Determinação de um campo tendência local, comparação com o modelo global EGM96

Carlos Antunes[1]; Roland Pail[2] e João Catalão[1]
[1] Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
[2] Institute of Theoretical Geodesy - Technical University Graz

Resumo

A aplicação do método de colocação na determinação do geóide, requer a remoção prévia dos grandes comprimentos de onda do campo geopotencial (*trend field* – campo tendência), sendo posteriormente repostos. Este procedimento designado por técnica de remoção-reposição deve garantir as condições necessárias de homogeneidade, isotropia e centragem dos dados na aplicação do método da colocação.

Apresentamos neste trabalho uma técnica de determinação do campo tendência baseada na aplicação de um filtro de passa-baixo em combinação com o algoritmo de *Cordell*, determinando-se um campo diferenciável gerado por um certo número de massas posicionadas a dada profundidade.

Ao longo da apresentação, e após a abordagem teórica, é feita uma análise dos sucessivos resultados da aplicação deste método e da abordagem clássica com o modelo global EGM96, evidenciando-se o cumprimento das condições necessárias para a aplicação do método da colocação.

1. Introdução

A colocação por mínimos quadrados, de acordo com *Moritz* (1980), é um método de determinação do campo gravítico perturbador através de observações geodésicas de diferentes tipos. É até agora, o único método estatístico que permite a determinação rigorosa do geóide a partir da combinação de anomalias da gravidade, de desvios da vertical e de ondulações do geóide, ou a partir de cada um desses conjuntos de observações em separado.

Embora a sua aplicação seja simples, ela requer, no entanto, cuidados específicos no pré-processamento das observações devido às propriedades estatísticas específicas impostas à variável de entrada (sinal). Para que a solução do método da colocação seja exacta e de variância mínima, o sinal tem de gozar das seguintes propriedades: isotropia, homogeneidade e ser centrado. A obtenção de um sinal com estas características é conseguida por remoção da componente sistemática (*trend field*), também designada por tendência, constituída apenas pelos grandes comprimentos de onda que constituem o campo original.

Para que a estimativa do método da colocação resulte correcta deve ser-lhe reposta novamente a tendência, no nosso caso específico sob a forma de ondulações de geóide. Esta técnica que permite a aplicação correcta da colocação sem alteração dos resultados é designada por remoção-reposição (*remove-restore technique*). Na técnica de remoção-reposição a colocação opera apenas exclusivamente ao nível do sinal.

Numa determinação local de geóide o campo tendência inclui não só a componente global e regional mas também uma componente local. A abordagem clássica recorre a um modelo geopotencial global, como o OSU91A [Rapp *et. al.*, 1991] ou o EGM96 [Lemoin *et. al.*, 1997], para se obter o campo tendência da zona. Mas como o menor comprimento de onda destes modelos é da ordem de 1º, para áreas com dimensão desta ordem ou inferior, o campo residual que se obtém após a remoção desse modelo contém ainda uma componente local do campo tendência, não verificando as características de homogeneidade e isotropia.

Assim, este trabalho tem como objectivo apresentar uma técnica combinada que possibilita a determinação de um campo tendência local, o qual ao ser removido do campo original de anomalias da gravidade gere um campo residual (sinal) isótropo, homogéneo e centrado, para a correcta aplicação do método da colocação na determinação do geóide.

2. Método da Colocação

Considerando as ondulações do geóide (*N*) a variável a estimar e as anomalias da gravidade (*Δg*) a variável sinal**,** e partindo da relação linear entre estas duas variáveis numa aproximação plana

$$\Delta g = -\gamma \frac{\partial N}{\partial Z} \tag{2.1}$$

onde γ é o valor da gravidade normal e Z é a coordenada vertical, a estimativa de variância mínima de ***N*** dada pelo método da colocação é

$$\hat{N} = C_{N\Delta g}\left(C_{\Delta g\Delta g} + C_{rr}\right)^{-1}\Delta g \tag{2.2}$$

sendo a melhor estimativa do sinal *N* em termos do vector de dados *Δg* [Moritz, 1980].

