Determinação de um modelo local de geóide através do espaço gavidade

C. Antunes [(1)], **H. Sünkel** [(2)]
[1] Faculdade de Ciências – UL, Lisboa, Portugal, mcarlos@fc.ul.pt
[2] Institute of Theoretical Geodesy – TUG, Graz, Austria

SUMMARY

The earth surface determination by space gravity approach transforms the free boundary-value problem into a fixed boundary-value problem, making a great contribution to the theoretical investigations on the existence and uniqueness of the solution. Here is presented the theoretical approach on the geoid determination problem, a strategy for computation based on the non-linear formulation, the required observations and the first attempts made from real observations of the Tagus Valley.

1. INTRODUÇÃO

A abordagem do problema de fronteira na teoria do potencial gravítico através do espaço gravidade veio trazer novos desenvolvimentos ao nível da existência e unicidade da solução [Sansò, 1977]. Partindo da formulação de Molodensky no espaço gravidade, Sansò pretendeu resolver o problema da unicidade, transformando-o num problema de Dirichlet. Além de conseguir tal proeza, apresenta uma formulação de tal forma mais simples que o problema poderá, por hipótese, ser resolvido na sua forma não linear ao contrário das soluções convencionais até aqui apresentadas.

O conceito baseia-se na simples ideia de definir o potencial gravítico W em função das três componentes do vector gravidade (g_1,g_2,g_3), em vez das componentes do vector posição (x_1,x_2,x_3). Esta nova variável independente do potencial gravítico é interpretada como sendo as coordenadas cartesianas num espaço auxiliar, o espaço gravidade. A região exterior (Ω) de S corresponderá de forma biunívoca à região interior (Ωg) de Sg (o infinito no espaço real corresponde à origem no espaço gravidade), e a superfície física da terra (S) transforma-se numa superfície conhecida (S_g) no espaço gravidade.

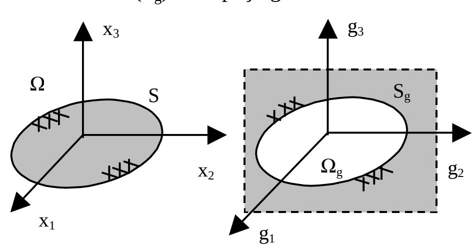

Figure 1 – Ordinary space and gravity space.

Apesar da formulação linear do problema apresentar uma analogia perfeita com o problema de Molodensky, a sua simplicidade e a prova da existência e da unicidade da solução mostra que a sua aplicação ao problema concreto da determinação do geóide pode apresentar enormes vantagens face às demais abordagens.

Contudo a sua aplicabilidade ao caso concreto do potencial gravítico terrestre apresenta uma inconveniência, a correspondência biunívoca entre as coordenadas x_k e g_k que definem, particularmente, S sobre a terra e S_g no espaço gravidade, apenas se verifica numa terra não rotativa. Uma inconveniência facilmente ultrapassável, em vez de se considerar o potencial gravítico W, passa a considera-se o potencial gravitacional V, pois o potencial centrífugo é, com precisão suficiente, de fácil determinação.

Como a transformação entre as duas variáveis independentes (vector posição e vector gravidade) é desconhecida, o problema é resolvido através de um potencial auxiliar definido pela transformação de Legendre. Com este potencial, que é função das variáveis independentes e do potencial gravitacional em cada ponto da superfície, obtém-se a solução da superfície S através das suas derivadas parciais em ordem a g_k.

2. CONCEITO

No espaço gravidade, o vector gravidade $\underline{g}$ define o vector posição, as suas componentes são as coordenadas rectangulares (2.1) e o valor da gravidade g é o raio vector. Assim,

$$\begin{cases} g_1 = g\cos\Phi\cos\Lambda \\ g_2 = g\cos\Phi\sin\Lambda \\ g_3 = g\sin\Phi \end{cases} \tag{2.1}$$

onde Φ e Λ são as coordenadas astronómicas de uma terra não rotativa.

