

QUANDO A LÓGICA NÃO SE CONTENTA COM A VERDADE

GILDA FERREIRA

RESUMO

Ainda que muitas vezes sem nos apercebermos, a lógica está presente não apenas na prática matemática mas nos mais variados aspectos da nossa vida quotidiana. Noções de lógica são usadas para encadearmos o nosso raciocínio, chegarmos a conclusões válidas e tomarmos decisões fundamentadas. Quando se fala em lógica, quase garantidamente o leitor estará a pensar em lógica clássica, a lógica mais amplamente utilizada e estudada, assente no conceito de verdade. Haverá outras? A resposta é afirmativa e será ilustrada com dois exemplos que mostram que a introdução de novas lógicas não é um mero (estéril) exercício intelectual mas um caminho com um vasto leque de aplicações práticas.

1. INTRODUÇÃO

O termo “lógica” vem da palavra grega “logos” que significa “razão” e, enquanto disciplina, pode ser definida como a ciência do pensamento e raciocínio válido/racional. O seu estudo estava já presente em várias civilizações antigas remontando, no ocidente, a Aristóteles (384 ac-322 ac). Só em meados do século XIX, a lógica matemática - que explora as aplicações da lógica formal à matemática - se estabelece como um ramo próprio da matemática. Nomes como o de George Boole, Augustus De Morgan, Charles Peirce, Gottlob Frege, Giuseppe Peano e, um pouco mais tarde, Bertrand Russell e David Hilbert participam neste processo. Em menos de dois séculos, a lógica matemática tornou-se uma disciplina madura, multifacetada e com contributos importantes em outras áreas para além da matemática e da metamatemática das quais destacamos a ciência da computação. A presença de lógicos matemáticos em departamentos de filosofia, matemática e ciência da computação por todo o mundo mostra bem o carácter transversal e interdisciplinar da sua área de actuação. Actualmente a lógica matemática encontra-se *grosso modo* ramificada em 4 áreas: teoria de conjuntos, teoria da recursão, teoria de modelos e teoria da demonstração. O imbricamento entre os vários ramos é extenso sendo, por exemplo, a lógica clássica de primeira-ordem uma ferramenta transversal.

A lógica clássica, a forma mais dissiminada de pensamento matemático, baseado no paradigma da *verdade*, será justamente o tema da Secção 2 do presente artigo.

Existem contudo outras formas de raciocínio. Durante o século XX alguns matemáticos mudaram a sua atenção da *verdade* para a *justificação/demonstração*: a *lógica intuicionista*, que em vez da propagação da verdade propaga demonstrações *construtivas*, acabava de nascer. Na Secção 3, apresentaremos esta lógica e algumas das suas aplicações.

A autora agradece o apoio da FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia (bolsa SFRH/BPD/34527/2006), do CMAF - Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da Universidade de Lisboa e do NIM - Núcleo de Investigação em Matemática da Universidade Lusófona.

A lógica intuicionista não é, porém, o único caminho que conduz ao *construtivismo*. Este pode ser conseguido, por exemplo, através de uma dinâmica de consumos. A *lógica linear*, protagonista na Secção 4, em vez de propagar as noções de verdade ou demonstrabilidade, foca-se nos *recursos* e em como manter registo dos *consumos* ao longo de uma demonstração. Encerramos (Secção 5) com breves considerações sobre a existência de outras lógicas não-clássicas para além das tratadas neste artigo.

2. LÓGICA CLÁSSICA

A matemática usual, que o leitor está habituado a ler e a usar, assenta na lógica clássica. A lógica clássica baseia-se na noção de verdade. Uma asserção declarativa, bem-formada e não ambígua terá de ser necessariamente verdadeira ou falsa (não podendo ser verdadeira e falsa em simultâneo - princípio da não-contradição). Isto independentemente do que quer que se afirme ou mesmo da existência ou não de alguma verificação ou prova. De forma sucinta, a lógica clássica¹ caracteriza-se por aceitar a lei do terceiro excluído (em latim *tertium non datur*): $A \vee \neg A$ (lê-se “ A ou não A ”), independentemente do significado de A . Por exemplo, a veracidade de “*No dia 25 de Abril de 1974 choveu em Lisboa ou não choveu em Lisboa*” é um dado adquirido. Ainda que não saibamos o estado do tempo nesse dia na capital, ou bem que choveu ou bem que não choveu.

