito à presunção básica e subjacente à definição do problema do valor de fronteira: nomeadamente, a hipótese de não existirem massas no exterior do geóide. Evidentemente, que o problema do valor de fronteira foi incorrectamente colocado e pode ser resolvido unicamente por aproximação à custa da introdução mais pressupostos. Antes de nos determos com as formas e meios de contabilizar matematicamente as massas redundantes sob o geóide, vamos investigar outros parâmetros do campo: nomeadamente, a ondulação do geóide e os desvios da vertical.

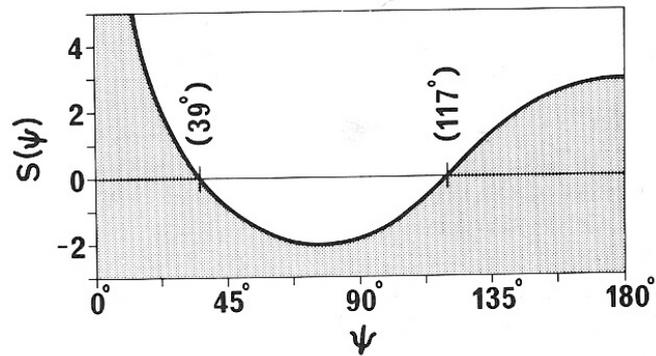


Figura 2.9- Função de Stokes.

Se assumirmos que o problema das massas redundantes é eliminado, por uma correcção apropriada ao valor de Δg , então o potencial perturbador dado pela equação 2.93 pode ser transformado na ondulação do geóide simplesmente através da fórmula de Bruns:

$$N(\varphi_A, \lambda_A) = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g(\varphi, \lambda) S(\psi) dS \quad (2.94)$$

em que γ_0 pode ser substituído pela gravidade média G sem diminuição de precisão. Esta fórmula é conhecida por **fórmula de Stokes**, e é a fórmula mais importante deste capítulo. É facilmente demonstrado que se o elipsóide de referência geocêntrico tem uma massa diferente de massa da Terra, então a ondulação do geóide torna-se:

$$N + N_0 = -\frac{G\delta M}{R\gamma_0} \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g(\varphi, \lambda) S(\psi) dS - \frac{R\Delta g_0}{\gamma_0} \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint \Delta g(\varphi, \lambda) S(\psi) dS \quad (2.95)$$

De notar que cada mGal de erro no valor de Δg_0 provoca um erro constante de 6.4m no valor da ondulação do geóide.

O desvio da vertical foi anteriormente definido como o ângulo especial entre a vertical do lugar e a normal ao elipsóide sendo este ângulo usualmente decomposto em duas componentes: norte-sul e este-oeste. Se designarmos por ε o desvio da vertical num determinado ponto da superfície da Terra então:

$$-dN = \varepsilon ds \quad (2.96)$$

em que N é a ondulação do geóide e s um comprimento medido sobre o elipsóide (ver fig. 2.8a). Segundo a direcção norte-sul temos:

$$\varepsilon = \xi = -\frac{dN}{ds} = -\frac{\partial N}{\partial s_\phi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi} \quad (2.97)$$

Segundo a direcção este-oeste temos:

$$\varepsilon = \eta = -\frac{dN}{ds} = -\frac{\partial N}{\partial s_\lambda} = -\frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} \quad (2.98)$$

Estas duas expressões relacionam as ondulações do geóide N com as componentes do desvio da vertical- Como N é dado pelo integral de Stokes vamos diferenciar a fórmula de Stokes em ordem a ϕ e λ , obtendo-se:

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{R}{4\pi G} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \phi} \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{R}{4\pi G} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (2.100)$$

como

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \phi} = \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad e \quad \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.101)$$

e como

$$\frac{\partial \psi}{\partial \phi} = -\cos \alpha \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \phi \cos \alpha \quad (2.102)$$

então:

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{R}{4\pi G} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \cos \alpha \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda} = \frac{R}{4\pi G} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \sin \alpha \cos \phi \cos \phi' d\phi' d\lambda' \quad (2.104)$$

Atendendo às expressões 2.97 e 2.98, obtemos as designadas fórmulas de Veining-Meinez que nos estabelecem uma relação directa entre as componentes do desvio da vertical e as anomalias da gravidade:

$$\xi = \frac{1}{4\pi G} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \cos \alpha d\phi' d\lambda' \quad (2.105)$$

$$\eta = \frac{1}{4\pi G} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\phi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g(\phi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \psi} \sin \alpha d\phi' d\lambda' \quad (2.106)$$

2.7 Sistema altimétrico

Os sistemas altimétricos de referência são, por construção, sistemas locais baseados na determinação do nível médio do mar num ponto estação (marégrafos) a partir dos qual se desenvolvem linhas de nivelamento por determinação da diferença de cotas entre cada dois pontos. O datum altimétrico é deste modo definido pela superfície oceânica média num determinado período temporal.

Considerando que essa superfície média corresponde ao geóide, o que sabemos não é exactamente verdadeiro, a altitude ortométrica H de um ponto P qualquer (Fig. 2.10) é definida como a distância entre o ponto P e o geóide (de potencial W_0) medido ao longo da linha de prumo. Relembrando a anterior definição de ondulação do geóide e introduzindo a noção de altitude elipsóidica como a distância entre o ponto P e o elipsóide medida segundo a normal ao elipsóide temos que (PG, p. 166):

$$h = H + N \quad (2.107)$$

sendo

$$H = \frac{W_0 - W_P}{\bar{g}} \quad \text{e} \quad \bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^P g dH \quad (2.108)$$

em que \bar{g} é o valor médio da gravidade ao longo da linha de prumo. O cálculo deste valor requer a formulação de hipóteses sobre a densidade das massas sobre o geóide. O resultado da integração desta equação é (PG, p. 167):

$$\bar{g} = g - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial h} + 2\pi G\rho \right) * H \quad (2.109)$$

com g em Gal e H em metros.

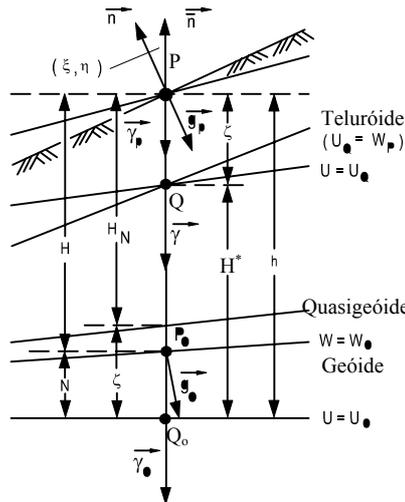


Figura 2.10 - Sistema altimétrico.

