Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Métodos de integração

São três as técnicas principais que são utilizadas para construir tabelas de integrais indefinidos e devem ser bem assimiladas por quem pretenda um bom conhecimento prático. São elas

1. integração por substituição, um método baseado na regra de derivação de uma função composta;
2. integração por partes, um método baseado na fórmula de derivação do produto; e
3. integração por decomposição em fracções simples.

Estas técnicas não só explicam como se constroem as tabelas de integração indefinidos, como também nos ensinam a transformar certos integrais en formas básicas que figuram nas tabelas.

1. Integração por substituição.

Seja $Q(x) = P\big(g(x)\big)$ para todo o x em dado intervalo I. Se conhecermos a derivada de P, digamos $P'(x) = f(x)$, a regra da derivada da função composta diz-nos que a derivada de Q é dada pela fórmula

$$Q'(x) = P'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x).$$

Logo, se temos a fórmula de integração

$$\int f(x)\,dx = P(x) + C\,, \tag{1}$$

então temos também a fórmula mais geral

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = P\big(g(x)\big) + C\,.$$

Quer isto dizer que se fazermos a substituição $\boxed{u = g(x)}$ temos que

$$\frac{du}{dx} = g'(x)\,, \quad \text{o que pode ser escrito convenientemente como} \quad \boxed{du = g'(x)dx}\,.$$

Desta forma

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)\,du \underset{(1)}{=} P(u) + C = P\big(g(x)\big) + C\,.$$

Nóte-se que não atribuímos qualquer significado especial aos símbolos dx e du. São usados como instrumentos meramente formais para nos auxiliarem a efectuar operações matemáticas de uma maneira mecânica.

O sucesso do método depende da habilidade de cada um em determinar qual a parte da função a integrar que deve ser substituída pelo símbolo u e esta habilidade adquire-se, em grande parte, com a experiência ganha na resolução de vários exemplos típicos.

Exemplo 1. Integrar $\displaystyle\int x^3 \cos x^4\,dx$.

Seja $u = x^4$, então $du = 4x^3dx$ e obtém-se

$$\int x^3\cos x^4\,dx = \frac{1}{4}\int \big(\cos x^4\big)\big(4x^3dx\big) = \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \underset{\textbf{P.F.}}{=} \frac{1}{4}\operatorname{sen} x^4 + C.$$

P.F. (Passo Final): Não se esquecer de escrever tudo em termos da variável original.

Exemplo 2. Integrar $\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx$.

Faça-se $u = \cos x$, donde $du = -\operatorname{sen} x \, dx$ e

$$\int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx = -\int (\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x \, dx) = -\int u^2 \, du = -\frac{1}{3} u^3 + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

Exemplo 3. Integrar $\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1} \, dx$.

Seja $u = 3x^2 + 2x + 1$, então $du = (6x+2)dx$ e obtém-se

$$\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1} \, dx = \int \frac{1}{u} \, du = \ln |u| + C = \ln |3x^2 + 2x + 1| + C \, .$$

2. Integração por partes.

A derivada de um produto de duas funções f e g é dada pela fórmula

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Se integrarmos ambos os lados da equação de acima, obtemos

$$\underbrace{\int (fg)'(x) \, dx}_{(fg)(x)+C} = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx \, ,$$

que habitualmente se escreve

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx + C \, .$$

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ resulta $du = f'(x) \, dx$ e $dv = g'(x) \, dx$ e a fórmula de integração por partes escreve-se na forma abreviada

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du + C \, . \tag{2}$$

Exemplo 4. Integrar $\int x \cos x \, dx$.

Para utilizar a notação abreviada de (2), escrevemos

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x, & dv = \cos x \, dx, \\ du = dx, & v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x, \end{array}}$$

Logo, $\int x \cos x \, dx = uv - \int v \, du = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx + C = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$.

Exemplo 5. Integrar $\int x^2 \cos x \, dx$.

