

CONTAGEM DOS PONTOS INTEIROS DE UM POLÍTOPO

JOSÉ AGAPITO

RESUMO. O propósito deste artigo é ilustrar mediante exemplos e desenhos fáceis de entender um fenómeno interessante que é válido em qualquer dimensão: a soma de funções racionais que representam séries infinitas dá origem a um polinómio que representa uma série finita. Este resultado conhecido como o Teorema de Brion apresenta uma forma de fazer a contagem dos pontos inteiros de um polítopo convexo.

ABSTRACT. The purpose of this article is to illustrate through easy examples and pictures an interesting phenomenon that is valid in any dimension: the sum of rational functions representing infinite series gives rise to a polynomial representing a finite series. This result known as Brion's theorem shows a way of counting lattice points of a convex polytope.

1. A FÓRMULA DE BRION

Comecemos por considerar os pontos inteiros na recta real. A cada número inteiro $m \in \mathbb{Z}$ associamos o monómio x^m , com $x \in \mathbb{C}$, de modo que para um intervalo I qualquer em \mathbb{R} associamos a soma

$$(1) \quad \sigma_I(x) = \sum_{m \in I \cap \mathbb{Z}} x^m,$$

que chamaremos função geratriz de I . Por exemplo, os pontos inteiros no intervalo $I = [10, 48]$ são representados pelo polinómio

$$\sigma_I(x) = x^{10} + x^{11} + \dots + x^{47} + x^{48}.$$

Usando álgebra elementar obtém-se

$$(2) \quad x^{10} + x^{11} + \dots + x^{47} + x^{48} = \frac{x^{10} - x^{49}}{1 - x}.$$

Se prestarmos um pouco de atenção, estamos a comparar em (2) um polinómio que está definido para qualquer $x \in \mathbb{C}$ com uma função racional que não está definida em $x = 1$. Embora a equação (2) não seja totalmente correcta, para efeitos de contagem dos pontos inteiros em I , serve tanto uma como a outra. Por exemplo, temos que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - x^{49}}{1 - x} = 39 = \sigma_I(1).$$

Uma vantagem evidente da representação racional sobre a polinomial é que a primeira é mais compacta.

Por outro lado, formalmente (sem nos preocupar por questões de convergência) podemos rescrever

$$(3) \quad \frac{x^{10} - x^{49}}{1 - x} = \frac{x^{10}}{1 - x} + \frac{x^{48}}{1 - x^{-1}},$$

onde as funções racionais na soma à direita da equação (3) representam as funções geratrizes das semi-rectas $[10, \infty)$ e $(-\infty, 48]$ respectivamente, vale dizer,

$$\sigma_{[10, \infty)}(x) = \sum_{m \geq 10} x^m = \frac{x^{10}}{1 - x} \quad \text{e} \quad \sigma_{(-\infty, 48]}(x) = \sum_{m \leq 48} x^m = \frac{x^{48}}{1 - x^{-1}}.$$

Deste modo, conclui-se que

$$(4) \quad \sigma_{[10, 48]} = \sigma_{[10, \infty)} + \sigma_{(-\infty, 48]}.$$

Analiticamente, a equação (4) não faz sentido para nenhum $x \in \mathbb{C}$; a série infinita $\sigma_{[10, \infty)}$ converge para $|x| < 1$, a série infinita $\sigma_{(-\infty, 48]}$ converge para $|x| > 1$, enquanto a série finita $\sigma_{[10, 48]}$ converge para todo $x \in \mathbb{C}$. Ainda assim, o fenómeno que nos interessa salientar é o seguinte: *a soma de funções racionais que representam séries infinitas dá origem a um polinómio que representa uma série finita.*

Similarmente, evitando sempre questões analíticas, temos que

$$(5) \quad \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - x^{-1}} - 1 = 0.$$

Portanto, se definimos $\sigma_{(-\infty, \infty)} = 0$, na terminologia de funções geratrizes a identidade (5) escreve-se

$$(6) \quad \sigma_{[0, \infty)} + \sigma_{(-\infty, 0]} - \sigma_{\{0\}} = \sigma_{(-\infty, \infty)} .$$

Fazer que $\sigma_{(-\infty, \infty)} = 0$, não é uma má definição, uma vez que em (6) cada monómio x^m (e portanto cada $m \in \mathbb{Z}$) é contado só uma vez, que é o que nos interessa (ver Figura 1). Logo, podemos também escrever (4) como

$$(7) \quad \sigma_{[10, 48]} = \sigma_{[10, \infty)} + \sigma_{(-\infty, 48]} - \sigma_{(-\infty, \infty)} .$$