Para ***N*** estimado a respectiva matriz covariância de erro é dada por

$$C_{\varepsilon\varepsilon} = C_{NN} - C_{N\Delta g}\left(C_{\Delta g\Delta g} + C_{rr}\right)^{-1} C_{\Delta gN} \tag{2.3}$$

cujas matrizes $C_{\Delta g\Delta g}$ e C_{NN} são as matrizes de auto-covariância de *Δg* e *N*, $C_{N\Delta g}$ é a matriz de covariância cruzada entre *Δg* e *N*, e C_{rr} uma matriz diagonal com as variâncias das observações, representando o ruído.

2.1. Função Covariância

Seja K(P,Q) a função covariância das ondulações do geóide N, definida entre dois pontos distintos P(x,y,z) e Q(x',y',z') por

$$K(P,Q) = \frac{C_0 b^2 (z + z' + b)}{\left[\rho^2 + (z + z' + b)^2\right]^{3/2}} \tag{2.4}$$

com $\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, C_0 a variância de N, $b = \frac{\rho_{1/2}}{\sqrt{2^{2/3} - 1}}$ e $\rho_{1/2}$ a distância de correlação.

Pela lei de propagação de covariâncias e atendendo à relação linear (2.1) entre Δg e N, obtêm-se as matrizes covariância determinadas da seguinte forma

$$C_{N\Delta g} = \left(-\gamma \frac{\partial}{\partial z'}\right) K(P,Q) = -\frac{\gamma Co\, b^2 \left(\rho^2 - 2(z + z' + b)^2\right)}{\left[\rho^2 + (z + z' + b)^2\right]^{5/2}} \tag{2.5}$$

$$C_{\Delta g\Delta g} = \left(-\gamma \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\gamma \frac{\partial}{\partial z'}\right) K(P,Q) = -\,Co\, b^2 (z + z' + b)\, \gamma^2\ \frac{9\rho^2 - 6(z + z' + b)^2}{\left[\rho^2 + (z + z' + b)^2\right]^{7/2}} \tag{2.6}$$

Dado que as duas variáveis *N* e *Δg* são definidas ao nível do geóide (H=0) e porque estamos a considerar a aproximação plana, temos z=z'=H=0, simplificando as fórmulas.

Como a função covariância dada por (2.4) é definida para N, ou seja os seus parâmetros (C_0, $\rho_{1/2}$) devem ser determinados a partir de uma amostra de valores de N, e dispondo nós à partida, apenas os valores de Δg, as fórmulas (2.5) e (2.6) devem ser modificadas por forma a que os respectivos parâmetros (C_0, $\rho_{1/2}$) sejam determinados com os valores de Δg.

Partindo de (2.6) e considerando ρ=0 obtemos uma relação entre as duas variâncias de N e Δg

$$C_0(N) = \frac{C_0(\Delta g) b^2}{6\gamma^2} \tag{2.7}$$

com a qual, depois de substituída nas expressões (2.5) e (2.6), resultam as funções covariância finais a aplicar

$$C_{N\Delta g} = -\frac{Co\, b^4\left(\rho^2 - 2b^2\right)}{6\gamma\left[\rho^2 + b^2\right]^{5/2}}; \qquad C_{\Delta g\Delta g} = -\frac{Co\, b^5\left(3\rho^2 - 2b^2\right)}{2\left[\rho^2 + b^2\right]^{7/2}} \tag{2.8}$$