A noção que a lógica clássica pretende captar (e propagar) é a de verdade. Dado que, se A é verdadeiro então $\neg A$ é falso e se A é falso então $\neg A$ é verdadeiro,

A	$\neg A$
V	F
F	V

concluimos que $A \vee \neg A$ terá necessariamente que ter o valor lógico verdadeiro. Note que, para que uma disjunção seja verdadeira basta que uma das asserções que a compõem o seja:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Abaixo encontram-se as tabelas de verdade para outros conectivos lógicos, nomeadamente \wedge (conjunção) e \rightarrow (implicação). Relembramos que $A \wedge B$ lê-se “ A e B ” e que $A \rightarrow B$ se lê “se A então B ”.

¹Para uma formalização detalhada da lógica clássica (proposicional e de predicados) incluindo sistemas formais de derivação sugerimos a leitura de [3] (Capítulos 1 e 2), a leitura de [12] (Secções 3, 9, 12 e 13) e a consulta de [11].

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De modo equivalente², a lógica clássica pode ser caracterizada por permitir a eliminação da dupla negação $\neg\neg A \rightarrow A$ ou a técnica de demonstração por contradição (para provar A , basta partir de $\neg A$ e chegar a uma contradição).

Vamos ilustrar um tipo de argumentação válido em lógica clássica que o leitor já encontrou certamente em várias demonstrações matemáticas. Concretamente iremos demonstrar que “existem números irracionais a e b tais que a^b seja racional”.

Teorema 1. $\exists a, b \in \mathbb{R}, \text{irracional}(a) \wedge \text{irracional}(b) \wedge \text{racional}(a^b)$.

Demonstração. Consideremos o número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Se for racional temos o pretendido, basta tomar a e b como sendo ambos o número irracional $\sqrt{2}$. Caso contrário, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ será irracional. Mas então

$$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

que é certamente um número racional. Bastando neste caso tomar $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$. □

A demonstração anterior tem por base o princípio do terceiro excluído: “ $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é um número racional ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ não é um número racional”.

Rapare contudo que, mesmo depois de ver a demonstração, se alguém lhe pedir número irracionais a e b tais que a^b seja racional, não terá nenhum exemplo seguro para fornecer, pois não sabe qual dos casos se dá, i.e. não sabe se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional.

A demonstração acima não é construtiva. Prova-se a existência de dois irracionais nas condições do enunciado sem os apresentar concretamente.

Note a diferença para a demonstração que se segue, esta sim, construtiva.

Demonstração. Considere os números irracionais $a := \sqrt{2}$ e $b := 2\log_2 3$. Temos que

$$a^b = (\sqrt{2})^{2\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3 \in \mathbb{Q}.$$

\therefore Existem números irracionais a e b tais que a^b seja racional. □

O leitor concordará certamente que a segunda demonstração é mais informativa que a primeira. Elementos precisos nas condições do enunciado são apresentados.

²Esta equivalência pressupõe a lógica clássica formalizada num sistema formal com axiomas e regras de dedução, e.g. sistema de Hilbert, cálculo de sequentes, cálculo de dedução natural etc. Para uma apresentação detalhada dos primeiros dois sistemas consulte [2], o sistema de dedução natural, a par com os outros dois sistemas, é apresentado em [18] e [12].

Embora os princípios da lógica clássica possam ser muito intuitivos e as aplicações imensas - só a título de exemplo a lógica de primeira-ordem³ está na base da linguagem de programação Prolog [16], tem aplicações na verificação sequencial de programas, no design de circuitos, em robótica, em inteligência artificial, em processamento de língua natural etc. - não são a única forma de raciocínio. Dependendo do ponto de vista e dos objectivos a alcançar, poderá ser vantajoso usar outras lógicas.