Por esta razão, dependência da densidade das massas, Molodensky *et al.* (1962) realizaram vários trabalhos no sentido de obviar a esta dificuldade, tendo, em 1945, demonstrado que a superfície física da Terra pode ser determinada unicamente a partir de medições geodésicas, sem o recurso ao conhecimento da densidade da crosta terrestre. A sua teoria requer o abandono do conceito de geóide, tornando-se a formulação matemática do problema mais difícil e abstracta. Os métodos gravimétricos e astrogeodésicos podem ser modificados no sentido de serem integrados nesta teoria referindo-se neste caso as anomalias da gravidade e os desvios da vertical à superfície física da Terra e não ao nível médio do mar, dando a ondulação do geóide o lugar à *anomalia de altitude*.

Segundo Molodensky *et al.* (1962) se for adoptado o mesmo princípio para o estabelecimento de um sistema altimétrico baseado no elipsóide no qual se determina um ponto Q para o qual o seu potencial normal U_Q seja igual ao potencial gravítico W_P no ponto P, então a altitude elipsóidica é decomposta também em dois termos designados por altitude normal H^* e anomalia de altitude ζ em que (Torge, 1989):

$$H^* = \frac{W_0 - W_P}{\bar{\gamma}} \quad e \quad \zeta = \frac{W_P - U_P}{\gamma_Q} \quad (2.110)$$

A vantagem deste sistema altimétrico reside no facto de que a altitude não depende da densidade das massas sob a superfície topográfica. As linhas isométricas da anomalia de altitude ζ são iguais às linhas de nível do geóide sobre os oceanos (porque $N = \zeta$) e estão muito próximas do geóide na parte emersa da Terra. Esta superfície foi designada por *quasi-geóide* por Molodensky. Contudo, o quasi-geóide não é uma superfície de nível e não tem qualquer significado físico.

A teoria de Molodensky permite a determinação da superfície física da Terra por intermédio da anomalia da altitude ζ em função das anomalias do campo gravítico observadas nessa superfície. A relação geométrica entre teoria de Stokes e de Molodensky é apresentada na Fig. 2.4 sendo a sua formulação analítica definida por (PG, p. 326):

$$N + H = \zeta + H^* \quad (2.111)$$

Isto significa que a diferença entre a ondulação do geóide e a anomalia de altitude ζ é igual à diferença entre a altitude ortométrica e a altitude normal. Uma vez que ζ é a ondulação do quasi-geóide, esta diferença é também a diferença entre o geóide e o quasi-geóide.

A relação numérica entre o geóide e quasi-geóide é obtida facilmente a partir da relação entre a altitude elipsóidica de um mesmo ponto nos dois sistemas de referência (PG, p. 326):

$$N = \zeta + \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} \cdot H \quad (2.112)$$

em que \bar{g} é o valor médio da gravidade entre o ponto e o geóide ao longo da linha de prumo e $\bar{\gamma}$ é a gravidade normal média ao longo da normal ao elipsóide entre o elipsóide e o teluróide. Sabendo que $\bar{g} - \bar{\gamma}$ é aproximadamente igual à anomalia de Bouguer e considerando que $\bar{\gamma} = 981$ mGal, então a diferença entre o geóide e o quasi-geóide pode ser dada por (*ibid*, eq. 8-103)

$$\zeta - N \approx -\Delta g_B \cdot H \quad (2.113)$$

com a anomalia de Bouguer em Gal e H em quilómetros.

Como a anomalia de Bouguer é sistematicamente negativa nos continentes, esta expressão indica que a anomalia de altitude é sempre superior à ondulação do geóide em terra. Nos oceanos o geóide e o quasi-geóide são coincidentes. O aspecto teórico mais importante desta teoria é que o quasi-geóide pode ser determinado sem qualquer consideração sobre a densidade das massas o que não se verifica para o geóide. O evitar destes pressupostos foi a principal motivação de Molodensky.

No caso de regiões oceânicas não se coloca o problema da distinção entre geóide e quasi-geóide uma vez que as duas superfícies são coincidentes.

Capítulo 3

Reduções gravimétricas

3.1 Introdução

Na geodesia física clássica, a determinação dos efeitos de terreno sobre o valor da gravidade medido surge como um requisito obrigatório, face às exigências teóricas da abordagem de Stokes, na qual é pressuposto que o geóide é uma superfície de fronteira. A solução deste problema de fronteira no qual a resolução da equação fundamental da geodesia física é sujeita à condição de que o potencial perturbador é uma função harmónica no exterior dessa fronteira, pressupõe que não existem quaisquer massas no seu exterior. Assumindo Stokes que a fronteira é precisamente o geóide, a aplicação prática da sua teoria ficou dependente do cálculo dos efeitos do terreno no valor da gravidade medida e dos efeitos colaterais que estas correcções têm sobre a ondulação do geóide (Heiskanen and Moritz ,1967).

O comportamento local do actual campo gravítico reflecte a distribuição local e regional irregular das massas. A irregularidade mais importante resulta da própria forma irregular da superfície terrestre, a um nível inferior pela isostasia. Por isso estes dois efeitos serão objecto de estudo neste capítulo.

Como sabemos a crosta terrestre está num estado de equilíbrio isostático em quase toda a superfície terrestre. Isto significa que o geóide, sendo uma superfície equipotencial, não deverá ter a sua forma muito afectada pela presença de uma superfície topográfica irregular; o efeito de massas redundantes acima do geóide é compensado pela menor

densidade das massas que lhe estão subjacentes. Uma situação inversa ocorre nos oceanos, aqui a deficiência de massas superficiais é compensada por uma maior densidade das massas sob o geóide. A forma das superfícies equipotenciais e linhas de prumo é mostrada esquematicamente na figura 3.1.

