

Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Quarto mini-teste

1) Encontrar o número b tal que a recta $y = b$ divida a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$, em duas regiões de igual área.

Resolução.

1) A região $\mathcal{R}$ limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$ é mostrada na Figura 1.

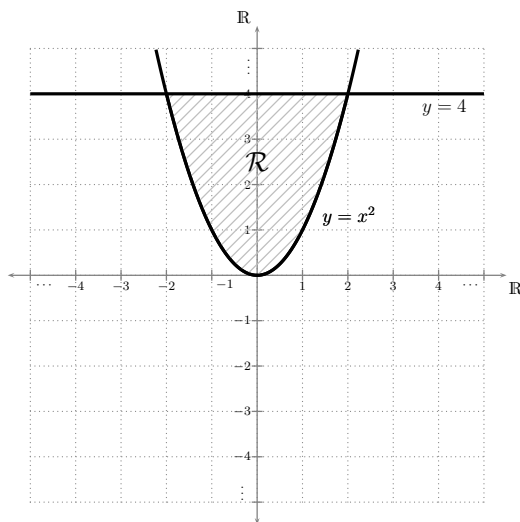


Figura 1: Região $\mathcal{R}$.

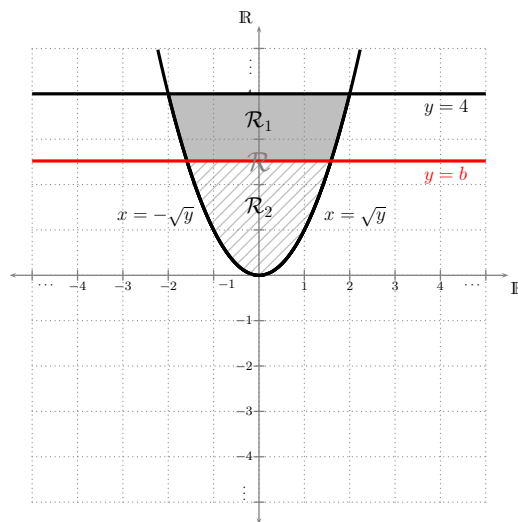


Figura 2: Subregiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ de $\mathcal{R}$.

Considerando $\mathcal{R}$ como uma região de tipo I, podemos calcular a sua área como segue

$$A(\mathcal{R}) = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) - \frac{1}{3}(8 - (-8)) = \frac{2}{3} \times 16.$$

Queremos encontrar b tal que a recta $y = b$ divida a região $\mathcal{R}$ em duas subregiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ (como na Figura 2) tais que

$$A(\mathcal{R}_1) = A(\mathcal{R}_2) \quad \text{e} \quad A(\mathcal{R}_1) + A(\mathcal{R}_2) = A(\mathcal{R}) = \frac{2}{3} \times 16.$$

Logo, $A(\mathcal{R}_1) = A(\mathcal{R}_2) = \frac{16}{3}$. Para encontrar o valor de b , temos de calcular a área de $\mathcal{R}_1$ (ou de $\mathcal{R}_2$), considerando $\mathcal{R}$ como uma região de tipo II. Por exemplo, calculemos a área de $\mathcal{R}_1$,

$$A(\mathcal{R}_1) = \int_b^4 (\sqrt{y} - (-\sqrt{y})) dy = \int_b^4 2\sqrt{y} dy = 2 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_b^4 = \frac{4}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4}{3} \left(8 - b^{\frac{3}{2}}\right).$$

Portanto

$$A(\mathcal{R}_1) = \frac{16}{3} \implies \frac{4}{3} \left(8 - b^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{16}{3} \implies 8 - b^{\frac{3}{2}} = 4 \implies \boxed{b = \sqrt[3]{16}}.$$