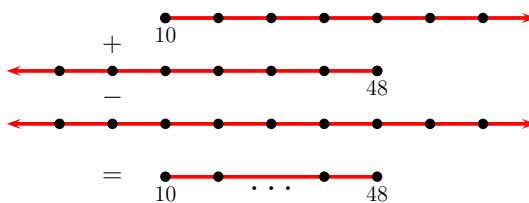


FIGURA 1. $\mathbf{1}_{[10, \infty)} + \mathbf{1}_{(-\infty, 48]} - \mathbf{1}_{(-\infty, \infty)} = \mathbf{1}_{[10, 48]}$

O leitor seguramente se perguntará se será possível encontrar uma identidade similar a (4) em dimensões maiores que 1. Vejamos o seguinte exemplo. Consideremos o triângulo Δ com vértices A , B e C ilustrado na Figura 2.

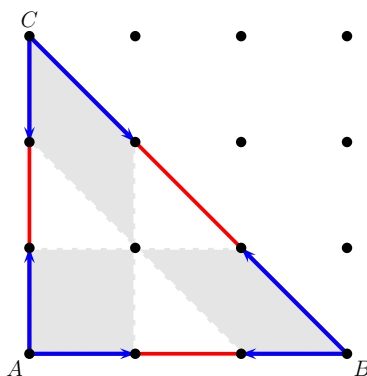


FIGURA 2. Triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (0, 3)$

Em analogia com a definição dada em (1), a função geratriz de Δ é

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta}(x, y) &= \sum_{(m,n) \in \Delta \cap \mathbb{Z}^2} x^m y^n = x^0 y^0 + x^1 y^0 + x^2 y^0 + x^3 y^0 + \\ &\quad + x^0 y^1 + x^1 y^1 + x^2 y^1 + x^0 y^2 + x^1 y^2 + x^0 y^3 \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + y + xy + x^2 y + y^2 + xy^2 + y^3.\end{aligned}$$

Por outro lado, as semi-rectas do exemplo anterior são substituídas neste caso por cones gerados pelos lados do triângulo com vértices iguais aos vértices de Δ . Assim, temos os seguintes cones:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_A &= (0, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0, 1), \\ \mathbf{C}_B &= (3, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-1, 1), \\ \mathbf{C}_C &= (0, 3) + \mathbb{R}_{\geq 0}(0, -1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, -1),\end{aligned}$$

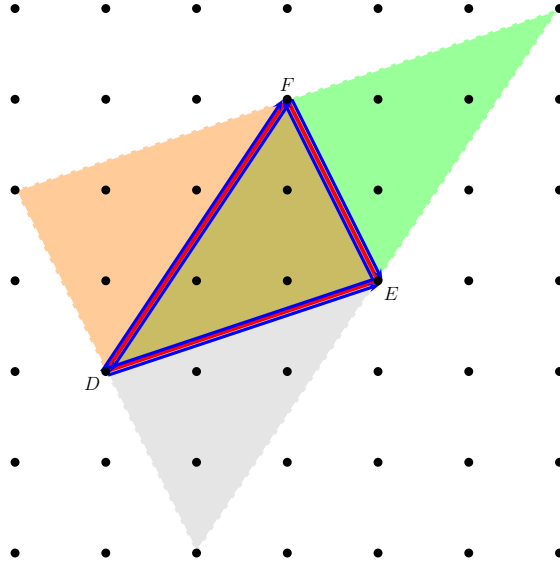
e as funções geratrizes associadas a eles são respectivamente

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{C}_A}(x, y) &= x^0 y^0 \cdot \sum_{m \geq 0} (x^1 y^0)^m \cdot \sum_{n \geq 0} (x^0 y^1)^n \\ &= \frac{x^0 y^0}{(1 - x^1 y^0)(1 - x^0 y^1)}, \\ \sigma_{\mathbf{C}_B}(x, y) &= x^3 y^0 \cdot \sum_{m \geq 0} (x^{-1} y^0)^m \cdot \sum_{n \geq 0} (x^{-1} y^1)^n \\ &= \frac{x^3 y^0}{(1 - x^{-1} y^0)(1 - x^{-1} y^1)}, \\ \sigma_{\mathbf{C}_C}(x, y) &= x^0 y^3 \cdot \sum_{m \geq 0} (x^0 y^{-1})^m \cdot \sum_{n \geq 0} (x^1 y^{-1})^n \\ &= \frac{x^0 y^3}{(1 - x^0 y^{-1})(1 - x^1 y^{-1})}.\end{aligned}$$

Ao somar formalmente todas elas obtemos

$$(8) \quad \sigma_{\mathbf{C}_A}(x, y) + \sigma_{\mathbf{C}_B}(x, y) + \sigma_{\mathbf{C}_C}(x, y) = \sigma_{\Delta}(x, y).$$

O fenómeno que observámos em dimensão 1 repete-se em dimensão 2.