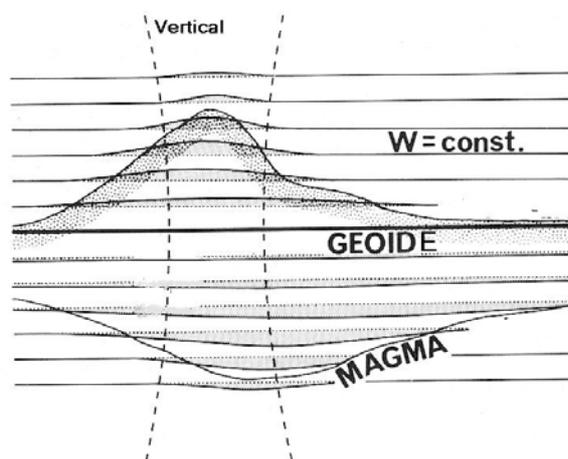


Figura 3.1 – Efeitos topográficos e isostáticos.

Por outro lado as observações gravimétricas realizadas na superfície topográfica são afectadas fortemente pela topografia e o seu efeito é tanto maior quanto maior a distância ao geóide (altitude da estação). Evidentemente o terreno também exerce um efeito no gradiente vertical. De facto comparando com um modelo teórico de gradiente vertical da gravidade o actual gradiente vertical da gravidade na Terra é sempre maior em valor absoluto na presença de relevo topográfico que em terreno plano. Na figura 3.2 é apresentado esquematicamente este efeito em que sobre o ponto A é exercida sempre uma atracção no sentido ascendente da contagem das altitudes. Consequentemente a presença da topografia provoca uma diminuição do valor da gravidade medido. As superfícies equipotenciais tornam-se mais afastadas na presença de topografia tal como ilustra a figura 3.1.

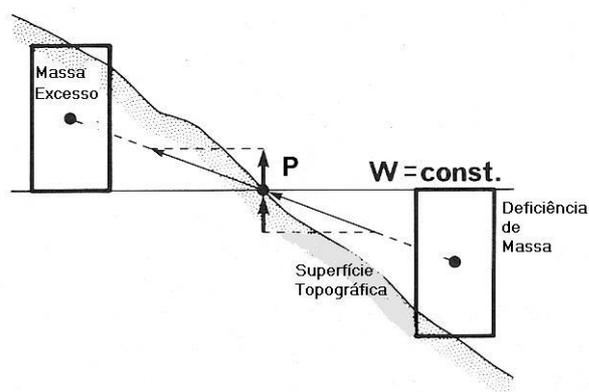


Figura 3.2 – Efeito da topografia sobre o valor da gravidade observado.

3.2 Aspectos teóricos da Correção de Terreno

O efeito descrito anteriormente é determinado expeditamente através do efeito topográfico observado na gravidade. Como a topografia é geralmente irregular, o seu efeito não pode ser expresso numa forma analítica, sendo necessário recorrer à integração numérica sobre a superfície da Terra. Com este objectivo, a superfície da Terra é dividida em compartimentos, a contribuição da topografia no interior de cada célula é acedido individualmente, e então as contribuições de todos os compartimentos são somados para dar o efeito total.

Do ponto de vista do processo de cálculo, a superfície topográfica é convertida num modelo digital de terreno, sob a forma de valores pontuais ou médios, e subdividida em sectores rectangulares ou, de preferência, quadrangulares (Fig. 3.3). O efeito de cada sector sobre um determinado ponto é calculado com recurso às fórmulas exactas do campo gravítico. Sabendo que a informação detalhada do modelo digital do terreno só será necessária na vizinhança da estação, considera-se uma terceira superfície, menos detalhada, para efeitos de cálculo dos efeitos do modelo em zonas afastadas. Designando por MDT_1 o modelo digital de terreno detalhado, o modelo menos detalhado (MDT_2) e o modelo de referência (MDT_{ref}) são calculados tomando simplesmente as médias dos sectores do MDT_1 .

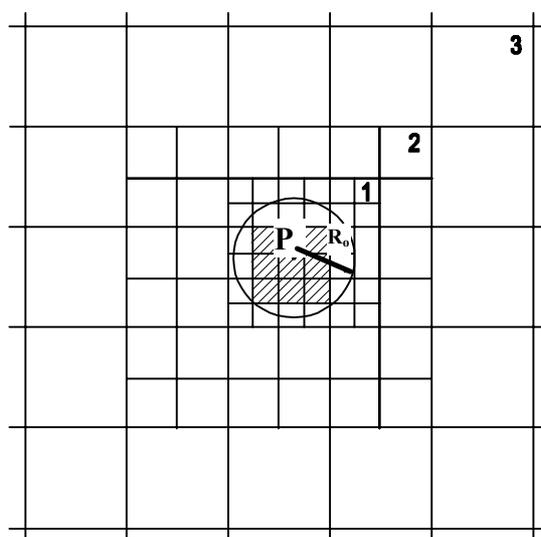


Figura 3.3 - Sectorização no cálculo dos efeitos de terreno (adaptado de Forsberg and Tscherning, 1981).

Os efeitos do modelo de terreno calculam-se integrando prismas rectangulares, utilizando o MDT_1 até uma certa distância R_0 e, a partir daí, até uma distância R_1 com o modelo MDT_2 (Fig. 3.3). A utilização de um MDT com menos resolução, a partir de uma certa distância, tem como objectivo a diminuição do tempo de cálculo.

Se o modelo detalhado não é suficientemente fino, pode-se densificar a grelha em torno da estação, usando interpolação “spline”. Esta solução pode constituir um problema, por serem diferentes a altura da estação e a altura calculada por interpolação. Temos então duas soluções: modificar o modelo ou modificar a estação. A experiência recomenda modificar o modelo de terreno, para que passe forçosamente pela estação, quando os cálculos se efectuem sobre a anomalia da gravidade (Forsberg, 1984a).

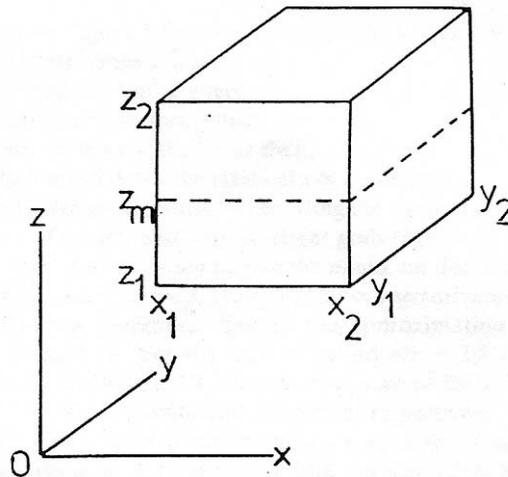


Figura 3.4 – Prisma rectangular

As fórmulas utilizadas para calcular o efeito de um prisma ou sector rectangular (como o da Figura 3.4), sobre as principais quantidades gravimétricas, são apresentadas em Forsberg and Tscherning (1981). Apresentamos aquelas que consideramos mais relevantes em particular o cálculo dos efeitos de cada prisma no valor da gravidade e no valor da ondulação do geóide.

