Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Limites e Continuidade de funções $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Limites.

Definição 1. Seja f uma função de duas variáveis cujo **domínio** D inclui pontos arbitráriamente próximos do ponto (a,b) (que não necessáriamente pertence a D). Então, diz-se que o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) se aproxima de (a,b) é L e escreve-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \ ,$$

se para cada número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ (que depende do ε) tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{desde que} \quad (x,y) \in D \quad \text{e} \quad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \ .$$

Outras notações.

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x,y) = L \qquad , \qquad f(x,y) \to L \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (a,b)\,.$$

O número positivo $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ é a **distância entre (x,y) e (a,b)** e denota-se por $d\big((x,y),(a,b)\big)$ ou também por $\big\|(x,y)-(a,b)\big\|$. O conjunto de pontos

$$V_\delta\big((a,b)\big) = \Big\{(x,y) \in D \ : \ \big\|(x,y)-(a,b)\big\| < \delta\Big\}\,,$$

formado pelos pontos em D que distam de (a,b) em não mais do que δ, chama-se vizinhança de (a,b) de raio δ.

Observações.

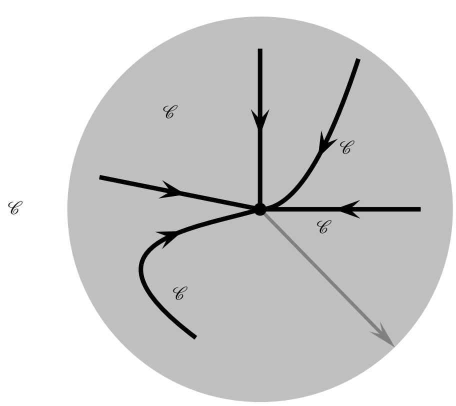

Figura 1: Vizinhança de (a,b) de raio δ.

1. Podemos aproximar-nos de (a,b) ao longo de várias curvas $\mathscr{C}$ e de qualquer maneira.

2. A definição de limite refere-se únicamente à distância entre (x,y) e (a,b), não fala da forma como (x,y) aproxima-se de (a,b).

3. Portanto, se o limite L existe, então $f(x,y)$ deve aproximar-se de L sem importar como (x,y) aproxima-se de (a,b).

4. Assim, se encontrarmos dois caminhos (curvas) diferentes ao longo dos quais $f(x,y)$ tem limites diferentes, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo 1. Mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

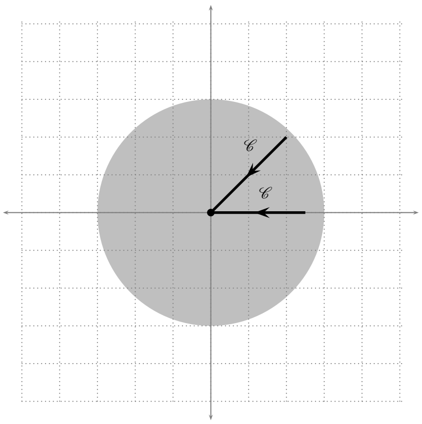

Figura 2: $\mathscr{C}_1 : y = 0$, $\mathscr{C}_2 : y = x$

Ao longo da curva $\mathscr{C}_1 : y = 0$, obtemos

$$L_1 = \lim_{\substack{y=0\\x\to0}} \frac{x^2-0^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x^2} = 1\,.$$

Ao longo da curva $\mathscr{C}_2 : y = x$, obtemos

$$L_2 = \lim_{\substack{y=x\\x\to0}} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to0} \frac{0}{2x^2} = 0\,.$$

Como L_1 e L_2 são diferentes, conclui-se que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

Suponhamos que calculamos o limite de uma função f ao longo de vários caminhos no domínio de f que convergem a (a,b) e obtemos sempre o mesmo valor L, então L é **candidato** a limite de f e nesse caso temos de usar a definição para provar que efectivamente L é o limite de f quando (x,y) aproxima-se de (a,b).

Exemplo 2. Determinar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ existe.

