Exercício - teste 11

a) Calcule a área da região seguinte

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y^2 \leq x \,,\; y \geq x^2\right\} .$$

Resolução:

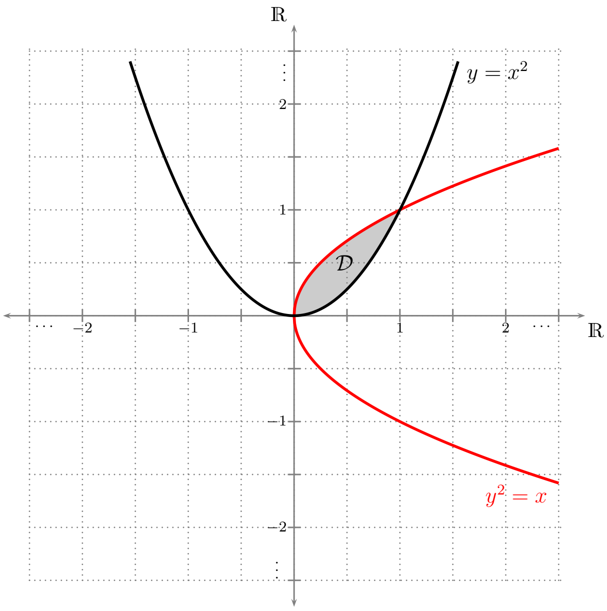

Figura 1: Região $\mathcal{D}$ limitada pelas curvas $y^2 = x$ e $y = x^2$.

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(0 - 0\right) = \frac{1}{3} .$$

b) Calcule o volume do sólido obtido rodando em torno do eixo $0x$ a superfície

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 3x^2 \leq y \leq 2x\right\} .$$

Resolução:

Primeiro encontramos os pontos de intersecção das curvas $y = 3x^2$ e $y = 2x$. Eles obtêm-se ao resolver a equação $3x^2 - 2x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x(3x-2) = 0$. Portanto, $x = 0$ e $x = \frac{2}{3}$. Estes são os limites de integração que usaremos para calcular o volume do sólido obtido ao rotar $\mathcal{D}$ ao redor do eixo x (ver Figura 2); nomeadamente

$$\mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}) = \int_0^{\frac{2}{3}} \pi(2x - 3x^2)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{2}{3}} (4x^2 - 12x^3 + 9x^4)\, dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - 3x^4 + \frac{9}{5}x^5\right)\Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{22}{15}\pi .$$

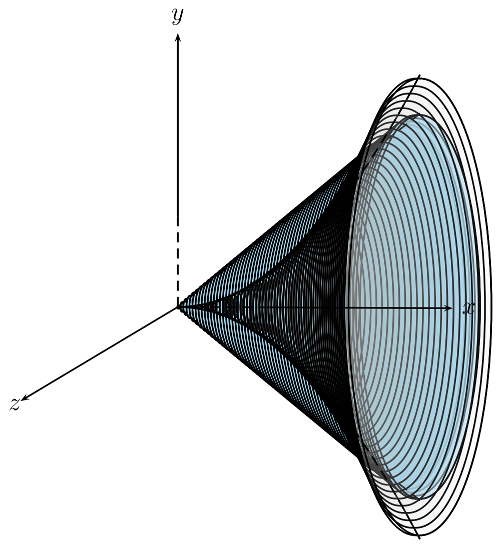

Figura 2: Sólido obtido ao rotar em torno ao eixo x a região $\mathcal{D}$.