Para permitir um ajuste adequado deste modelo à função de covariância empírica das observações deve-se incluir um factor de escala ***a*** sobre a distância de correlação. Ele traduz a razão entre as duas distâncias de correlação, de N e Δg. Assim, deve-se definir o parâmetro b por

$$b = \frac{a\,\rho_{1/2}}{\sqrt{2^{2/3} - 1}} \tag{2.9}$$

Como a função covariância deduzida de K(P,Q), para além dos seus parâmetros intrínsecos fixos (C_0, $\rho_{1/2}$) que definem a sua forma, depende exclusivamente da variável distância ρ entre o ponto de cálculo e os restantes pontos do campo, ela é, por essa razão, uma função homogénea e isótropa. Isto quer dizer que ela é única para qualquer ponto de aplicação, ou seja, os parâmetros de forma (C_0, $\rho_{1/2}$) são os mesmos em qualquer parte do campo (homogeneidade) e, não depende da direcção azimutal, ou seja, é de forma circular para qualquer distância (isotropia).

Por estas razões e pelo facto da colocação usar sempre a mesma função covariância para todo o domínio da aplicação, o sinal de entrada tem que obrigatoriamente gozar das propriedades de homogeneidade e isotropia.

3. Método de determinação da tendência local

Um campo genérico, como o de anomalias da gravidade, é normalmente constituído por duas componentes, uma sistemática ou tendência e outra estocástica ou sinal. A primeira constituída por grandes comprimentos de onda (baixas frequências) e a segunda por pequenos comprimentos de onda (altas frequências).

Um método de determinação da tendência de um campo consiste em determinar um conjunto de pontos de massa colocados a uma dada profundidade que gerem essa componente sistemática. Quanto mais profundas estiverem as massas mais suave será o campo gerado, e vice versa, quanto menos profundas as massas menos suave o campo.

Um exemplo deste método é dado pelo algoritmo iterativo de Cordell [Cordell, 1992], que pelo facto de colocar todas as massas à mesma profundidade torna-o sensível aos pequenos comprimentos de onda. A sua aplicação com vista à obtenção da tendência é válida para campos suaves como o caso do geóide (N), já para o caso de anomalias da gravidade (Δg), muito pouco suave, dá resultados pouco fiáveis.

Por este facto, apresentamos uma alternativa complementada por uma filtragem prévia do campo original. A filtragem tem por objectivo a remoção dos pequenos comprimentos de onda, originando assim, um campo numérico, constituído única e exclusivamente pela tendência do campo original, sobre o qual é aplicado o algoritmo de Cordell. Deste modo a função campo gerada pelo algoritmo de Cordell coincidirá exactamente com o campo numérico filtrado e gerará com exactidão a tendência do campo original.

3.1. Filtragem

A filtragem constitui a primeira das fases deste processo de determinação do campo tendência, e tem como objectivo a remoção dos pequenos comprimentos de onda do campo original, aos quais o algoritmo de Cordell é sensível.

O filtro aplicado é do tipo passa-baixa (3.1) no domínio espectral, cujo valor de corte médio foi neste caso de ω=1.7255E-5Hz, correspondente a um comprimento de onda de 58km, com os valores extremos ω_{c1}=1.6666E-5 e ω_{c2}=1.785E-5, aos quais correspondem os comprimentos de onda λ_{c1}=56km e λ_{c2}=60km respectivamente (Fig.1). Este valor de corte médio foi, por critério, escolhido como sendo o valor aproximadamente igual a metade da menor dimensão da área de trabalho.

$$\begin{cases} H(\omega) = 1, \quad \omega < \omega_{c1} \\ H(\omega) = 1 - \dfrac{\omega - \omega_{c2}}{\omega_{c1} - \omega_{c2}}, \quad \omega_{c1} > \omega > \omega_{c2} \\ H(\omega) = 0, \quad \omega > \omega_{c2} \end{cases} \tag{3.1}$$

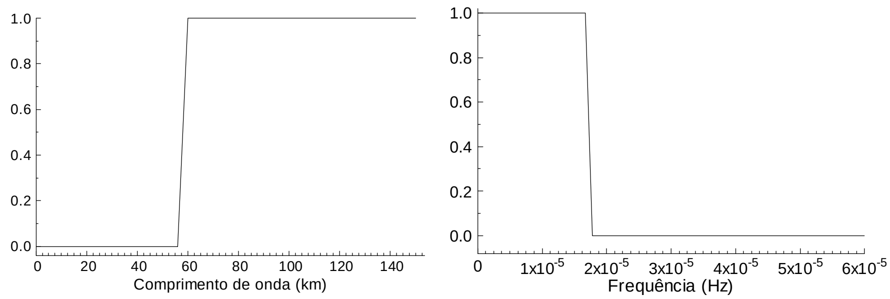

Figura 1 – Filtro aplicado ao campo original de anomalias da gravidade.