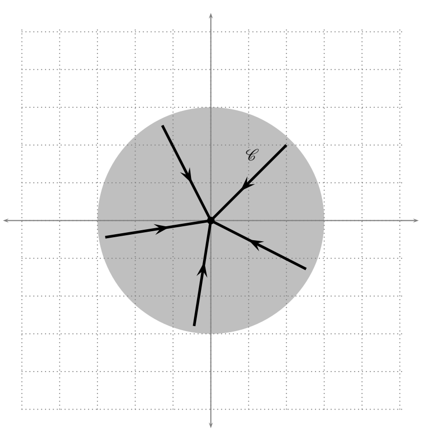

Figura 3: $\mathscr{C} : y = mx$

Ao longo das curvas $\mathscr{C} : y = mx$, temos que para qualquer $m \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to0}} \frac{3x^2\,mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to0} \frac{3xm}{1+m^2} = 0\,.$$

Isto não quer dizer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{seja} \quad 0.$$

Temos de usar a definição de limite para provar que 0 é efectivamente o limite.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{3xy}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{desde que} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Note-se que

$$\left|\frac{3xy}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{3x|y|}{x^2+y^2} < \varepsilon.$$

Como

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2\,, \quad \text{segue-se que} \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Logo,

$$0 = 0 \cdot 3|y| \leq \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 3|y| \tag{1}$$

Por outro lado, note-se que

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta\,,$$

donde concluimos que

$$3|y| < 3\delta\,. \tag{2}$$

Logo, é suficiente tomar $0 < \delta \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ para (em virtude de (1) e (2)) concluir que

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \quad \text{desde que} \quad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Portanto, agora sim podemos afirmar categoricamente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0\,.$$

$\square$

Exemplo 3. Averiguar se existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$.

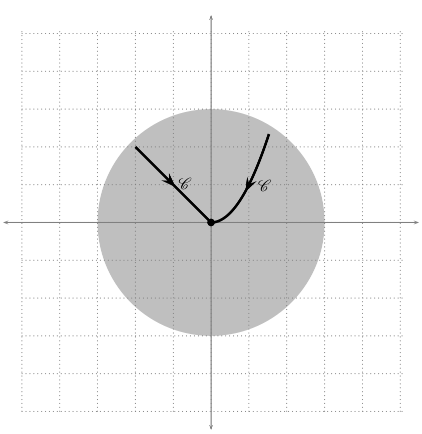

Figura 4: $\mathscr{C}_1\colon y = mx$,$\mathscr{C}_2\colon y = x^2$

Ao longo da curva $\mathscr{C}_1\colon y = mx$, onde $m \in \mathbb{R}$ é qualquer número real, temos que

$$\lim_{\substack{y=mx\\x\to 0}} \frac{2x^2\,mx}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0\,.$$

Por outro lado, ao longo da curva $\mathscr{C}_2\colon y = x^2$, temos que

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to 0}} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2} = 1\,.$$

Logo, concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ não existe.

Continuidade.

Definição 2. Uma função f de duas variáveis é continua no ponto (a, b) se

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)\,.}$$

Diremos que f é contínua em $A \subset \operatorname{Dom} f$ se f é contínua em cada ponto $(a, b) \in A$. Chamaremos **domínio de continuidade** de f ao maior conjunto A onde f é contínua e o denotaremos por $\operatorname{Dom}_c f$. Note-se que eventualmente $\operatorname{Dom}_c f = \operatorname{Dom} f$.

Observações.

1. A definição de continuidade num ponto (a, b) codifica três condições: (i) que a função f esteja definida em (a, b), (ii) que o limite de f quando nos aproximamos de (a, b) exista e (iii) que o limite e o valor da função em (a, b) sejam iguais.

2. O gráfico de uma função contínua em duas variáveis é de uma superfície sem buracos nem incisões.

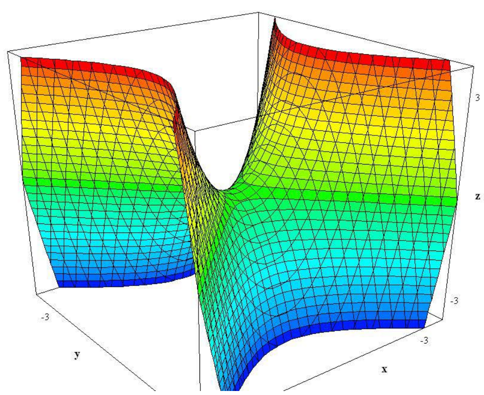

Figura 5: Sela de montar $z = x^2 - y^2$.