3. LÓGICA INTUICIONISTA

A busca do *construtivo* em oposição ao meramente *verdadeiro* surgiu nos finais do século XIX em resposta ao uso cada vez mais generalizado de noções e métodos abstractos/infinitários na prática matemática. O surgimento de paradoxos e inconsistências na formalização inicial da teoria de conjuntos, em plena viragem do século, veio aumentar os receios que a matemática não estivesse alicerçada em pilares sólidos. Os matemáticos dividiam-se então entre os que achavam que o raciocínio clássico devia ser permitido, e haveria forma de o justificar finitisticamente (como David Hilbert) e os que achavam (como L. E. J. Brouwer) que a matemática devia evitar argumentos não construtivos. Para uma percepção mais palpável do clima intelectual (com vigorosas discussões) que se vivia à época sugerimos a leitura de [6].

Há inúmeras variantes no construtivismo. Provavelmente a mais conhecida é o *intuicionismo*, introduzido por Brouwer no início do século XX como um programa de reconstrução da matemática. Mais tarde a lógica intuicionista seria rigorosamente formalizada através de matemáticos como Arend Heyting, Andrey Kolmogorov, Valery Glivenko, Gerhard Gentzen, Kurt Gödel ou Dag Prawitz.

O intuicionismo caracteriza-se por não aceitar, ao contrário da lógica clássica, o princípio do terceiro excluído $A \vee \neg A$.

Como a lógica por detrás do intuicionismo é uma de demonstrabilidade e não de verdade, para que $A \vee \neg A$ seja aceite (i.e. para se ter uma prova de $A \vee \neg A$) seria preciso termos uma prova de A ou uma prova de $\neg A$.

Ora afirmações como

“ P é igual a NP ou P não é igual a NP”⁴

não são intuicionisticamente aceites pois não temos uma prova de $P = NP$ nem da sua negação.

Enquanto o leitor terá experiência em ver se uma asserção é válida classicamente ou não (a propagação da verdade ao longo dos conectivos proposicionais \neg , \wedge , \vee , \rightarrow e a noção de verdade associada aos quantificadores \forall e \exists são prática comum), poderá estar a interrogar-se: “Como saber se uma asserção é válida intuicionisticamente?”.

Informalmente pense na propagação de demonstrabilidade.

³Também conhecida por cálculo de predicados.

⁴Relembramos que a questão P ser ou não igual a NP, colocada em 1971 por Stephen Cook, continua em aberto e a resposta poderá ter enorme impacto em ciência da computação. O Clay Mathematics Institute oferece desde o ano 2000 um prémio de um milhão de dólares a quem apresente a primeira resposta correcta à questão. Para uma explicação do problema P versus NP sugerimos a consulta de [5].

Por exemplo $A \wedge B$ será válida intuicionisticamente se tivermos ambas, uma prova de A e uma prova de B . A ideia é que ambas, em conjunto, constituem uma prova da conjunção.

A implicação $A \rightarrow B$ será válida intuicionisticamente, i.e. temos uma prova da implicação, se para cada prova de A formos capazes de produzir uma prova de B . Ter uma prova de $\exists xA(x)$ é ter um elemento a do domínio de x e uma prova de $A(a)$. Uma prova de $\neg A$ é uma construção que transforma cada suposta prova de A numa contradição.

Para uma completa formalização da lógica intuicionista consulte [10].

Dado o seu carácter construtivo, a lógica intuicionista tem não só aplicações em matemática mas também em teoria da computação, funcionando como base para expressar especificações e verificar programas. Um momento chave na ligação entre lógica intuicionista e teoria da computação deu-se com o *isomorfismo de Curry-Howard* [15], quando estes dois matemáticos se aperceberam que deduções intuicionistas apenas com implicação correspondiam à linguagem funcional conhecida como *cálculo-lambda simplesmente tipado*. A lógica era uma linguagem de programação e a linguagem de programação uma lógica.

Voltando às duas demonstrações apresentadas na secção anterior, embora ambas classicamente válidas, deve agora ser claro que só a última é aceite intuicionisticamente (a primeira usa o princípio do terceiro excluído).

Formalizando convenientemente as lógicas clássica e intuicionista num sistema formal (axiomas + regras de dedução), podemos expressar a primeira (*LC*) como a segunda (*LI*) enriquecida com um único axioma: a lei do terceiro excluído, i.e.

$$LC = LI + (A \vee \neg A).$$

Embora totalmente correcto, o último parágrafo pode levar o leitor ao engano, concluindo por exemplo que a lógica clássica seria mais abrangente, enquanto a lógica intuicionista validaria menos expressões. Afinal $A \vee \neg A$ é válida classicamente mas não intuicionisticamente.