FIGURA 3. Triângulo de vértices $D = (0, 0)$, $E = (3, 1)$ e $F = (2, 3)$

Contudo, alguém suspicaz podia pensar que a identidade (8) é uma feliz coincidência devida ao facto de termos escolhido um caso muito especial. De facto, se considerarmos o triângulo Δ de vértices D , E e F ilustrado na Figura 3, temos que

$$\sigma_{\Delta}(x, y) = 1 + xy + x^2y + x^3y + x^2y^2 + x^2y^3,$$

e por analogia com o exemplo anterior, provavelmente diremos que as funções geratrizes dos cones

$$\mathbf{C}_D = (0, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0}(3, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(2, 3),$$

$$\mathbf{C}_E = (3, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-3, -1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-1, 2),$$

$$\mathbf{C}_F = (2, 3) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-2, -3) + \mathbb{R}_{\geq 0}(1, -2),$$

são respectivamente

$$(9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathbf{C}_D}(x, y) &= \frac{x^0y^0}{(1 - x^3y^1)(1 - x^2y^3)}, \\ \sigma_{\mathbf{C}_E}(x, y) &= \frac{x^3y^1}{(1 - x^{-3}y^{-1})(1 - x^{-1}y^2)}, \\ \sigma_{\mathbf{C}_F}(x, y) &= \frac{x^2y^3}{(1 - x^{-2}y^{-3})(1 - xy^{-2})}. \end{aligned}$$

Não obstante, constatamos que

$$\sigma_{\mathbf{C}_D}(x, y) + \sigma_{\mathbf{C}_E}(x, y) + \sigma_{\mathbf{C}_F}(x, y) \neq \sigma_{\Delta}(x, y).$$

Este problema aparente é fácil de ultrapassar. Se repararmos bem, nas funções racionais em (9) não estamos a contar os pontos do triângulo contidos nos paralelogramos *fundamentais* semi-abertos gerados pelos lados de cada cone. Por exemplo, o paralelogramo semi-aberto associado ao cone \mathbf{C}_D é

$$\mathcal{P}_D = D + \lambda_1(3, 1) + \lambda_2(2, 3) \quad \text{com} \quad 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1,$$

e o módulo do determinante da matriz formada pelos geradores de \mathbf{C}_D é

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

que é igual ao número de pontos inteiros contidos em \mathcal{P}_D . Destes sete pontos, só quatro estão contidos no triângulo Δ (ver Figura 3). Similarmente, pode-se verificar que \mathcal{P}_E e \mathcal{P}_F tem também sete pontos inteiros dos quais quatro deles estão contidos em Δ (isto sim é uma feliz coincidência). Logo, se incluirmos os monómios correspondentes a estes pontos inteiros nas funções racionais mostradas em (9), podemos agora sim ter a plena certeza que

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_{\mathbf{C}_D}(x, y) &= \frac{x^0y^0 + xy + x^2y + x^2y^2}{(1 - x^3y^1)(1 - x^2y^3)}, \\ \sigma_{\mathbf{C}_E}(x, y) &= \frac{x^3y + xy + x^2y + x^2y^2}{(1 - x^{-3}y^{-1})(1 - x^{-1}y^2)}, \\ \sigma_{\mathbf{C}_F}(x, y) &= \frac{x^2y^3 + xy + x^2y + x^2y^2}{(1 - x^{-2}y^{-3})(1 - xy^{-2})}, \end{aligned}$$

de modo que desta vez se verifica

$$(11) \quad \sigma_{\mathbf{C}_D}(x, y) + \sigma_{\mathbf{C}_E}(x, y) + \sigma_{\mathbf{C}_F}(x, y) = \sigma_{\Delta}(x, y).$$

Observe-se que no caso do triângulo de vértices A , B e C , os paralelogramos fundamentais correspondentes têm cada um deles só um ponto inteiro; precisamente os vértices do triângulo (ver Figura 2).

