Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Derivadas direccionais e vector gradiente de funções $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Vectores e Rectas em $\mathbb{R}^2$.

Um **vector** em $\mathbb{R}^2$ é um par ordenado (a, b) que indica **direcção**. A diferença do ponto também denotado por (a, b), o vector tem **inúmeras representações no plano**, enquanto o ponto só tem uma (en relação ao mesmo sistema de referência ou base usada em $\mathbb{R}^2$). Para distinguí-los gráficamente, usaremos **setas** para vectores e nódoas pequeninas para pontos.

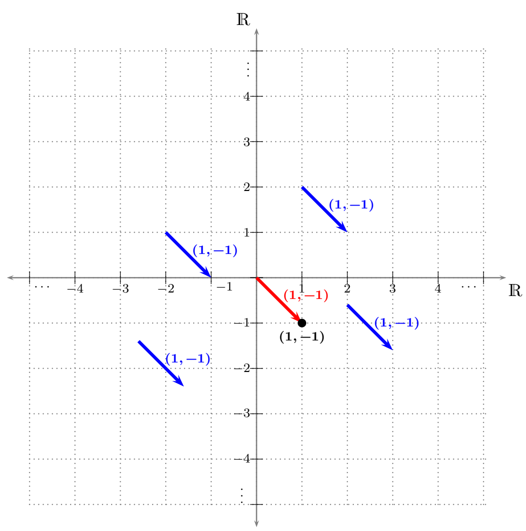

Figura 1: Vector e ponto $(1, -1)$.

As setas têm todas um ponto de partida e um ponto de chegada. Assim por exemplo, a seta em vermelho tem ponto inicial $(0, 0)$ e ponto final $(1, -1)$ e aquela no primeiro quadrante tem ponto de partida $(1, 2)$ e ponto de chegada $(2, 1)$. Em qualquer caso verifica-se que

$$(1, -1) = \text{Ponto final} - \text{Ponto inicial}.$$

A seta em vermelho recebe o nome especial de raio vector. Para denotar vectores usaremos a maior parte das vezes as letras $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, e colocaremos uma seta pequenina por cima delas para enfatizar a ideia de direcção.

A **norma** o **módulo** do vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é o número dado por

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{u_1^2 + u_2^2}\,.$$

Um vector de norma 1 chama-se **unitário**. Qualquer vector $\vec{u}$ pode ser **normalizado**, isto é, podemos construir um novo vector (na mesma direcção) de norma 1 a partir do vector original, simplesmente multiplicando-o pelo recíproco da sua norma $\|\vec{u}\|$,

$$\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right)\,.$$

Dado um ponto $p = (a, b)$ e um vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ em $\mathbb{R}^2$, a fórmula vectorial da recta $\mathscr{L}$ que passa por p na direcção $\vec{u}$ é

$$\mathscr{L}:\; p + h\,\vec{u}, \quad \text{onde } h \text{ é qualquer número real.}$$

Assim, $q \in \mathscr{L}$ se podemos encontrar algum $h \in \mathbb{R}$ para o qual $q = p + h\,\vec{u}$. Se $q = (x, y)$ então

$$q = p + h\,\vec{u} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = a + h\,u_1 \\ y = b + h\,u_2 \end{cases} .$$

As duas equações do lado direito acima indicadas chamam-se equações paramétricas (o parámetro é h) da recta $\mathscr{L}$.

Derivadas Direccionais e Derivadas parciais.