Tal é apenas uma ilusão!

A lógica intuicionista é muito mais poderosa, podendo expressar todo o raciocínio clássico. O segredo está em que devemos perceber os conectivos da lógica intuicionista não na mesma dinâmica dos da lógica clássica mas como um refinamento destes.

Ora vejamos:

enquanto classicamente (pelas leis de De Morgan e da dupla negação) se tem que $A \vee B$ é logicamente equivalente a $\neg(\neg A \wedge \neg B)$, i.e.

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

ou seja classicamente a disjunção coincide com a negação da conjunção das negações (e portanto a validade de uma segue automaticamente da validade da outra), intuicionisticamente são asserções distintas.

Analisemos o seguinte caso particular (em que B é $\neg A$). Classicamente temos:

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge A)$$

que como sabemos é uma equivalência entre asserções válidas (verdadeiras).

Ora intuicionisticamente, como já vimos, $A \vee \neg A$ não é, em geral, válida (nem sempre se consegue exibir uma prova de A ou de $\neg A$) mas $\neg(\neg A \wedge A)$ é intuicionisticamente válida (qualquer suposta prova de $\neg A \wedge A$, i.e. uma prova de A e uma prova de $\neg A$, nos levaria a uma contradição).

Enquanto no cálculo clássico a disjunção não acrescenta absolutamente nada em relação à negação e à conjunção, podendo ser definida através destes últimos conectivos, a disjunção intuicionista é algo novo, um grau de refinamento acima, inexistente na lógica clássica.

Idêntico comentário poderia ser feito em relação ao quantificador existencial. Em lógica clássica \exists podia não ser um símbolo primitivo, sendo simplesmente definido através da negação e do quantificador universal através de

$$\exists x A(x) :\Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x).$$

Quando classicamente afirmamos que $\exists x A(x)$ não é necessário que conheçamos nenhum elemento nessas condições, basta saber que não é verdade que nenhum esteja nessas condições; em lógica intuicionista $\exists x A(x)$ é mais forte que $\neg \forall x \neg A(x)$, realmente requer a apresentação da testemunha.

Que o raciocínio intuicionista é um refinamento do raciocínio clássico, contendo este último, fica evidente através do seguinte (bem conhecido) resultado que apresenta uma tradução⁵ da lógica clássica na lógica intuicionista:

Proposição 2. *Considere a seguinte tradução $(\cdot)^\dagger$ de fórmulas da lógica clássica em fórmulas da lógica intuicionista, definida indutivamente por⁶:*

$$\begin{aligned} A_{\text{at}}^\dagger & :\equiv \neg \neg A_{\text{at}}, \quad \text{se } A_{\text{at}} \text{ é uma fórmula atômica} \\ (A \wedge B)^\dagger & :\equiv A^\dagger \wedge B^\dagger \\ (A \vee B)^\dagger & :\equiv \neg(\neg A^\dagger \wedge \neg B^\dagger) \\ (A \rightarrow B)^\dagger & :\equiv A^\dagger \rightarrow B^\dagger \\ (\neg A)^\dagger & :\equiv \neg A^\dagger \\ (\forall x A)^\dagger & :\equiv \forall x A^\dagger \\ (\exists x A)^\dagger & :\equiv \neg \forall x \neg A^\dagger \end{aligned}$$

Se A é classicamente válida então A^\dagger é intuicionisticamente válida.

Demonstração. A demonstração é por indução no tamanho da derivação de A em lógica clássica⁷. Veja [15]. \square

⁵Existem variadíssimas traduções da lógica clássica na lógica intuicionista tendo sido a primeira introduzida por Kolmogorov [9] em 1925. Para um estudo comparativo das traduções mais frequentes na literatura veja [7].

⁶Uma fórmula atômica, abaixo representada por A_{at} , é uma fórmula que não contém nenhuma fórmula mais simples, ou seja, é uma fórmula que não contém \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \forall nem \exists .

⁷Estamos a considerar sistemas dedutivos formais (correctos e completos) para a lógica clássica e para a lógica intuicionista.