Para a componente vertical da gravidade (*ibid*, eq. 14):

$$\delta g_m = -\frac{\partial \Gamma_m}{\partial z} = G\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{r^3} dx dy dz \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (3.1)$$

em que G é a constante de gravitação e ρ a densidade constante de massa do prisma. A integração desta fórmula dá (*ibid*, eq. 18):

$$\delta g_m = G\rho \left\{ \left[x \ln \frac{y+r_{z_2}}{y+r_{z_1}} + y \ln \frac{x+r_{z_2}}{x+r_{z_1}} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]^{y_2} - \left[z \arctan \frac{xy}{zr} \right]_{x_1}^{x_2} \left[y_1 \right]^{y_2} \left[z_1 \right]^{z_2} \right\} \quad (3.2)$$

De notar que os termos entre parentesis rectos se anulam com o aumento do valor de a . Assim não é necessário efectuar a integração para além de algumas dezenas de quilómetros. De facto, a fórmula anterior é válida unicamente quando não temos de entrar em consideração com a curvatura da Terra. Adicionalmente, verifica-se que se ΔH é zero em todo o lado ; i.e. se a superfície da Terra é plana, o efeito δg^T é também igual a zero, tal como esperávamos. Em regiões montanhosas o efeito δg^T pode ser superior a 100 mGal. O efeito topográfico pode assim/deste modo ser muito importante no valor da gravidade observado.

Se a altura do prisma é pequena relativamente à sua base, pode-se efectuar uma aproximação usando a altitude média dos z . Estas fórmulas são denominadas fórmulas condensadas (*ibid*, eq. 16):

$$\delta g'_m = G\kappa \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{z_m}{r^3} dx dy \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_m^2} \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (3.3)$$

em que $\kappa = \rho (z_2 - z_1)$ é a densidade superficial de massa. O cálculo deste integral dá:

$$\delta g'_m = -G\kappa z_m \left\| \left\| \arctan \frac{xy}{z_m r} \right\|_{x_1}^{x_2} \right\|_{y_1}^{y_2} \quad (3.4)$$

A fórmula exacta para a ondulação do geóide foi introduzida por MacMillan em 1958 (ver Forsberg and Tscherning, 1981), e contém um total de 36 termos. A diferença entre a utilização desta fórmula e a fórmula aproximada é da ordem dos milímetros, para altitudes superiores a 1000 ou 2000 metros. A fórmula condensada para o potencial é dada por (*ibid*, eq. 23):

$$T'_m = G\kappa \left\| \left\| x \ln(y+r) + y \ln(x+r) - z_m \arctan \frac{xy}{z_m r} \right\|_{x_1}^{x_2} \right\|_{y_1}^{y_2} \quad (3.5)$$

A ondulação do geóide é obtida a partir desta expressão por simples aplicação da fórmula de Bruns (eq. 2.63). Em Forsberg and Tscherning (1981) podem-se encontrar: comentários sobre o erro cometido na utilização das fórmulas condensadas; técnicas para ter em conta a curvatura da Terra; fórmulas que permitem calcular o efeito do RTM sobre os coeficientes do potencial, no caso de se usar a colocação. Estes autores concluíram que todos estes efeitos são desprezáveis para pequenas regiões (como é o caso da nossa região de trabalho).

3.3 Redução de Bouguer

O objectivo da redução topográfica é a remoção do efeito das massas topográficas sobre o geóide no valor observado da gravidade. Esta redução é dividida em duas componentes: redução de Bouguer e correcção de terreno. O objectivo da redução de Bouguer é a remoção completa das massas topográficas sobre o geóide e o cálculo desse efeito sobre o valor da gravidade observado, a correcção de terreno tem como objectivo o refinamento da correcção de Bouguer anteriormente realizada mediante a utilização de um modelo digital de terreno e do cálculo do efeito desse modelo sobre os valores observados.

O Planalto de Bouguer. Suponhamos que a área circundante de uma estação gravimétrica P é completamente plana e horizontal, e suponhamos que as massas entre o geóide e essa estação tem a densidade constante ρ . Então a atracção A_B , deste designado “planalto de Bouguer”, é obtido do gradiente de Bouguer (equação 2.49, capítulo 2), e é dado pela expressão:

$$A_B = 2\pi G\rho H \quad (3.6)$$

Fazendo $\rho=2.67 \text{ g cm}^{-3}$ obtemos:

$$A_B = 0.1119 H \text{ mGal} \quad (\text{com } H \text{ em metro}) \quad (3.7)$$

O processo combinado de aplicar a redução ao ar livre e remover as massas topográficas é designado “redução de Bouguer completa”. Dela resulta a gravidade de Bouguer sobre o geóide:

$$g_B = g - A_B + F \quad (3.8)$$

ou

$$g_B = g + 0.1967 H \text{ (com } H \text{ em metro)} \quad (3.9)$$

Como g_B é o valor da gravidade sobre o geóide as **anomalias de Bouguer** são calculadas como:

$$\Delta g_B = g_B - \gamma \quad (3.10)$$

Correcção de Terreno. Este procedimento simples pode ser refinado tendo em conta os desvios da actual topografia a partir do planalto de Bouguer. Isto é chamado “correcção de Terreno”. Atendendo à figura 3.2, a massa que está a mais e que atrai para cima, é removida, fazendo aumentar o valor de g em P, a massa inexistente Δm é acrescentada fazendo g aumentar novamente em P. A correcção de terreno é assim sempre positiva. A determinação prática é feita por intermédio da equação 3.2.

$$\text{Para uma massa que está a mais } H > H_P: \quad z_1 = 0 \text{ e } z_2 = H - H_P \quad (3.11)$$

Para uma massa que está a menos $H < H_P$: $z_1 = 0$ e $z_2 = H_P - H$ (3.12)