No final da aplicação do filtro obtemos um campo numérico constituído dominantemente por comprimentos de onda superiores a 58km.

3.2. Algoritmo de Cordell

Este algoritmo recorre a um processo iterativo, determinando *M* conjuntos de pontos de massa a partir dos valores extremos do campo original sucessivamente reduzido em cada iteração do campo gerado por cada massa determinada. As massas que constituem os *M* conjuntos, determinadas uma a uma em cada iteração, são no final adicionadas e posicionadas no centróide de cada conjunto.

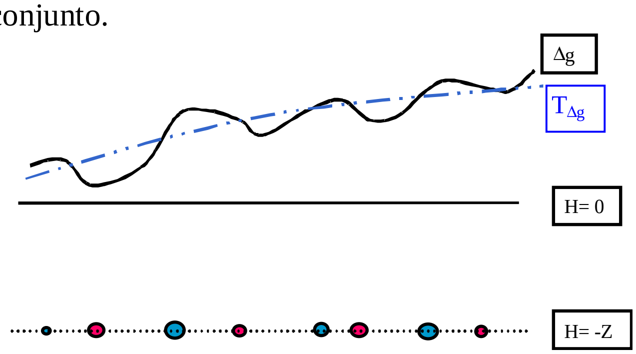

Figura 2 – Campo tendência gerado pelas M massas.

Do procedimento resultam *M* constantes $c_k = -\sum_i \Delta g^i_{\max} \zeta_k$ (em mgal.m), relativas às ***M*** massas finais, com as quais se gera o campo tendência a partir da seguinte função

$$T_{\Delta g_i}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{k=1}^{M} \frac{c_k}{\sqrt{(x_i - \xi_k)^2 + (y_i - \eta_k)^2 + (z_i - \zeta_k)^2}} \tag{3.2}$$

Sendo (x_i, y_i, z_i) as coordenadas dos pontos do campo com z_i =0 e (ξ_k, η_k, ζ_k) as coordenadas das massas, onde ζ_k corresponde à sua profundidade e ξ, e η as respectivas coordenadas planas.

Dado que (3.2) é um campo diferenciável, e tomando a relação linear (2.1) entre Δg e $\boldsymbol{N}$, podemos por integração obter a respectiva função que gera a tendência das ondulações do geóide, utilizando o mesmo conjunto de massas, pois Δg e $\boldsymbol{N}$ pertencem ao mesmo campo geopotencial:

$$T_{N_i}(x_i, y_i, z_i) = -\sum_{k=1}^{M} \frac{c_k}{\gamma} \ln\left((z_i - \zeta_k) + \sqrt{(x_i - \xi_k)^2 + (y_i - \eta_k)^2 + (z_i - \zeta_k)^2}\right) \qquad (3.3)$$

4. Aplicação prática

A fim de se verificar a aplicabilidade desta técnica foi utilizado um conjunto de 640 pontos gravimétricos da rede nacional do IPPC na região de Lisboa e Vale do Tejo (Fig. 3), compreendida entre os valores de latitude φ=38.4º e φ=39.4º e os valores de longitude λ=-9.5º e λ=-7.9º. Esta rede possui uma densidade aproximada de 1ponto/5km.