Ou seja, temos uma imersão da lógica clássica na lógica intuicionista.

4. LÓGICA LINEAR

Por volta de 1987, motivado por um entendimento mais profundo da semântica do cálculo-lambda, Jean-Yves Girard [8] introduz uma nova lógica, a *lógica linear*. Enquanto a lógica clássica assenta no conceito de verdade e a lógica intuicionista no de demonstrabilidade, a lógica linear pretende captar a ideia de *posse de recursos e consumos*. Embora, com esta parca descrição, a ligação não se adivinhe de imediato, veremos adiante que a lógica linear é muitíssimo expressiva, sendo inclusive um refinamento da lógica clássica e da intuicionista.

Tentemos motivar a ideia por detrás da lógica linear com um exemplo. Suponha que sabe que as seguintes asserções são válidas:

1. A
2. $A \rightarrow B$
3. $A \rightarrow C$.

Num raciocínio clássico ou intuicionista poderíamos concluir que A , B e C são todas asserções válidas. Em lógica clássica basta atentar na tabela de verdade para a implicação apresentada na Secção 2: implicações verdadeiras com antecedente verdadeiro têm de ter conseqüente verdadeiro. Em lógica intuicionista basta observar que se estamos na posse de uma prova de A e temos forma de a partir de uma prova de A chegar não só a uma prova de B mas também a uma prova de C , no final garantimos provas para A , B e C .

O raciocínio da lógica linear é diferente. Pense em recursos e na implicação $A \rightarrow B$ como indicando que tendo o recurso A posso produzir o recurso B (note contudo que nesse processo o recurso inicial A é consumido). Se temos A e se sabemos que de A podemos produzir B e de A podemos produzir C , em lógica linear podemos deduzir B ou deduzir C , mas não ambos. Usar A na implicação 2. acima irá consumi-lo, não estando já mais disponível para a implicação 3. e vice-versa.

Note que a lógica por detrás das receitas culinárias ou das experiências químicas é linear. Como veremos no final da secção, o universo de aplicações deste tipo de raciocínio é todavia muito mais vasto!

Enquanto na lógica clássica e intuicionista usamos os mesmos símbolos \neg , \wedge , \vee , \rightarrow para designar conectivos ainda que com diferentes graus de refinamento consoante a lógica (relembramos, por exemplo, que o \vee intuicionista é mais refinado do que o \vee clássico), em lógica linear usamos símbolos diferentes, correspondendo, nalguns casos, a uma duplicação dos conectivos anteriores.

Por exemplo a implicação da lógica linear, a tal que segue a dinâmica do consumo de recursos, é denotada por \multimap para a distinguir da habitual \rightarrow .

De ora em diante, por lógica linear referimo-nos à lógica linear intuicionista e não à lógica linear clássica (esta última tem mais conectivos sem ganho em poder expressivo).

A título de curiosidade na lógica linear além de \multimap existem (entre outros) conectivos como:

$\otimes, \&, !$.

Para uma completa apresentação da sintaxe da lógica linear consulte [17].

Os conectivos \otimes e $\&$ correspondem a diferentes formas de \wedge .

Imagine que de $A \wedge B$ se deduz C e que nessa dedução ambos A e B são essenciais. Essa noção cumulativa (multiplicativa) de conjunção é expressa em lógica linear pelo conectivo \otimes . Num cenário diferente imagine que de A se deduz C , então obviamente pode concluir que de $A \wedge B$ se deduz C . Nesta última conjunção para deduzir C não precisa de A e B em simultâneo, escolhe qual deles usa, neste caso o A . Esta última noção não-cumulativa (aditiva) de conjunção é captada pelo conectivo $\&$. É usual pensar-se em \otimes como significando “ambos” e em $\&$ como “estando ambos disponíveis (e daí o seu carácter conjuntivo) optamos por apenas um”. O exemplo seguinte ajuda a ilustrar a coexistência das duas formas de conjunção. Imagine uma máquina de refrigerantes que contém dois tipos de bebidas A e B , custando 1 euro cada, e que o valor que introduzimos na máquina tem de coincidir exactamente com o custo dos produtos seleccionados. Se introduzirmos 2 moedas de 1 euro podemos obter $A \otimes B$ mas não $A \& B$. Note que na primeira situação ($A \otimes B$) adquirimos ambas as bebidas, o que corresponde exactamente ao valor dos 2 euros introduzidos na máquina. Na segunda situação ($A \& B$) ambos os recursos estão disponíveis (i.e. existem na máquina ambas as bebidas) mas vemo-nos obrigados a optar por apenas uma delas, e qualquer uma das bebidas isoladamente não corresponde a um custo de 2 euros. Todavia, se introduzirmos apenas 1 euro na máquina obtemos $A \& B$, i.e. podemos escolher qual a bebida que queremos de entre A e B , mas não $A \otimes B$ pois a máquina não libertará ambas as bebidas mediante o pagamento de apenas 1 euro.