3. Somas, diferenças, produtos e quocientes de funções contínuas seguem sendo contínuas na intersecção dos respectivos domínios de continuidade.

4. A composta de funções contínuas é contínua.

5. As funções racionais (quociente de polinómios) tem a particularidade de ter

$$\operatorname{Dom}_c f = \operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{pontos onde o polinómio no denominador se anula}\}.$$

6. Podemos usar continuidade para calcular limites.

Exemplo 4. Evaluar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$.

Como $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y$ é um polinómio, é contínua em tudo $\mathbb{R}^2$ e portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^2y^3 - x^3y^2 + 3x + 2y = f(1, 2) = 11\,.$$

Exemplo 5. Onde é contínua a função $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$?

Podemos ver que f não está definida em $(0, 0)$; portanto não é contínua nesse ponto. Como f é uma função racional então é contínua no seu domínio,

$$\operatorname{Dom}_c f = \operatorname{Dom} f = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x, y) \neq (0, 0)\Big\} = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)\big\}\,.$$

Exemplo 6. Seja

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

A função g está definida em $(0,0)$; mais ainda é discontínua em $(0,0)$ porque $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe (ver Exemplo 1). Note-se que neste exemplo temos

$$\mathrm{Dom}_{\,c}\, g=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\qquad\text{enquanto}\qquad \mathrm{Dom}\ g=\mathbb{R}^2\,.$$

Exemplo 7. Onde é contínua a função $h(x,y)=\arctan(y/x)$?

A função $f(x,y)=y/x$ é uma função racional e portanto é contínua em $\mathbb{R}^2$ excepto na recta $x=0$. A função $g(t)=\arctan(t)$ é contínua em todo $\mathbb{R}$. Logo, a função $h(x,y)=g\big(f(x,y)\big)=\arctan(y/x)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ excepto na recta $x=0$.

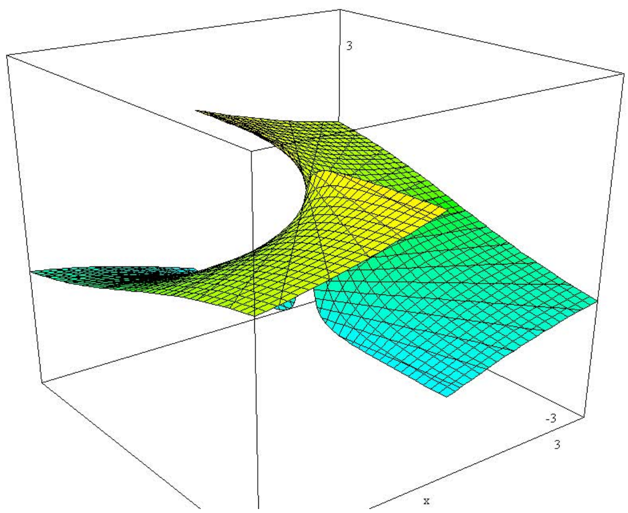

Figura 6: Gráfico de $z=\arctan(y/x)$.

Prolongamento por continuidade.

Da definição de continuidade se segue que uma função f é descontínua num ponto (a,b) quando: **(i)** f não está definida em (a,b), **(ii)** não existe o limite de f quando dentro de Dom f nos aproximamos de (a,b) e **(iii)** ainda que o limite e $f(a,b)$ existam, estes números são diferentes.

No caso em que o limite de f quando (x,y) tende para (a,b) exista e f não esteja definida em (a,b) ou, se estivera definida, $f(a,b)$ não seja igual ao limite de f em (a,b), diremos que f é **prologável por continuidade** a (a,b) e chamaremos **prolongamento por continuidade de f a (a,b)** à função denotada por $\tilde{f}$ e definida por

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & \text{quando}\quad (x,y)\in\mathrm{Dom}\ f.\\ \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) & \text{quando}\quad (x,y)=(a,b).\end{cases}$$

No mesmo sentido, diremos que f é prolongável por continuidade ao conjunto $A\subset\mathbb{R}^2$ se f é prolongável por continuidade a cada ponto de A.

Assim, por exemplo, as funções dos Exemplos 3, 5 e 7 não são prolongáveis por continuidade a $(0,0)$ (aliás a função do Exemplo 7 não é prolongável para ponto algum da recta $x=0$); enquanto a função do Exemplo 2 é.