Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias

Matemática II

Sexto mini-teste

1) Encontrar a equação do plano tangente a **(10 val.)**

$$z = x^2 + 2y^3 \ , \quad \textbf{no ponto} \quad (1,1,3) \ .$$

2) Determinar os pontos críticos de **(10 val.)**

$$f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2 + 1\right) \ .$$

Resolução.

1) A equação do plano tangente à gráfica $\mathrm{Gr}\,(f)$ de f no ponto (a,b,c) é

$$\boxed{z = c + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)(x-a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)(y-b)}$$

onde tem-se que $c = f(a,b)$. No nosso caso temos $(a,b) = (1,1)$ e $c = 3$ e portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2y^3\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = 2x\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = 2 \qquad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2y^3\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6y^2\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6 \ .$$

Logo, o plano tangente à $\mathrm{Gr}\,(f)$ no ponto $(1,1,3)$ é

$$z = 3 + 2(x-1) + 6(y-1) = 2x + 6y - 5 \ .$$

2) Para determinar os pontos críticos de f temos de resolver a equação

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \ .$$

Assim,

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, , \, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}\, , \, \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right) = (0,0)\, ,$$

donde segue-se que $x = 0$ e $y = 0$. Portanto $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.