O conectivo $!$ (que se lê *bang*) existe em lógica linear para que, com o foco em manter registo de consumos, não se perca a expressividade das lógicas anteriores. Essencialmente quando temos $!A$ podemos pensar no recurso A como sendo ilimitado, isto é temos tantas cópias de A quantas queiramos. É como se nessa situação em particular escolhessemos deixar de pensar em consumíveis para voltar à dinâmica da verdade ou da demonstrabilidade. Com o exponencial $!$ a lógica linear capta facilmente o raciocínio intuicionista e, por maioria de razão, o clássico.

A afirmação anterior é confirmada pela tradução abaixo⁸ (uma das várias possíveis) da lógica intuicionista na lógica linear:

Proposição 3. *Considere a seguinte tradução $(\cdot)^*$ de fórmulas da lógica intuicionista para fórmulas da lógica linear, definida indutivamente por:*

$$\begin{aligned}
 A_{\text{at}}^* & : \equiv A_{\text{at}}, \quad \text{se } A_{\text{at}} \not\equiv \perp \text{ é uma fórmula atómica} \\
 \perp^* & : \equiv 0 \\
 (A \wedge B)^* & : \equiv A^* \& B^* \\
 (A \vee B)^* & : \equiv !A^* \oplus !B^* \\
 (A \rightarrow B)^* & : \equiv !A^* \multimap B^* \\
 (\forall x A)^* & : \equiv \forall x A^* \\
 (\exists x A)^* & : \equiv \exists x !A^*
 \end{aligned}$$

⁸A tradução usada na Proposição 3 foi apresentada por Girard em [8].

Se A se prova em lógica intuicionista então A^ prova-se em lógica linear.*⁹

Demonstração. A demonstração sai fora do âmbito deste artigo. Consulte [14]. \square

Ou seja, existe uma imersão da lógica intuicionista, e portanto também da clássica, na lógica linear.

Note que o conectivo intuicionista \rightarrow corresponde em lógica linear a \multimap com o antecedente precedido por $!$. Tal vem completamente de encontro à discussão dos conectivos feita anteriormente: a implicação \rightarrow , ao contrário de \multimap , não consome o antecedente, razão pela qual é traduzida recorrendo a $!$ que torna o recurso ilimitado.

A lógica linear foi acolhida com grande entusiasmo por lógicos matemáticos mas também (até talvez mais enfaticamente) por investigadores em ciência da computação. Dada a sua capacidade de controlar recursos captou imediatamente o interesse de designers de linguagens de programação. Note que, por exemplo na implementação de software, a gestão de recursos é uma questão de grande relevância. Entre outras, destacamos a aplicação da lógica linear à programação funcional, à inteligência artificial e à teoria da simultaneidade (*concurrency*). Veja [4].