Sejam

$$\begin{array}{ll} u = x^2, & dv = \cos x \, dx, \\ du = 2x \, dx, & v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x, \end{array}$$

Logo,

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x \, dx + C. \tag{3}$$

O último integral pode ser calculado por aplicação do método de integração por partes mais uma vez.

$$\begin{aligned} u &= x, & dv &= \operatorname{sen} x \, dx, \\ du &= dx, & v &= \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x, \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C\,. \tag{4}$$

Substituindo (4) em (3), e agrupando as duas constantes arbitrárias numa só, obtemos

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x - 2\big(-x \cos x + \operatorname{sen} x\big) + C\,.$$

3. Integração por decomposição em fracções simples.

Lembramos que o quociente de dois polinómios se designa por **função racional**. A ideia fundamental do método consiste em **decompor uma dada função racional numa soma de fracções mais simples**, as quais podem ser integradas pelas técnicas já discutidas anteriormente.

Uma função racional $\frac{f}{g}$ pode ser **própria** ou **imprópria**. Chama-se própria aquando o grau do numerador é menor do que o do denominador, e imprópria caso contrário. As técnicas que estudaremos referem-se a funções racionais próprias. Se $\frac{f}{g}$ é imprópria, podemos usar o algoritmo da divisão para obtermos

$$\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\text{imprópria}} = q(x) + \underbrace{\frac{r(x)}{g(x)}}_{\text{própria}}\,,$$

com $q(x)$ e $r(x)$ respectivamente os polinómios **quociente** e **resto**, este último com grau inferior ao de $g(x)$, o que faz com que $\frac{r(x)}{g(x)}$ seja uma função racional própria.

Exemplo 6. Seja a função racional

$$\frac{x^3+3}{x^2-2x-3}\,.$$

Usando o algoritmo da divisão obtemos

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 3x + 0 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2} -x^3 + 2x^2 + 3x & x + 2 \\ \cline{1-1} 2x^2 + 6x & \\ -2x^2 + 4x + 6 & \\ \cline{1-1} 10x + 6 & \end{array}$$

Logo, temos que

$$\frac{x^3+3}{x^2-2x-3} = x + 2 \; + \; \frac{10x+6}{x^2-2x-3}\,.$$

Portanto, no estudo desta técnica de integração, não há perda de generalidade se nos restringimos às funções racionais próprias e daqui para o futuro consideramos sempre $\int f(x)/g(x)\,dx$ na hipótese em que o grau de f é menor do que o de g.

Un teorema de álgebra estabelece que toda função racional própria pode ser expresa como uma soma de fracções da forma

$$\frac{A}{(x+a)^k} \quad \text{e} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^m}\,,$$

onde k e m são inteiros positivos e A, B, C, a, b e c são constantes reais condicionadas a $b^2-4c<0$. Esta condição significa que o polinómio x^2+bx+c não se pode decompor em factores lineares com coeficientes reais.

Quando uma função racional for expressa do modo indicado, dizemos que foi decomposta em fracções simples. Deste modo o problema de integração desta função racional reduz-se ao da integração das suas fracções simples. Estas podem ser fácilmente integradas pela aplicação das técnicas descritas a seguir.

É conveniente dividir a discussão em dois casos, consoante o modo segundo o qual o denominador de $\frac{f(x)}{g(x)}$ pode ser decomposto num produto de factores.

Caso 1. **O denominador é um produto de factores lineares distintos**. Suponhamos que $g(x)$ é decomponível em n factores lineares distintos, por exemplo

$$g(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\,.$$

Então teremos a decomposição

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-x_n}\,, \tag{5}$$

onde as constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ obtém-se ao comparar o polinómio $f(x)$ com o polinómio resultante no numerador do lado direito de (5) (necessáriamente de grau $< n$). Assim, o integral de $\frac{f(x)}{g(x)}$ será igual a

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx &= \int \frac{A_1}{x-x_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-x_2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_n}{x-x_n}\,dx \\ &= A_1 \ln|x-x_1| + A_2 \ln|x-x_2| + \cdots + A_n \ln|x-x_n| + K\,,\end{aligned}}$$

onde K é uma constante arbitrária.

Exemplo 7. Integrar $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$.