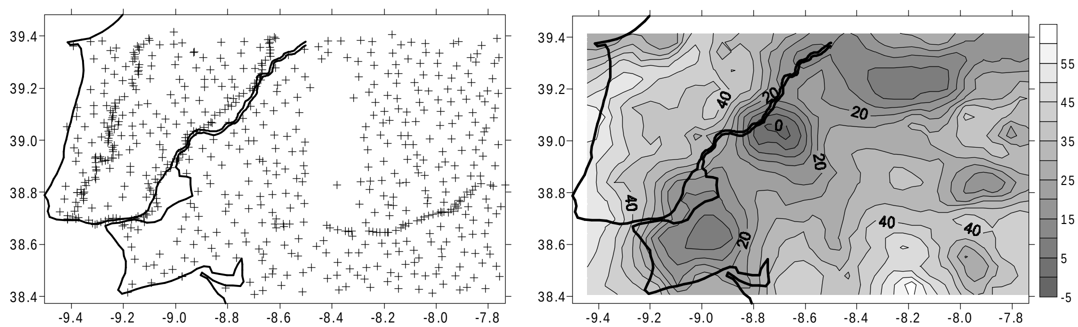

Figura 3 – Distribuição dos pontos e mapa de anomalias isostáticas.

4.1. Metodologia de comparação

Depois de se calcularem as anomalias isostáticas, iniciou-se o estudo de comparação com o desenvolvimento de duas linhas de cálculo paralelo: uma resultante da remoção da solução de tendência local e outra da remoção do modelo global EGM96 (Fig. 4), respectivamente designadas por solução A e solução B.

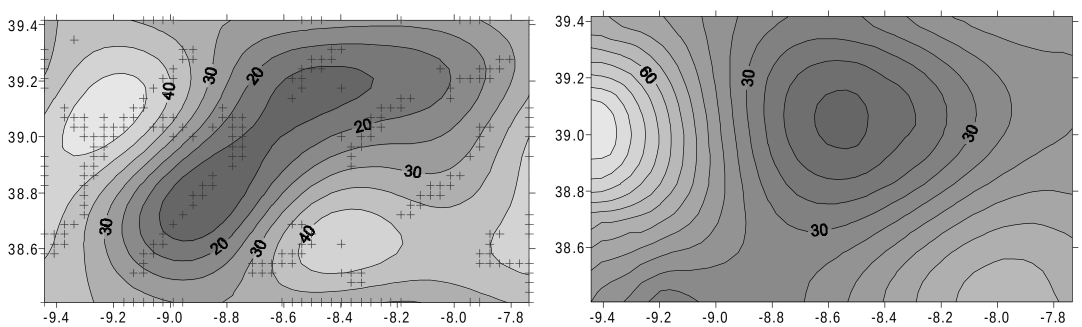

Figura 4 – Tendência de anomalias da gravidade da solução local e do EGM96.

Após a remoção dos campos tendência obtiveram-se dois campos residuais (Fig. 5a e 5b), sobre os quais se fizeram estudos de análise espectral, de homogeneidade e de isotropia.

A análise espectral dos campos residuais (Fig. 5a e 5b) mostra claramente a total remoção da tendência (grandes comprimentos de onda) da solução A, ao contrário do que acontece com a solução B.

As representações espectrais das Figuras 5a) e 5b), bem como, os gráficos da covariância bidimensional na Figura 7 estão apresentados em função dos números de onda (u, v), as coordenadas no domínio espectral.

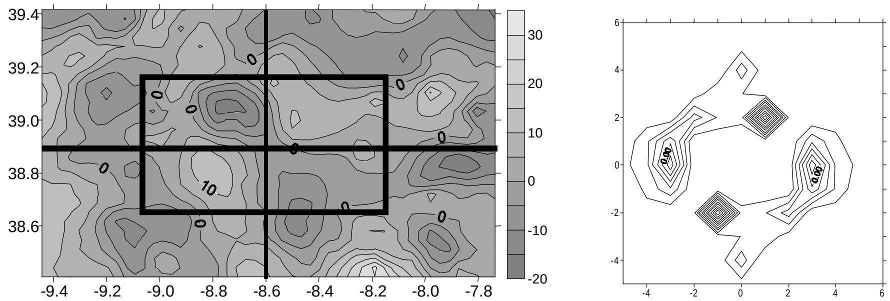

Figura 5a – Campos residuais da solução de determinação local (A) e respectivo espectro.