A correcção de terreno no ponto P é então dada como a soma da contribuição de todos os paralelogramos contidos no círculo definido pela distância R_2 (ver fig. 3.3). Adicionando a correcção de terreno A_t ao valor da gravidade de Bouguer obtemos a gravidade de Bouguer refinada:

$$g_B = g - A_B + F + A_t \quad (3.13)$$

e a anomalia de Bouguer é dada por:

$$\Delta g^B = g_B - \gamma_0 \quad (3.14)$$

em que g_B é o valor da gravidade de Bouguer (da expressão (3.13) observado no ponto P na superfície da Terra e γ_0 é a gravidade normal no elipsóide (calculado na latitude de P). A anomalia de Bouguer apresenta uma considerável correlação negativa regional com a topografia, indicando que a redução da gravidade ao geóide pelo gradiente de Bouguer é muito pequeno sob as montanhas. Por outro lado, isto significa que o gradiente de Bouguer é muito pequeno em valor absoluto. Este facto será explicado na próxima secção.

Tal como foi estabelecido no início desta secção, a forma do geóide não deverá ser muito influenciada pela topografia. Assim, a correlação entre as anomalias da gravidade no geóide e a topografia é contrária ao esperado, quando a situação é tomada do ponto de vista isostático tais anomalias indicam uma distribuição de massas desajustada, que por outro lado, viola o princípio físico da isostasia. Isto porque as considerações e deduções efectuadas nesta secção são válidas unicamente sobre e imediatamente debaixo da superfície topográfica. Quando é estudado o comportamento do campo gravítico ao nível do geóide a compensação deve ser feita para o efeito da isostasia que ainda não foi considerado.

O efeito da isostasia é diminuir o valor da gravidade no geóide sob as montanhas e aumentar esse valor nos oceanos comparando o valor que tomaria na ausência de isostasia. Isto significa que a isostasia tende a diminuir o valor absoluto do gradiente vertical da gravidade do valor ar-livre ao valor Poincaré-Pray. Este efeito pode ser calculado de forma similar ao usado no efeito topográfico. Considerando que é postulado a distribuição de densidade da crosta, a crosta pode ser de novo dividida em compartimentos. O efeito de cada compartimento é então calculado separadamente, e o efeito total é obtido por integração numérica área apropriada.

3.4 Isostasia

Podemos ser levados a pensar que as massas topográficas estão simplesmente sobrepostas numa crosta essencialmente homogénea. Se assim fosse, a redução de Bouguer removeria as irregularidades médias do campo gravítico, e assim as anomalias da

gravidade de Bouguer seriam pequenas, tomando valores em torno de zero. No entanto, isso não se verifica. As anomalias de Bouguer em regiões montanhosas são sistematicamente negativas e podem tomar valores elevados, aumentando em média cerca de 100 mGal por 1000 metros de elevação. A única explicação possível é que há uma certa deficiência de massas sob as montanhas o que faria com que o efeito das massas topográficas sobre os valores medidos da gravidade sofreriam uma certa compensação. Existe um efeito similar no desvio da vertical. O desvio da vertical observado (astrogeodésico) é inferior ao desvio que as massas topográficas visíveis sugerem. Foram desenvolvidas algumas teorias para justificar esta compensação que apresentamos seguidamente.

De acordo com o conhecimento actual, a crosta terrestre é composta por uma camada de material solidificado de densidade média igual a 2.67 g cm^{-3} , flutuando numa matéria densa ($\rho = 3.27 \text{ g cm}^{-3}$) que é enfraquecida por uma fusão parcial resultante da pressão e do calor. É difícil distinguir a localização exacta da separação entre o fim da crosta sólida e o início do manto enfraquecido. As duas fontes de informação sísmológica, e reológica, não são distinguidas a níveis diferentes. Existe uma tendência para usar o termo crosta para definir a camada até aos 10 a 30 primeiros km (em zonas continentais), e para referir as camadas sólidas como litosfera. A espessura da litosfera varia entre 10 e 80 km, valor determinado por investigações reológicas. A parte superior do manto, até uma profundidade de 300 a 400 Km, é chamada astenosfera - fig 3.5.

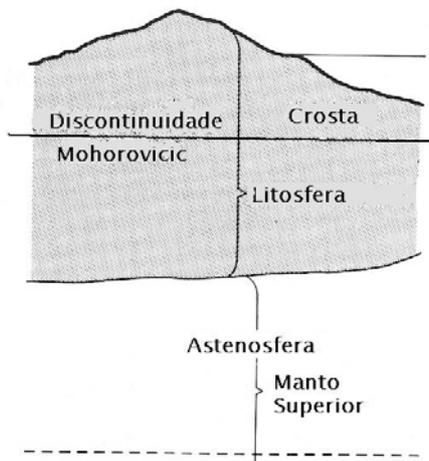


Figura 3.5 – Estrutura da superfície da Terra.

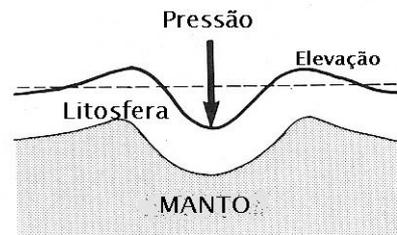


Figura 3.6 – Modelo esquemático da isostasia.

Estas camadas estão sujeitas a pressões provenientes de diferentes fenómenos que ocorrem na superfície da Terra. Qualquer pressão produz deformação vertical e regional. Deverá ser claro que uma pressão num ponto de superfície da Terra causará a cedência da crosta não unicamente sobre o ponto de pressão mas também na área circundante devido à resistência da litosfera. A subsidência será máxima na região imediatamente sob a pressão e diminuirá gradualmente com a distância à força. Para manter o mesmo volume da Terra,

a depressão é acompanhada de uma elevação nas regiões periféricas (fig.3.6). A relação entre a quantidade de subsidência e a distância à pressão depende da reologia da litosfera e do manto bem como do tamanho/intensidade da pressão.