Visto que $x^3+x^2-2x = x(x-1)(x+2)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+2} \\ &= \frac{A_1(x-1)(x+2) + A_2 x(x+2) + A_3 x(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A_1+A_2+A_3)x^2 + (A_1+2A_2-A_3)x + (-2A_1)}{x(x-1)(x+2)}\,.\end{aligned}$$

Comparando numeradores, obtemos as seguintes equações

$$2 = A_1 + A_2 + A_3 \quad , \quad 5 = A_1 + 2A_2 - A_3 \quad , \quad -1 = -2A_1 \ ,$$

donde $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = 2$ e $A_3 = -\frac{1}{2}$. Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + K \,.\end{aligned}$$

Caso 2. **O denominador é um produto de factores lineares, alguns dos quais repetidos**. Suponhamos que $g(x)$ é decomponível como segue

$$g(x) = (x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_r)^{m_r} \,,$$

com $m_1, m_2, \ldots, m_r$ inteiros positivos tais que $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$ $\big($o grau de $g(x)\big)$. Neste caso teremos a decomposição

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-x_1} &+ \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \\ &+ \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \\ &\qquad\vdots \\ &+ \frac{A_{r,1}}{x-x_r} + \frac{A_{r,2}}{(x-x_r)^2} + \cdots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-x_r)^{m_r}} \,,\end{aligned}$$

onde as constantes $A_{i,j}$ são calculadas de forma similar ao caso anterior. Logo, o integral de $\frac{f(x)}{g(x)}$ será igual a

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = A_{1,1}\ln|x-x_1| &+ \frac{A_{1,2}}{-2+1}(x-x_1)^{-2+1} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{-m_1+1}(x-x_1)^{-m_1+1} + \\ + A_{2,1}\ln|x-x_2| &+ \frac{A_{2,2}}{-2+1}(x-x_2)^{-2+1} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{-m_2+1}(x-x_2)^{-m_2+1} + \\ &\vdots \\ + A_{r,1}\ln|x-x_r| &+ \frac{A_{r,2}}{-2+1}(x-x_r)^{-2+1} + \cdots + \frac{A_{r,m_r}}{-m_r+1}(x-x_r)^{-m_r+1} + K \,,\end{aligned}}$$

onde K é uma constante arbitrária.

Exemplo 8. Integrar $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$.

Temos

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{(A_1+A_2)x^2 + (2A_1+A_3)x + (A_1-A_2-A_3)}{(x-1)(x+1)^2} \,.\end{aligned}$$

Comparando numeradores, obtemos as seguintes equações

$$1 = A_1 + A_2 \quad , \quad 2 = 2A_1 + A_3 \quad , \quad 3 = A_1 - A_2 - A_3 \ ,$$

donde $A_1 = \frac{3}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$ e $A_3 = -1$. Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + K \,. \end{aligned}$$

Caso 3. **O denominador contém factores quadráticos irredutíveis, nenhum dos quais se repete**. Suponhamos que $g(x)$ contém o factor quadrático

$$(x^2+bx+c) \ ,$$

o qual é irredutível e não se repete. Neste caso a correspondente fracção simples a considerar é

$$\frac{Bx+C}{x^2+bx+c} \,.$$

Ao integrar esta fracção obtemos

$$\boxed{\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{C-\frac{Bb}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + K \,.}$$

onde K é uma constante arbitrária.

Exemplo 9. Integrar $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$.

O denominador pode ser apresentado na forma

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \,,$$

em que o factor x^2+x+1 é irredutível (tem discriminante $\Delta = -3$). Logo, tentamos uma decomposição da forma

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)} \,. \end{aligned}$$

Comparando numeradores, obtemos as seguintes equações

$$3 = A + B \quad , \quad 2 = A - B + C \quad , \quad -2 = A - C \ ,$$

donde $A = 1$, $B = 2$ e $C = 3$. Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+x+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| + \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + K \,. \end{aligned}$$

Caso 4. **O denominador contém factores quadráticos irredutíveis, alguns dos quais estão repetidos**. Suponhamos que $g(x)$ contém o factor quadrático

$$(x^2 + bx + c) \; ,$$

o qual é irredutível e se repete m vezes. Neste caso temos a seguinte decomposição

$$\boxed{\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c}\,dx + \int \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + x + 1)^2}\,dx + \cdots + \int \frac{B_mx + C_m}{(x^2 + x + 1)^m}\,dx + \text{outros}}$$

Exemplo 10. Integrar $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$.

Podemos escrever

$$\begin{aligned}\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+2} + \frac{Dx + E}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+2) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+2)^2} \, .\end{aligned}$$

Desembaraçando de denominadores e determinando A, B, C, D e E obtemos $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$, $D = -1$ e $E = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}{x^2+2}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+2}\right) + K \, .\end{aligned}$$