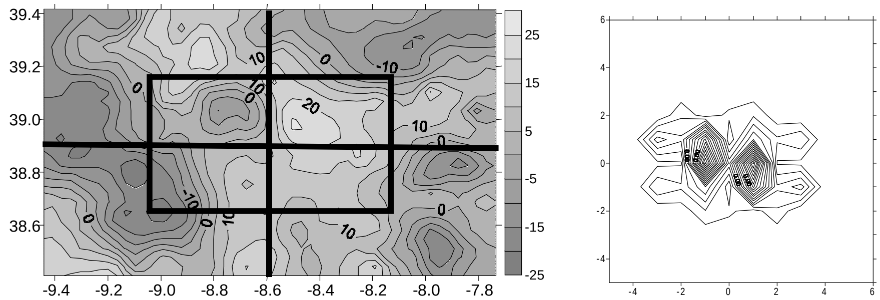

Figura 5b – Campos residuais da solução resultante da remoção do EGM96 (B) e respectivo espectro.

4.2. Estudo da homogeneidade e isotropia

A análise da homogeneidade e isotropia dos campos residuais de A e de B deve ser feita sobre as respectivas funções covariância empírica.

Assim, para a homogeneidade foi calculada a função covariância empírica de toda a região (ECM - *empirical covariance model*) e de 5 zonas distintas da área disponível (ver Fig. 5a e 5b), os quatro quadrantes NE (1Q - 1º Quadrante), SE (2Q - 2º Quadrante), SW (3Q - 3º Quadrante) e NW (4Q 4º Quadrante) e a zona central (ZC) de igual dimensão dos quadrantes. Obtiveram-se seis funções (Fig. 6) cuja maior ou menor discrepância dita a maior ou menor homogeneidade.

Para o estudo da isotropia determinou-se a função covariância bidimensional através da transformada inversa de Fourier do espectro de potência. O campo será anisótropo se a respectiva função covariância depender da direcção azimutal, e será isótropo se esta for circular, dependendo única e exclusivamente da distância.

Pela análise simples das Figuras 6 e 7 verifica-se que a solução A apresenta maior homogeneidade e maior isotropia. Pelo que, esta solução conduzirá a melhores resultados que a solução B em termos da aplicação da colocação. Esta conclusão é reforçada pela grande diferença entre a variância dos dados, na ordem dos 50 mgal para A e de 130 mgal para B.

Isto implica que qualquer modelo de covariância, do tipo (2.8), ajusta-se melhor à covariância empírica da solução A, devido às características de homogeneidade e isotropia.

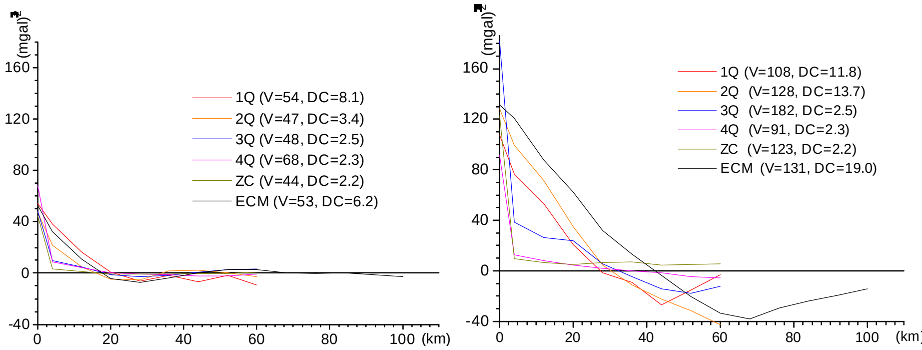

Figura 6 - Funções covariância empírica dos campos residuais A e B.