Em geral, para $d \geq 1$, diremos que um cone \mathbf{C} com vértice \mathbf{v} em \mathbb{R}^d é racional e simples se pode ser escrito na forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w}_i,$$

onde $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^d$ e os vectores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d \in \mathbb{Z}^d$ são linearmente independentes, o que equivale a dizer que o determinante da matriz formada por $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$ é um número inteiro não nulo, como ocorre com os cones \mathbf{C}_D , \mathbf{C}_E e \mathbf{C}_F . Se para além disso, os vectores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_d$ geram o retículo \mathbb{Z}^d ; ou equivalentemente, o determinante da matriz formada por eles é 1 ou -1 , diremos que o cone é unimodular, tal como acontece com os cones \mathbf{C}_A , \mathbf{C}_B e \mathbf{C}_C .

A função geratriz de um cone racional e simples pode ser escrita como a função racional

$$\sigma_{\mathbf{C}}(x) = \frac{\sigma_{\mathcal{P}}(x)}{(1 - x^{\mathbf{w}_1}) \cdots (1 - x^{\mathbf{w}_d})},$$

onde \mathcal{P} é o paralelepípedo fundamental semi-aberto

$$\mathcal{P} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathbf{w}_i \quad \text{com} \quad 0 \leq \lambda_i < 1.$$

Note-se aqui que para $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ e $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$, a notação $x^{\mathbf{m}}$ significa $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$.

Um cone racional \mathbf{C} genérico tem a forma

$$\mathbf{C} = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^n \mathbb{R}_{\geq 0} \mathbf{w}_i,$$

com $n \geq d$, $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^d$ e $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in \mathbb{Z}^d$. Este cone pode ser decomposto em cones racionais simples $\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_l$ com interiores disjuntos dois a dois (ver por exemplo [Ba]), todos eles com o mesmo vértice \mathbf{v} e gerados por d dos vectores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$. Logo, resulta natural concluir que

$$(12) \quad \sigma_{\mathbf{C}}(x) = \sum_{i=1}^l \sigma_{\mathbf{C}_i}(x),$$

ou seja, a função geratriz do cone racional genérico \mathbf{C} é também uma função racional. Porém, aparentemente há termos no lado direito de (12) que são

contados mais de uma vez (aqueles que correspondem a pontos de \mathbb{Z}^d na fronteira comum a dois dos cones simples da decomposição de C). Em [BHS], tal problema é evitado trasladando todos os cones simultaneamente na mesma direcção.

Ora bem, triângulos e intervalos fechados são exemplos de polítopos convexos. Um polítopo convexo em \mathbb{R}^d , com $d \geq 1$ é definido como o invólucro convexo de um número finito de pontos ou como a intersecção finita e limitada de semiespaços fechados em \mathbb{R}^d . A dimensão de um polítopo é a dimensão do espaço afim gerado por ele. Assim, por exemplo, qualquer intervalo fechado em \mathbb{R} é um polítopo de dimensão 1, todo polígono (e portanto qualquer triângulo) é um 2-polítopo, uma pirâmide é um 3-polítopo, etc. Diremos também que um polítopo convexo em \mathbb{R}^d é racional quando os seus vértices têm componentes racionais e os seus lados -faces de dimensão 1- são gerados por vectores em \mathbb{Z}^d .

A generalização da magia das identidades (4), (8) e (11) a dimensões maiores que 1 e 2 deve-se ao matemático Michel Brion.

Teorema de Brion ([Br]). *Para qualquer d -polítopo convexo racional Δ em \mathbb{R}^d cumpre-se que*

$$\sigma_{\Delta}(x) = \sum_{v \text{ a vertex of } \Delta} \sigma_{C_v}(x).$$

Brion provou o seu célebre resultado usando o teorema de Lefschetz-Riemann-Roch na K-teoria equivariante, mas de facto, o mesmo resultado pode ser provado de maneira mais simples usando unicamente ferramentas de geometria discreta baseadas na contagem apropriada de pontos inteiros [BHS].

2. COMENTÁRIOS E OBSERVAÇÕES GERAIS

O Teorema de Brion não é o único da sua espécie. Lawrence [L] e Varchenko [V] encontraram uma fórmula similar onde expressam a função geratriz de um polítopo simples em \mathbb{R}^d (um polítopo de dimensão d onde d lados convergem para cada um dos seus vértices) como uma soma alternada de funções geratrizes de cones (também simples) associados aos vértices do

polítopo. A diferença do resultado de Brion, todas as funções geratrizes envolvidas na fórmula de Lawrence e Varchenko têm uma região de convergência comum (para mais detalhes ver [BHS]).

