Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Quinto mini-teste

1) Represente gráficamente o domínio da seguinte função **(10 val.)**

$$f(x,y) = \ln y - \sqrt{1-x^2}$$

2) Encontre, se existe, **(10 val.)**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Resolução.

1) Para encontrar o domínio de f temos de nos perguntar para quais dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, o número dado por $f(x,y) = \ln y - \sqrt{1-x^2}$ faz sentido. Claramente, isto acontece quando $y > 0$ e $1 - x^2 \geq 0$. Em resumo,

$$\text{Dom } f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y > 0 \quad \wedge \quad 1 - x^2 \geq 0 \right\}$$

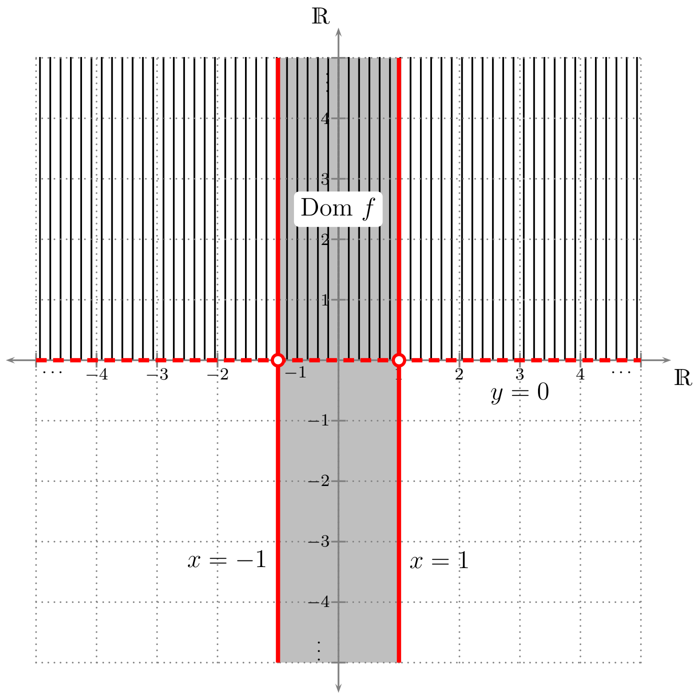

Fig. 1: Dom f é a região sombreada e colorida em comum

2) Podemos aproximar-nos de $(0,0)$ ao longo da curva $\mathscr{C}_1 : y = 0$, sendo o limite a calcular neste caso

$$\lim_{\substack{y=0 \\ x\to 0}} \frac{0^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0\,.$$

Por outro lado, podemos também aproximar-nos de $(0,0)$ ao longo da curva $\mathscr{C}_2 : x = 0$, sendo o limite a calcular neste caso

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y\to 0}} \frac{y^2}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1\,.$$

Como estes limites são diferentes concluimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$ **não** existe.