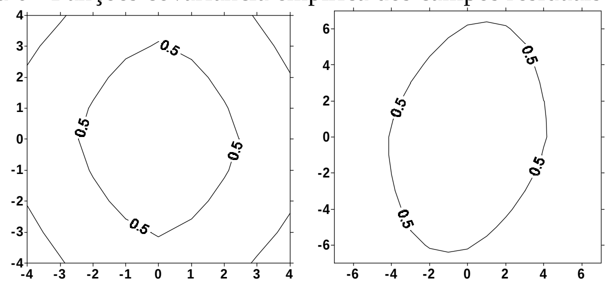

Figura 7 – Covariância empírica bidimensional dos campos residuais A e B, na zona da respectiva distância de correlação.

4.3. Resultados finais das soluções de geóide e respectiva precisão

Com os campos residuais resultantes procedeu-se ao calculo do geóide por aplicação da colocação. Foi utilizado o modelo de covarância (2.8) para as duas soluções com os seguintes valores de variância (C_0), distância de correlação ($\rho_{1/2}$) e factor de escala (*a*):

	Variância (C_0)	D. C. ($\rho_{1/2}$)	Escala (*a*)
$C_A(\rho)$	52.8 mgal	6.2 km	2.5
$C_B(\rho)$	131.0 mgal	18.9 km	1.5

Determinados os respectivos campos residuais da ondulação do geóide por colocação, foram então calculadas as tendências, da solução local pela função campo (3.3) e do modelo global EGM96 (Fig. 8). Depois de reposto o modelo de correcção topográfico-isostático e as tendências, resultaram as soluções finais do geóide (Fig. 9).

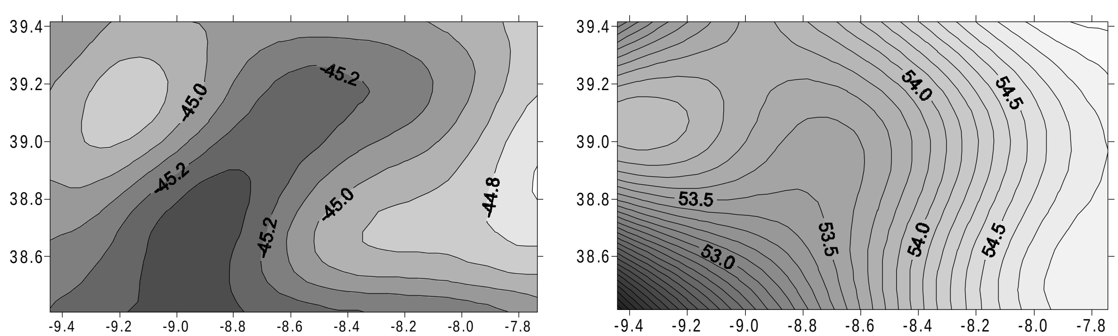

Figura 8 – Campos tendência das ondulações do geóide de solução local e EGM96.

Uma simples análise das duas soluções revela que a solução do método apresentado tem um problema de referência. Esta falta de referência está relacionada com a indeterminação da constante de integração no processo de determinação da tendência das ondulações do geóide, que neste caso corresponde a um desvio absoluto da solução na ordem dos -98m. Revela ainda, a ausência da influência dos efeitos regionais do campo gravítico, devido à não existência, neste estudo, de dados gravimétricos da zona circundante.

Estes dois problemas podem resolver-se com simplicidade. A referenciação é resolvida com a utilização de pontos de controlo, com observações de GPS e nivelamento geométrico de alta precisão, de onde resultam directamente observações de ondulação do geóide que servirão para posicionar correctamente a superfície determinada. O problema dos efeitos regionais é resolvido através da inclusão de informação adjacente, isto é, alargando a área a partir da qual se determina o campo tendência, por exemplo, em meio grau para além da zona de estudo.