Definição 1. A **derivada direccional** de f em $p = (a, b) \in \operatorname{Dom} f$, na direcção do vector unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$, é o número real dado por

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(p) \equiv D_{\vec{u}} f(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h\,\vec{u}) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hu_1, b + hu_2) - f(a, b)}{h} .}$$

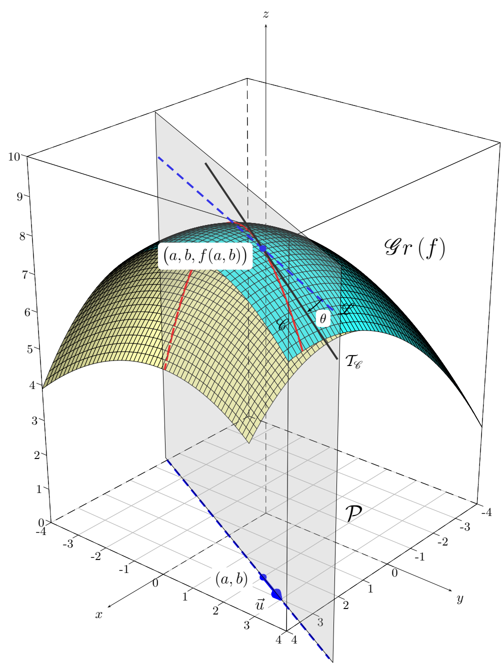

Figura 2: Interpretação geométrica da derivada direccional.

Seja $\mathcal{P}$ o plano perpendicular ao plano XY que passa pelo ponto $\big(a, b, f(a, b)\big)$ e com direcção paralela ao vector $\vec{u}$. Seja $\mathscr{C}$ a curva de intersecção do plano $\mathcal{P}$ com o gráfico $\mathscr{G}r\,(f)$ da função f. A derivada direccional de f em (a, b) na direcção do vector unitário $\vec{u}$ mede a inclinação da recta tangente $\mathcal{T}_{\mathscr{C}}$ a curva $\mathscr{C}$ no ponto $\big(a, b, f(a, b)\big)$, relativamente à recta $\mathscr{L}$ (que é paralela à recta que resulta de intersectar o plano $\mathcal{P}$ com o plano XY). Por outras palavras,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \tan\theta.}$$

Em particular, a derivada direccional de f na direcção $\vec{u} = (1, 0)$ chama-se **derivada parcial** de f em relação a x, e se denota também por $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$. Por outras palavras,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} .$$

Outras notações usadas são $f_x(a, b)$ ou $f_1(a, b)$. Similarmente, a derivada parcial de f em relação a y é a derivada direccional de f na direcção $\vec{u} = (0, 1)$, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} ,$$

que se denota também por $f_y(a, b)$ ou $f_2(a, b)$.

Observação. Em virtude da definição, para calcular as derivadas parciais de uma função num ponto arbitrário (x, y), aparentemente basta derivar a função em relação a uma variável considerando a outra como se fosse constante.

Exemplo 1. Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Encontar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

Mantendo y constante e derivando em relação a x, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \quad \text{e portanto} \quad f_x(2, 1) = 16\,.$$

Similarmente, mantendo x constante e derivando em relação a y, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - 4y \quad \text{e então} \quad f_y(2, 1) = 8\,.$$

Contudo, **temos de ter cuidado**, nem sempre podemos calcular as derivadas parciais de uma função num ponto dado da maneira como procedemos no exemplo anterior.

Exemplo 2. Calcular as derivadas parciais da seguinte função em $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Notemos que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2$ e $\operatorname{Dom}_c f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (**porque?**). Se procedemos como no caso anterior obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\,, \tag{1}$$

e por simetría no cálculo,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\,. \tag{2}$$

Certamente, as derivadas parciais calculadas em (1) e (2) fazem sentido para qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$. Mas em $(0, 0)$, se substituirmos em (1) e (2) conseguimos indeterminações. Quer isto dizer que as derivadas parciais de f em $(0, 0)$ não existem? **Obviamente que não**. Nestes casos temos de usar mesmo a definição para calcular $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Similarmente, por simetría nos cálculos obtemos $f_y(0, 0) = 0$.

Vector gradiente.

Definição 2. O vector gradiente de f no ponto (a, b), que se denota por $\nabla f(a, b)$, é o vector formado pelas derivadas parciais de f em (a, b); isto é

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,,\, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)\,.$$