Para entender a reacção da crosta após ter ocorrido uma deformação visco elástica e a pressão ter cessado, é necessário estudarmos a teoria do equilíbrio estático da crosta terrestre - o principio da isostasia. Se as camadas sólidas da litosfera flutuam numa astenosfera em equilíbrio de material pouco resistente, as variações na profundidade de submersão devem ser balançadas pelas variações na densidade e espessura da litosfera (incluindo o relevo topográfico). Este estado de equilíbrio é o resultado de um esforço da litosfera após ter sido deformado por uma pressão que subsquentemente foi retirada/cessou. Existem três hipóteses de trabalho que modelam as relações requeridas entre densidade e espessura da crosta.

3.4.1 Sistema Pratt-Hayford

O modelo de Pratt assume a fronteira entre a litosfera e a astenosfera como sendo plana, i.e. a profundidade desta fronteira sob o nível médio do mar é uniforme. Este sistema foi colocado de forma matemática para fins geodésicos por Hayford. Para que esta crosta esteja em equilíbrio, as partes elevadas deverão ter uma densidade inferior (ρ) e vice-versa. Para ser possível calcular a densidade apropriada, basta imaginar a litosfera como constituída por blocos independentes como se vê na fig. 3.7.

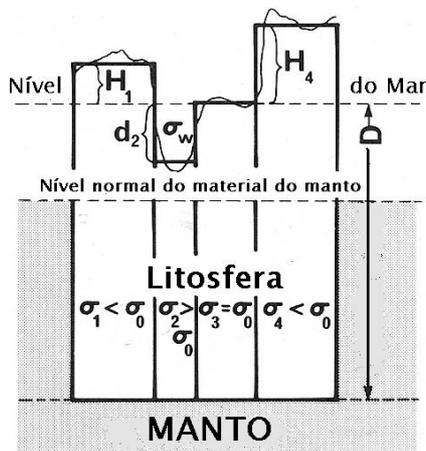


Figura 3.7 – Modelo Pratt-Hayford.

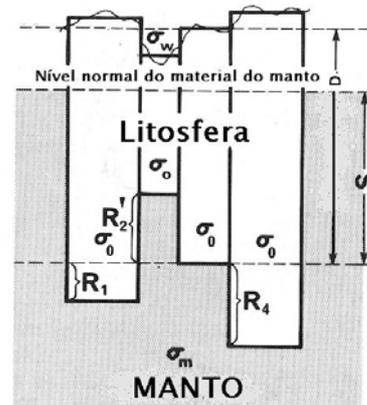


Figura 3.8 – Modelo Airy-Heiskanen.

Os blocos devem exercer a mesma pressão no manto a uma profundidade uniforme D para se atingir o equilíbrio. A partir desta condição a densidade da litosfera continental como função da altura média H_i do bloco sobre o nível do mar é obtido:

$$\rho_i = \rho_0 \frac{D}{D + H_i} \quad (3.15)$$

É obtida uma equação similar:

$$\rho_i = \frac{\rho_0 D - \rho_w d_i}{D + d_i} \quad (3.16)$$

relacionando a litosfera oceânica com a sua profundidade média d_i , em que $\rho_w = 1.027\text{g/cm}^3$ é a densidade da água do oceano. Neste caso há um aumento de massa da coluna sub-oceânica que é dada por:

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = \frac{h'}{D + h'}(\rho_0 - \rho_w) \quad (3.17)$$

Este modelo de compensação é ideal e esquemático, podendo ser aplicado na prática, só aproximadamente. São tomados valores na ordem de $D=100\text{km}$ para a profundidade de compensação. Para uma Terra esferoidal, as colunas devem convergir para o centro, e outros refinamentos deverão ser introduzidos.

3.4.2 Sistema Airy Heiskanen

Ao contrário do modelo anterior, o modelo de Airy (aplicado para fins geodésicos por Heiskanen) não considera variações de densidade mas trata a litosfera como tendo uma profundidade variável. Para manter o equilíbrio, a litosfera deverá ser mais espessa sob um relevo topográfico de maior altitude e mais fina sob os oceanos. Por razões de cálculo, a litosfera é de novo vista como composta por blocos independentes. Com S representando a profundidade normal de submersão no material do manto, e usando a lei de Arquimedes, poderão ser escritos as seguintes relações para os valores de R_i da profundidade actual a partir da profundidade normal D da litosfera (fig. 3.8).

$$\rho_m S = \sigma_0 D \quad (3.18)$$

$$\rho_m (S + R_i) = \rho_0 (D + H_i + R_i) \quad (3.19)$$

$$\rho_m (S + R'_i) = \rho_0 (D - d_i - R'_i) + \rho_w d_i \quad (3.20)$$

Em que ρ_m é a densidade do manto superior. Então as equações para as raízes dos blocos continentais são facilmente obtidos:

$$R_i = \frac{\rho_0}{\rho_m - \rho_0} H_i \quad (3.21)$$

Similarmente, as anti-raízes dos blocos oceânicos são dados por:

$$R'_i = \frac{\rho_0 - \rho_w}{\rho_m - \rho_0} d_i \quad (3.22)$$

Substituindo nas equações anteriores os valores de ρ_0 , ρ_w , ρ_m obtemos

$$R_i = 4.45 H_i, R'_i = 2.73 d_i \quad (3.23)$$

Se a profundidade normal foi considerada como sendo à volta de 30 km o valor da profundidade da litosfera concorda relativamente bem com a profundidade determinada pela sismologia. Todavia, a necessidade de imaginar a litosfera fragmentada em blocos independentes flutuantes é claramente esquemático e não corresponde à realidade. Na realidade, a litosfera é na sua grande maioria contínua, com excepção das regiões fronteiras de alguns grandes blocos.

Esta consideração conduziu Veining Meinesz à modificação deste modelo de Airy. No seu modelo Veining Meinesz assume que os blocos estão colocadas uns aos outros e conseqüentemente, respondem como uma camada elástica contínua á pressão exercida pelo relevo topográfico. Isto significa que o afundamento da litosfera no manto é distribuída por uma região extensa de compensação, fig. 3.9.

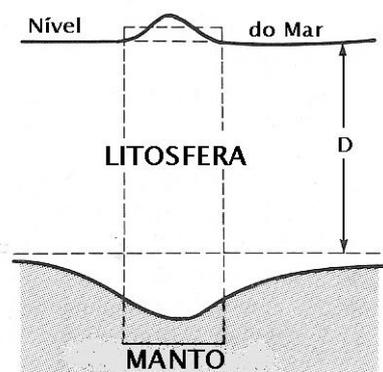


Figura 3.9 – Modelo de Isostasia de Veining –Meinesz.