Dos inúmeros artigos científicos que anualmente surgem sobre lógica linear, apenas uma minoria é sobre a lógica linear em si mesma, sendo a maioria trabalhos em que a lógica linear é aplicada com sucesso a diversas áreas (praticamente todas) da ciência da computação, algumas com enorme impacto prático. Tal facto espelha bem o carácter multidisciplinar da lógica introduzida por Girard.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não queremos de forma alguma que o leitor fique com a ideia que as lógicas levemente dadas a conhecer neste artigo - intuicionista e linear - esgotam o leque das lógicas não-clássicas. Tal está completamente longe da verdade. A título de exemplo apontamos outras duas: a *lógica modal* [1] (que permite expressar conceitos como o de possibilidade, necessidade, probabilidade, eventualidade,... e tem aplicações a diversas áreas da ciência da computação, e.g. inteligência artificial, engenharia de software, linguística computacional) e a *lógica fuzzy* [13] (que lida com raciocínio que não é exacto nem fixo, mas sim aproximado: o valor de verdade varia no intervalo real $[0,1]$ e tem notáveis aplicações práticas. Talvez a mais mediática tenha sido o uso de lógica fuzzy para controlar comboios de alta velocidade em Sendai, Japão, aumentando consideravelmente a eficiência e o conforto e diminuindo o tempo de paragem. Entre outras aplicações concretas destacamos o reconhecimento de escrita manual em plataformas digitais, a previsão de terremotos e o controlo da ventilação dos sistemas de ar condicionado).

AGRADECIMENTOS

A autora agradece ao revisor anónimo sugestões pertinentes nomeadamente em termos de bibliografia.

⁹Pense no símbolo \perp como significando absurdo (é comum formular a lógica clássica e intuicionista numa linguagem em que os símbolos primitivos são \perp , \wedge , \vee , \rightarrow , \forall e \exists e definir $\neg A$ como abreviando $A \rightarrow \perp$). Os símbolos 0 e \oplus devem ser entendidos como uma versão linear do falso e da disjunção. Para uma completa formulação das lógicas intuicionista e linear consulte a Secção 3 de [2].

REFERÊNCIAS

- [1] P. Blackburn, M. Rijke, Y. Venema. *Modal Logic*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53, Cambridge University Press, 2002.
- [2] S. Buss. *Handbook of Proof Theory*, An Introduction to Proof Theory. Edited by S. R. Buss, Elsevier Science, 1998.
- [3] D. van Dalen. *Logic and Structures*. Springer-Verlag (fourth edition), 2008.
- [4] T. Ehrhard, J.-Y. Girard, P. Ruet, P. Scott. *Linear Logic in Computer Science*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 316, Cambridge University Press, 2004.
- [5] F. Ferreira. O problema P versus NP. Em “*2000 Matemática Radical*”. Colectânea organizada por Miguel Ramos, Jorge Nuno Silva e Luís Trabucho. Textos de Matemática, Departamento de Matemática da Universidade de Lisboa, pp. 1-15, 2002.
- [6] F. Ferreira. *Grundlagenstreit* e o intuicionismo Brouweriano. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*. 58:1-23, 2008.
- [7] G. Ferreira, P. Oliva. On the relation between various negative translations *Logic, Construction, Computation*. Ontos-Verlag Mathematical Logic Series, 3:227-258, 2012.
- [8] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1):1-102, 1987.
- [9] A.N. Kolmogorov. On the principle of the excluded middle (Russian) *Mat. Sb.*, 32:646-667, 1925.
- [10] G. Mints. A Short Introduction to Intuitionistic Logic. *The University Series in Mathematics*, Springer US, 2002.
- [11] Augusto J. Franco de Oliveira. *Lógica e aritmética: uma introdução informal aos métodos formais*. Gradiva, Lisboa, 1991.
- [12] Augusto J. Franco de Oliveira. *Sistemas dedutivos*. Publicação online acessível em: <https://sites.google.com/site/tutasplace/Home/cursos>.
- [13] T. Ross. *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Wiley, 2004.
- [14] H. Schellinx. Some syntactical observations on linear logic. *Journal of Logic and Computation*, 1(4):537-559, 1991.
- [15] M.H. Sørensen, P. Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism*. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 149, Elsevier, 2006.
- [16] L. Sterling, E. Shapiro. *The Art of Prolog*. MIT Press Series in Logic Programming, second edition, 1994.
- [17] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic*. Center of the Study of Language and Information - Lecture Notes, 29, 1992.
- [18] A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory, second edition*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 43, Cambridge University Press, 2000.

GILDA FERREIRA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE LUSÓFONA DE HUMANIDADES E TECNOLOGIAS, AV. DO CAMPO GRANDE, 376, 1749-024 LISBOA, PORTUGAL E CMAF - CENTRO DE MATEMÁTICA E APLICAÇÕES FUNDAMENTAIS (GILDAFER@CII.FC.UL.PT)