Partindo da relação seguinte (transformação de Legendre), completamente simétrica e que exprime o potencial auxiliar (ψ) em função do potencial gravitacional (V) através do produto interno (•) entre os vectores x e g

$$V + \Psi = x_k \bullet g_k \tag{2.2}$$

facilmente se verifica que as variáveis independentes, x_k e g_k, correspondem, respectivamente, às derivadas parciais dos potenciais Ψ e V em ordem a g_k e x_k, $\frac{\partial\Psi}{\partial g_k} = x_k$ e $\frac{\partial V}{\partial x_k} = g_k$.

A formulação do problema geodésico de fronteira no espaço gravidade é então definido do seguinte modo: encontrar uma função potencial Ψ, harmónica sobre S_g e na região interior Ω_g, que verifique a seguinte condição de fronteira em S_g

$$\left(g_k \bullet \frac{\partial\Psi}{\partial g_k} - \Psi \right) \circ S_g = V(\Phi,\Lambda) \tag{2.3}$$

e que seja solução da equação diferencial às derivadas parciais de segunda ordem, resultante da transformação da condição ΔV=0.

Encontrada essa função, a superfície física da terra S (geóide) será definida pelo respectivo gradiente em ordem a g_k:

$$x \circ S = (grad\,\Psi) \circ S_g \tag{2.4}$$

onde $x \circ S$ expressa o vector posição de todo e qualquer ponto da superfície S, x(Φ,Λ). Consequentemente, a solução de geóide resultará pela transformação das coordenadas rectangulares x_k em coordenadas geodésicas (φ,λ,h), correspondendo h à própria ondulação do geóide, N.

Contudo, prova-se que a solução do problema só existe para as funções $V(\Phi,\Lambda)$ cujos valores de fronteira verifiquem n=3 condições [Sansò, 1977, pp. 63], originando uma reformulação do problema através da nova condição de fronteira

$$\left(g_k \bullet \frac{\partial \Psi}{\partial g_k} - \Psi\right) \circ S_g = V(\Phi,\Lambda) + a_k g_k \qquad (2.5)$$

em que as três constantes a_k representam as 3 condições do problema e traduzem uma translação no espaço real.

3. METODOLOGIA

A nossa metodologia adoptada não segue qualquer tipo de resolução da equação de fronteira, segue antes um processo iterativo através do cálculo da função ψ nos pontos de observação a partir das observações e inicialmente dos valores do modelo geopotencial global. Isto porque, o vector de posição x sendo a solução do problema é também uma variável do potencial auxiliar.

A determinação de uma função que tenha as características espectrais do campo gravítico deve ser, num domínio local ou regional, sempre sujeita a uma decomposição espectral, por forma a permitir a determinação correcta de cada componente. Este tratamento, conhecido pela técnica da remoção-reposição, separa a determinação das duas principais componentes do campo - a sistemática e a estocástica (sinal). De igual modo, o potencial auxiliar definido no espaço gravidade por $\Psi(g_1,g_2,g_3)$ deve ser sujeito a esta decomposição, por forma a possibilitar uma determinação mais rigorosa.

O recurso a modelos globais de geopotencial possibilita a determinação da componente sistemática. A partir das coordenadas geodésicas dos pontos observados pode-se calcular as diferentes componentes do modelo global com as quais se deduz o valor do potencial auxiliar Ψ.

Para a determinação do sinal do campo pode-se recorrer quer ao método da colocação por mínimos quadrados, quer à técnica das massas pontuais [Antunes *et. al*., 2000b]. Como a colocação implica a utilização de uma função covariância própria e adequada ao problema, e por se tratar de um método que implica sempre a inversão de uma matriz com a mesma dimensão dos dados, o método alternativo apresenta-se com algumas vantagens.

Propomos, por isso, utilizar o método das massas pontuais como principal método numérico de resolução do problema à escala local, podendo ser também utilizada a colocação como termo comparativo na determinação da variável sinal.