Do ponto de vista físico, nenhuma das hipóteses mencionadas é completamente satisfatória. Através de várias fontes, sabemos que quer a densidade quer a espessura da litosfera são variáveis. Também, a litosfera comporta-se como uma camada elástica em algumas regiões mas está partida noutras.

3.5 Modelo Residual do Terreno

Nesta secção, será apresentado o conceito de modelo residual do terreno e a formulação matemática do efeito que este modelo residual do terreno tem sob o valor da gravidade e na ondulação do geóide. O conceito de modelo residual do terreno foi introduzido por Forsberg and Tscherning (1981), num artigo em que é apresentada a sua justificação teórica, no contexto da colocação e são apresentados resultados da sua aplicação numa região dos EUA (New Mexico). No que se segue, foi tomada como referência a mencionada publicação e duas outras publicações de Forsberg (1984, 1985).

Conceptualmente, a modelação residual do terreno (RTM) consiste no cálculo dos efeitos dos pequenos comprimentos de onda da topografia/batimetria nas diversas quantidades do campo gravítico, mediante a escolha de uma superfície suave de elevações médias (estritamente relacionada com o modelo geopotencial de referência), removendo computacionalmente massas acima dessa superfície e preenchendo os vales abaixo dessa mesma superfície (Fig. 3.10).

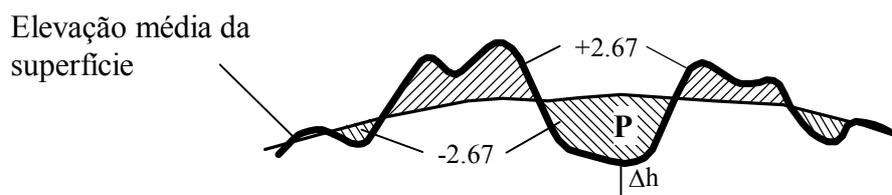


Figura 3.10 - Modelo Residual de Terreno (adaptado de Forsberg, 1984a).

A superfície média de elevações pode ser qualquer superfície suave, representando as elevações médias da região: por exemplo, uma grelha de 30'x30', definida pelo desenvolvimento em harmónicas esféricas de grau e ordem 360. Neste caso, as anomalias da densidade do modelo residual do terreno correspondem a uma distribuição normal da densidade com uma topografia e batimetria suave, definida pelo desenvolvimento em harmónicas esféricas, o que corresponde ao campo gravítico residual, após a remoção similar do desenvolvimento em harmónicas esféricas do potencial. A redução RTM pode ser vista como a diferença entre duas correcções de Bouguer: primeiro, a topografia visível é removida, e depois, a topografia suave é adicionada.

O único inconveniente que apresenta a RTM é que reduz a zona onde o potencial é harmónico. Se uma estação estava situada num vale, a uma altura Δh (Fig. 3.10) abaixo da superfície de referência, depois da correcção fica coberta. Para descobrir a estação, é necessário efectuar a correcção harmónica, a qual consiste na condensação das massas sobre a estação numa lâmina que é colocada sob a estação numa situação em que esta fique no seu exterior (condensação de Helmert). Desta maneira, o potencial exterior da superfície de referência fica praticamente invariante. Esta correcção tem um efeito muito pequeno sobre a ondulação do geóide e os desvios da vertical, valendo $-4\pi G\rho\Delta h$ o seu efeito sobre as anomalias da gravidade, onde ρ é o valor da densidade das massas do vale (Forsberg and Tscherning, 1981).

As vantagens da redução do modelo residual do terreno são muitas: uma vez que as anomalias da densidade assumem valores negativos e positivos, as integrações para os efeitos do campo gravítico só são efectuadas até uma certa distância do ponto onde se efectua a correcção, sendo cancelada a influência da topografia distante. Também os efeitos de terreno na ondulação do geóide serão pequenas, sendo desprezáveis se for tomado como referência

uma superfície de elevações de pequeno comprimento de onda; em particular, se for adoptado um desenvolvimento em harmónicas esféricas da topografia, esta redução terá resultados iguais à redução isostática (*ibid*).

O cálculo dos efeitos topográficos foi, inicialmente, entendido como uma operação necessária à redução das anomalias da gravidade do ponto de observação ao geóide. Este procedimento é exigido pelo Teorema de Stokes, na solução do problema geodésico de fronteira. A utilização da teoria de Molodensky (Capítulo 2), ou da colocação por mínimos quadrados, não requer a redução das observações ao geóide. Contudo, na colocação é de importância primordial, que o potencial gerado pelo modelo de massas do terreno (T_m) e o potencial residual ($T-T_m$) sejam funções harmónicas.

Sendo esta a única condição imposta pelo método da colocação, qualquer modelo geofísico de densidades pode, em princípio, ser usado para representar uma parte do campo externo através do cálculo directo dos efeitos da distribuição de densidades assumida. Ou seja, podemos utilizar um modelo topográfico/ batimétrico que não corresponda exactamente à realidade, o que poderá consistir numa vantagem, em áreas onde o modelo altimétrico e/ou batimétrico é de baixa resolução ou baixa qualidade. No entanto, quanto mais realista, o modelo altimétrico, mais suave será o campo residual, e, conseqüentemente, mais precisas as estimações de outras quantidades do campo gravítico.

Partindo do princípio que se dispõe de um modelo geopotencial com coeficientes até ao grau N , seja este modelo global ou ajustado localmente, e que se utiliza este modelo na remoção dos grandes comprimento de onda do campo gravítico, então, em princípio, são também removidos os efeitos topográficos de comprimento de onda $180^\circ/N$. Isto quer dizer que o modelo geopotencial inclui, nos seus coeficientes, o efeito de terreno desenvolvido em harmónicas esféricas até ao grau N .

O efeito do modelo residual do terreno é calculado tomando como referência uma superfície altimétrica / batimétrica com a mesma resolução que o modelo geopotencial utilizado na redução das observações (veja-se Fig. 3.10). Esta metodologia tem como consequência que, em muitos casos, é possível desprezar a compensação isostática, porque esta é um efeito regional e não um efeito pontual. A compensação, baseada no cálculo do efeito do modelo residual do terreno assim construído é designada por Modelação Residual do Terreno (“Residual Terrain Model”), em contraste com a modelação topo-isostática, cuja utilização requer a modificação dos coeficientes do modelo geopotencial (Lachapelle, 1975; Sünkel, 1986).

