Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Segundo mini-teste

1) Calcular as primitivas de $e^{3x}\,\text{Sen}\,x$. **(10 val.)**

2) Calcule a seguinte integral indefinida **(10 val.)**

$$\int \frac{9 - x^2 - 5x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$$

Resolução.

1) Temos de calcular a seguinte integral indefinida

$$\mathbf{I} = \int e^{3x}\,\text{Sen}\,3x\,dx.$$

Fazemos

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^{3x}, & dv = \text{Sen}\,x\,dx, \\ du = 3e^{3x}dx, & v = \displaystyle\int \text{Sen}\,x\,dx = -\cos x \end{array}} \quad \left(\underbrace{\int u\,dv = uv - \int v\,du}_{\text{int. por partes}}\right).$$

Usando o método de integração por partes obtemos

$$\mathbf{I} = -e^{3x}\cos x + 3\underbrace{\int e^{3x}\cos x\,dx}_{\mathbf{II}}.$$

Fazendo

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = e^{3x}, & dv = \cos x\,dx, \\ du = 3e^{3x}dx, & v = \displaystyle\int \cos x\,dx = \text{Sen}\,x\,, \end{array}}$$

e usando o método de integração por partes mais uma vez, obtemos

$$\mathbf{II} = e^{3x}\,\text{Sen}\,x - \int 3e^{3x}\,\text{Sen}\,x\,dx = e^{3x}\,\text{Sen}\,x - 3\,\mathbf{I}\,.$$

Logo, para C constante arbitrária, temos

$$\mathbf{I} = -e^{3x}\cos x + 3\,\mathbf{II} = -e^{3x}\cos x + 3e^{3x}\,\text{Sen}\,x - 9\,\mathbf{I} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{I} = \frac{3e^{3x}\,\text{Sen}\,x - e^{3x}\cos x}{10} + C\,.$$

2) Usando o método de decomposição em fracções simples, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{9-x^2-5x}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2} \\
&= \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)} \\
&= \frac{(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C)}{(x-1)^2(x+2)}\ ,
\end{aligned}
$$

donde conseguimos

$$-x^2-5x+9=(A+C)x^2+(A+B-2C)x+(-2A+2B+C).$$

Por simples comparação obtemos o seguinte sistema de três equações com três incógnitas

$$
\begin{array}{rcl}
A+C & = & -1 \\
A+B-2C & = & -5 \\
-2A+2B+C & = & 9
\end{array}\ .
$$

Ao resolver este sistema obtemos $\boxed{A=-2}$, $\boxed{B=1}$ e $\boxed{C=1}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{9-x^2-5x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx &= \int \frac{-2}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{1}{x+2}\,dx \\
&= -2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln|x+2|+C\ ,
\end{aligned}
$$

onde C é uma constante arbitrária.