Exercício - teste 1

a) Provar que

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

Resolução: Usamos indução em n para provar que a fórmula acima é correcta.

- $\boldsymbol{n=1}$. Claramente temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n=1}(2i-1) = 2(1)-1 = 1 = 1^2$.

- **Hipótese Indutiva.** $\forall\, j \in \mathbb{N}$, onde $1 \leq j \leq n$, cumpre-se que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

- $\boldsymbol{n+1?}$ Verificamos que a fórmula também se cumpre para $n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= \sum_{i=1}^{n}(2i-1) \;+\; 2(n+1)-1\\ &= n^2 \;+\; 2(n+1)-1 \;=\; n^2+2n+1 \;=\; (n+1)^2\,.\end{aligned}$$

Concluimos que a fórmula $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Resolver

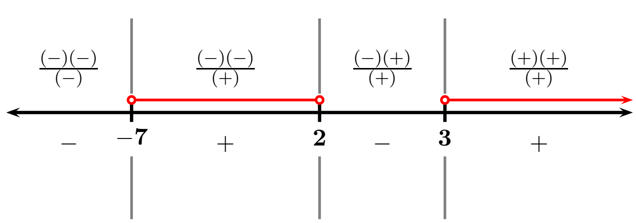
$$\frac{x^2-5x+6}{|x|-7} < 0$$

Resolução: Primeiro temos de levantar as barras do valor absoluto de x, o que significa que vamos considerar duas regiões na recta real consoante a definição de $|x|$.

$\boxed{\text{Região I: }]-\infty,0[}$ Nesta região $|x| = -x$ e portanto a inequação a resolver é

$$\frac{x^2-5x+6}{-x-7} < 0 \quad\longleftrightarrow\quad \frac{x^2-5x+6}{x+7} > 0 \quad\longleftrightarrow\quad \frac{(x-3)(x-2)}{x+7} > 0\,.$$

O análise de sinais desta inequação é resumido no seguinte diagrama



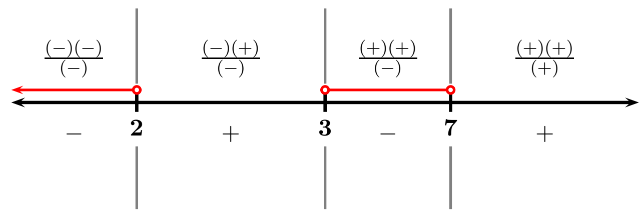
Logo, o conjunto solução na Região I é

$$\mathbf{CS_I} =]-\infty,0[\,\cap\, \big(]-7,2[\,\cup\,]3,+\infty[\big) \;=\;]-7,0[\,.$$

$\boxed{\text{Região II: } [0,+\infty[}$ Nesta região $|x| = x$ e portanto a inequação a resolver é

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 7} < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{(x-3)(x-2)}{x-7} < 0\,.$$

O análise de sinais desta inequação é resumido no seguinte diagrama



Logo, o conjunto solução na Região II é

$$\mathbf{CS_{II}} = [0,+\infty[\,\cap\,\big(\,]-\infty,2[\,\cup\,]3,7[\,\big) \;=\; [0,2[\,\cup\,]3,7[\,.$$

Portanto, o conjunto solução da inequação é

$$\mathbf{CS} \;=\; \mathrm{CS_I} \;\cup\; \mathrm{CS_{II}} \;=\,]-7,0[\,\cup\,[0,2[\,\cup\,]3,7[\,=\,]-7,2[\,\cup\,]3,7[\,.$$