Concluimos, assim, que a modelação precisa do campo gravítico requer a manipulação combinada de todos os tipos de dados disponíveis, especialmente em zonas de sinal gravimétrico de elevado gradiente. Para o cálculo dos vários tipos de reduções topográficas, é essencial um modelo digital do terreno que tenha cobertura e resolução apropriadas. Os cálculos de dimensão regional ou global do geóide utilizam modelos globais de diferentes resoluções que a experiência nos diz que estão afectados de erros sistemáticos e aleatórios (Arabelos, 1993; Furst *et al.*, 1993).

Sabendo que a utilização de informação de grandes comprimentos de onda, em conjugação com os efeitos topográficos de pequeno comprimento de onda, calculados usando um modelo residual de terreno, tem como consequência a suavização do sinal residual (Forsberg, 1984) e a redução das anisotropias, estes parâmetros deverão ser objecto de estudo, mediante a investigação das funções covariância local e do espectro de potência do campo gravítico, em áreas de diferentes tipos de topografia.

3.6 O efeito Indirecto

A remoção e distribuição das massas que está subjacente às reduções gravimétricas fazem variar o potencial gravítico e portanto o geóide. Esta variação no geóide é um **efeito indirecto** das reduções gravimétricas. Assim, a superfície calculada pela formula de Stokes a partir das anomalias isostáticas não é o geóide, mas uma superfície um pouco diferente, o **co-geóide**. Para cada redução gravimétrica, obtemos um co-geóide diferente.

Seja a ondulação do co-geóide N^c , então a ondulação do geóide real é dada por:

$$N = N^c + \delta N \quad (3.24)$$

em que o efeito indirecto δN é dado por:

$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma} \quad (3.25)$$

sendo δW a variação do potencial no geóide. A expressão de δN é obtida directamente do Teorema de Bruns.

A variação do potencial na redução de Bouguer é dada por:

$$\delta W_B = U_T \quad (3.26)$$

onde U_T é o potencial correspondente à atracção de topografia e do planalto de Bouguer. Para as reduções isostáticas a variação do potencial é dada por:

$$\delta W_I = U_T - U_c \quad (3.27)$$

em que U_T é o potencial correspondente à atracção da topografia e do planalto de Bouguer e U_c é o potencial correspondente à atracção da compensação.

Para a determinação prática do potencial da topografia e do potencial da compensação utilizamos as equações da secção 3.2 com os seguintes limites de integração:

Para o calculo de U_T .

$$z_1 = 0, \quad z_2 = H, \quad \rho = \rho_0$$

Para o calculo de U_c .

Sistema Pratt-Hayford

$$z_1 = 0, \quad z_2 = D, \quad \rho = (H/D) \rho_0$$

Sistema Airy-Heiskanen

$$z_1 = 0, \quad z_2 = t+T, \quad \rho = \rho_1 - \rho_0$$

Assim, antes de aplicarmos a formula de Stokes , temos de reduzir as anomalias isostáticas da gravidade ao có-geóide o que se faz aplicando a correcção de redução ao ar-livre adicionando às anomalias isostáticas a correcção $\delta=0.30986 \delta N$ mGal com δN em m.

A correcção δ é o efeito indirecto da gravidade (cerca de 3 mGal). Deste modo, introduzindo esta correcção às anomalias da gravidade isostática temos estas anomalias sobre o có-geóide, ou seja, aplicando estas anomalias à fórmula de Stokes obtemos N^c .

Bibliografia

Arabelos, D. (1993), "Validation of ETOPO5U in the Hellenic area." In *Mare Nostrum*, GEOMED Report No. 3, Ed. F. Sansò, Milano, pp. 65-77.

Forsberg, R. (1984), "A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling." *Dept. of Geodetic Science and Surveying*, Rep. No. 355, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Forsberg, R. (1985), "Gravity field terrain effect computations by FFT." *Bulletin Géodésique*, Vol. 59, pp. 342-360.

Forsberg, R. and C.C. Tscherning (1981), "The use of height data in gravity field approximation by collocation." *Journal of Geophysical Research*, Vol. 86, No. B9, Sept. 10, pp. 7843-7854.

Furst, W., W. Hausleitner, E. Hock, W.-D. Schuh and H. Sünkel (1993), "Validation of the global digital height model ETOPO5U in a local area referring to the Italian height model (Italian DEM)." In *Mare Nostrum*, GEOMED Report No. 3, Ed. F. Sansò, Milano, July, pp. 151-167.

Heiskanen, W.A. and H. Moritz (1967), *Physical Geodesy*. W.H. Freeman and Company, San Francisco.

Hobson, E.W. (1931), *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge University Press.

Lachapelle, G. (1975), *Determination of the geoid using heterogeneous data*, Ph.D. Degree, Graz, Austria.

Lemoine, F.G., D.E. Smith, L. Kunz, R. Smith, E.C. Pavlis, N.K. Pavlis, S.M. Klosko, D.S. Chinn, M.H. Torrence, R.G. Williamson, C.M. Cox, K.E. Rachlin, Y.M. Wang, S.C. Kenyon, R. Salman, R. Trimmer, R.H. Rapp and R.S. Nerem (1997), "The development of the NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model" In *Proceedings of the International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy, GRAGEOMAR*, Eds. J. Segawa, H.

Fujimoto and S. Okubo, The University of Tokyo, Tokyo, Sept. 30 - Oct. 5, Springer-Verlag, pp. 461-469.

Molodensky, M.S., V.F. Eremeev and M.I. Yurkina (1962), *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. The Israel Program for Scientific Translations, Israel Program for Scientific Translations Ltd.

Moritz, H. (1984), "Geodetic reference system 1980." *Bulletin Géodésique*, Vol. 58, pp. 388-398.

Sünkel, H. (1986), "Global topographic-isostatic models." In *Mathematical and Numerical Techniques in Physical Geodesy*, Lecture Notes in Earth Sciences, Ed. H. Sünkel, Springer-Verlag, pp. 417-462.

Torge, W. (1989), *Gravimetry*. Walter de Gruyter, Berlin.

Vanicek, P. and E. Krakiwsky (1982), *Geodesy - the Concepts*. Second Edition, Elsevier.