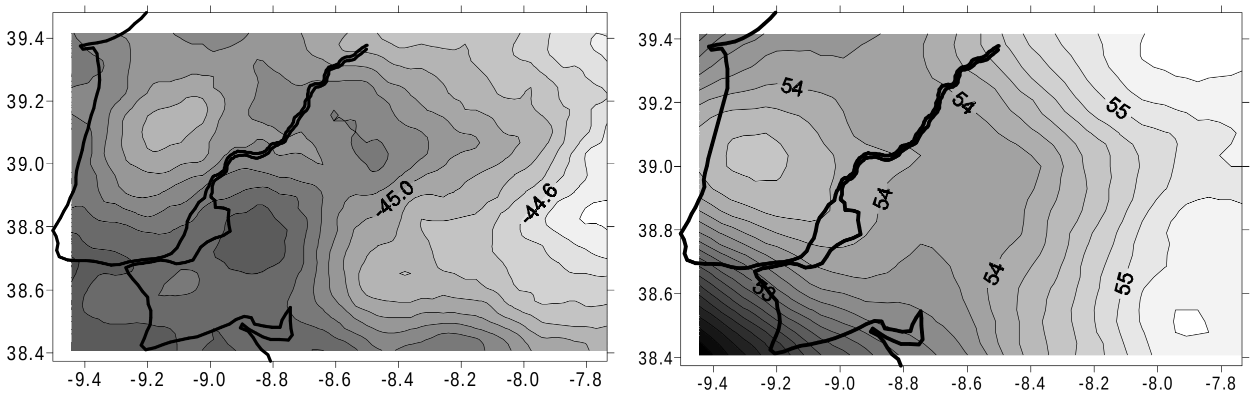

Figura 9 – Soluções locais de geóide resultantes da solução local de tendência e do EGM96.

5. Conclusões

O método revela-se extremamente simples apresentando, no entanto, alguns inconvenientes facilmente ultrapassáveis com a utilização de pontos de controlo e inclusão de observações gravimétricas das zonas adjacentes.

O erro das ondulações estimadas através da matriz de variâncias dada pela expressão (2.3) para o método apresentado foi inferior, situado na ordem de 2cm contra os 4cm da solução com o EGM96. No entanto, apesar de este dado ser um bom indício, só com a observação directa de ondulações do geóide em alguns pontos de controlo é possível tirar ilações sobre a precisão final. A inexistência de um bom modelo digital de terreno poderá explicar a não obtenção de melhores precisões.

Pelo facto de o campo residual das ondulações apresentar uma amplitude na ordem dos 50cm, a sua correcta determinação fará a diferença na precisão final absoluta da solução local do geóide. Não esquecendo, como é óbvio, o tratamento adequado da tendência, pois um pequeno erro nesta componente influenciará significativamente a solução final em termos absolutos, devido à sua magnitude compreendida, para esta zona, entre 51.2m e 55.0m de acordo com o modelo global EGM96.

Acreditamos que seguindo este método aqui apresentado, com um bom modelo digital de terreno e tomadas todas as precauções necessárias, é possível obter soluções locais com boa precisão, superior aos 10cm.

Referências bibliográficas

Cordel L. (1992). *A scaterred equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions*. Geophysivs, 57, 629-636.

Lemoin, F. G., *et. al.*, (1997). *The development of the NASA GSFC and NIMA Joint Geopotential Model*. In Proceedings of International Symposium on Gravity, Geoid and Marine Geodesy, GRAGEOMAR, Eds. J. Segawa, H. Fujimoto and S. Okubo, The University of Tokyo , Tokyo, Sept. 30 - Oct. 5, Springer-Verlag, pp. 461-469.

Moritz H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe.

Rapp, R., Y. Wang and N. Pavlis (1991). *The Ohio State 1991 geopotential and sea surface topography harmonic coefficient models*. Dept. of Geodetic Science and Surveying, Rep. No. 410, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Agradecimentos: Agradecemos ao IPCC por ter disponibilizado os dados e desta forma ter tornado possível este estudo.