Neste método, a componente residual do potencial auxiliar poderá ser representado pela seguinte função de potencial

$$\Psi(g_1,g_2,g_3) = \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k}{\sqrt{(g_1-\xi_k)^2 + (g_2-\eta_k)^2 + (g_3-\zeta_k)^2}} \qquad (3.1)$$

definida para um conjunto finito de massas c_k posicionadas numa dada posição fixa e finita do campo.

Depois de encontrado o conjunto das constantes c_k que representam as massas pontuais, por um processo iterativo, a solução (2.4) é então obtida através das derivadas parciais do funcional representado em (3.1) em ordem às componentes do vector gravidade (2.1).

4. ENSAIO

A aplicação desta abordagem obriga à existência de um conjunto completo de observações específicas, isto é, para o cálculo de valores pontuais do potencial Ψ são necessárias observações astronómicas (Φ,Λ), gravimétricas (g) e coordenadas geodésicas rectangulares (x_1,x_2,x_3) em cada ponto de observação, por forma a permitir a constituição dos dois vectores - de gravidade e de posição.

Neste contexto e para este estudo, está a ser observada uma malha regular com espaçamento de 5 km na região do Vale do Tejo, ampliada à escala regional pela rede geodésica de primeira ordem. Estes dados são recolhidos, respectivamente, através do sistema de observação astronómica em tempo real - ICARUS (desenvolvido no IGP, ETH, Zurich), um gravímetro L&R e um par de receptores GPS de dupla frequência em bases curtas. São seguidos os métodos de observação mais adequados, respeitando os requisitos habituais da geodesia de precisão. São impostos ao nível da precisão, respectivamente, os seguintes limites: 0.3 ", 0.1 mgal e 5 cm.

As observações são devidamente corrigidas e ajustadas para reduzir os efeitos dos erros de observação, e depois são reduzidas ao nível do geóide, superfície a determinar. Relativamente às observações dependentes do campo gravítico, devem ser aplicadas as correcções de redução topográfica, por forma a remover as massas exteriores à superfície do geóide.

No cálculo do potencial auxiliar intervém o valor do potencial gravitacional V, valor esse determinado a partir do valor do potencial gravítico W (retirado do modelo global) e do respectivo potencial centrífugo.

As figuras 2 e 3 apresentam um primeiro mapa dos valores do potencial auxiliar da região, e das suas duas componentes, sistemática (EGM96) e estocástica, sem redução topográfico. Dada a fase inicial do trabalho, ainda não é possível apresentar resultados consistentes, de modo a comprovar a metodologia aqui apresentada.

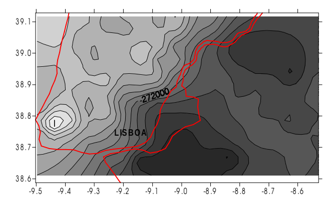

Figure 2 – Map of adjoint potential Ψ in Tagus Valley (in m^2/s^2).

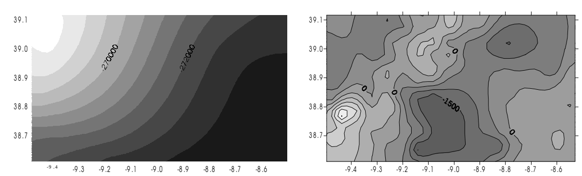

Figure 3 –Trend (EGM96) and signal maps of the adjoint potential Ψ (in m^2/s^2).

5. REFERÊNCIAS

Antunes, C., R. Pail e J. Catalão. Determinação de um campo tendência Local, comparação com o modelo global EGM96. Actas da *II Conferência Nacional de Cartografia e Geodesia*, 23 e 24 de Setembro de 1999. IPCC, Lisboa, Junho de 2000, pp. 311-319.

Antunes, C. and J. Catalão. On the Comparison Between Point Mass and Collocation Methods for Geoid Determination. Presented by poster at XXV EGS General Assembly, Nice, 25-29 April, 2000.

Moritz, H.. Advanced Physical Geodesy. H. Wichmann - Abacus Press, Karlsruhe - Tunbridge Wells, 1980.

Sansò, F.. The geodetic boundary value problem in gravity space. Mem. Accad. Naz. Lincei, No 14, pp. 39-97,1977.