Os cones utilizados nos exemplos anteriores, à exceção da recta, são todos estritamente convexos. Uma recta, como o intervalo $(-\infty, \infty)$ ilustrado na Figura 1, é também um cone convexo mas num sentido lato. Em geral, um cone convexo genérico em \mathbb{R}^d pode conter rectas (como acontece com os cones C_{DE} , C_{DF} , C_{EF} e C_{DEF} da Figura 4). Ao igual que a recta em dimensão 1, pode-se provar que a função racional que representa a função geratriz de um cone convexo que contém rectas é a função nula [BHS].

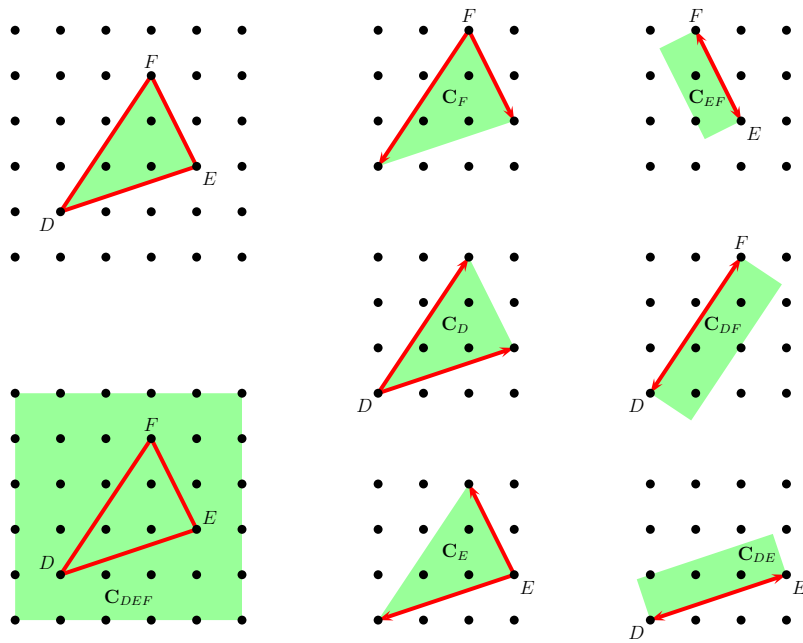


FIGURA 4. $\mathbf{1}_{\Delta_{DEF}} = \mathbf{1}_{C_D} + \mathbf{1}_{C_E} + \mathbf{1}_{C_F} - \mathbf{1}_{C_{DE}} - \mathbf{1}_{C_{DF}} - \mathbf{1}_{C_{EF}} + \mathbf{1}_{C_{DEF}}$

A identidade da Figura 1 em termos de funções características ilustra em dimensão 1, um resultado conhecido como o Teorema de Brianchon-Gram [B, G], que se verifica para qualquer d -polítopo convexo (não necessariamente racional) em \mathbb{R}^d . A Figura 4 ilustra este teorema em dimensão 2. Podemos pensar no Teorema de Brion como a versão do Teorema de Brianchon-Gram em termos de funções geratrizes racionais, onde as funções características dos cones que contém rectas são apagadas.

REFERÊNCIAS

- [B] C.J. Brianchon, *Théorème nouveau sur les polyèdres*, J. École (Royale) Polytechnique **15** (1837), 317–319.
- [Ba] A.I. Barvinok, *A course in convexity*, Graduate Studies in Mathematics, vol. **54**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2002).
- [Br] M. Brion, *Points entiers dans les polyèdres convexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **21** (1988), no. 4, 653–663.
- [BHS] M. Beck, C. Haase and F. Sottile, *Formulas of Brion, Lawrence, and Varchenko on rational generating functions for cones*, Math. Intelligencer **31** (2009), no. 1, 9–17.
- [G] J.P. Gram, *Om rumvinklerne i et polyeder*, Tidsskrift for Math. (Copenhagen) **4** (1874), no. 3, 161–163.
- [L] J. Lawrence, *Polytope volume computation*, Math. Comp. **57** (1991), no. 195, 259–271.
- [V] A.N. Varchenko, *Combinatorics and topology of the arrangement of affine hyperplanes in the real space*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (1987), no. 1, 11–22.